



## Modelizando caminos y mapas

Anna **Vidal** Meló

[avidal@mat.upv.es](mailto:avidal@mat.upv.es)

Bernardino **Roig** Sala

[broig@mat.upv.es](mailto:broig@mat.upv.es)

Vicent **Estruch** Fuster

[vdestruc@mat.upv.es](mailto:vdestruc@mat.upv.es)

Francisco José **Boigues** Planes

[fraboipl@mat.upv.es](mailto:fraboipl@mat.upv.es)

Campus de Gandia de la Universidad Politécnica de Valencia  
España

### Resumen

Este póster describe un Proyecto sobre el que han trabajado estudiantes de primer año de Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones del Campus de Gandia de la Universidad Politécnica de Valencia desde el curso 2008-2009. El proyecto básico inicial se ha adaptado una vez implantada la nueva titulación de Grado en Sistemas de Telecomunicación Sonido e Imagen (G.S.T.S.I.), en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior (E.E.E.S.). En líneas generales, se trata de desarrollar diversas aproximaciones, concretadas en varios modelos, para un mismo problema: aproximar la longitud real de un camino representado por segmentos unidos trazados sobre un mapa topográfico. La experiencia se ha realizado en el contexto de las prácticas con soporte informático, donde el alumno desarrolla el aprendizaje de una parte sustancial de la asignatura, el Cálculo Numérico. La metodología docente utilizada ha sido el trabajo en grupo, utilizando el puzzle de Aronson en alguna sesión.

*Palabras clave:* cálculo numérico, metodologías activas, trabajo en grupo, puzzle.

### Introducción y objetivo

La construcción del conocimiento matemático adquiere características peculiares atendiendo al tipo de estudiante. No es el mismo, el conocimiento que adquiere un estudiante graduado en matemáticas que el de un ingeniero o un graduado en ciencias. Estos últimos acentúan la aplicabilidad de las matemáticas y por tanto, una enseñanza basada en la resolución de problemas puede ser un elemento que ayude a comprender mejor las matemáticas, así como un

elemento motivador hacia el estudio de las matemáticas.

En este póster se expone la implementación y desarrollo de un Proyecto en el que el trabajo colaborativo juega un papel fundamental y pretende ser el foco que introduzca una serie de conceptos matemáticos de índole numérico. Esta experiencia se ha desarrollado con estudiantes de primer año de Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones del Campus de Gandía de la Universidad Politécnica de Valencia, desde el curso 2008-2009, y con la adaptación correspondiente con motivo de la implantación de la nueva titulación en el marco del E.E.E.S. Hasta el curso 2009-2010, la asignatura implicada fue Fundamentos Matemáticos y, actualmente, la experiencia, renovada, se desarrolla en la asignatura Matemáticas II de los planes de estudio de los nuevos grados en telecomunicaciones y cuyos contenidos se corresponden con los de los textos docentes (Alamar, Roig & Vidal, 2005,2008).

### **Estructura del poster**

El poster tiene dos partes claramente diferenciadas. En la primera parte se explican diferentes elementos de índole académico y en la segunda parte se describen las diferentes tareas que deben realizar los estudiantes en el proyecto. Inicialmente, se crean diversos grupos de trabajo que abordan un problema realista, con varios apartados, que denominaremos Proyecto. Finalmente se elabora una memoria, que será evaluada, cuyo contenido se presenta en una exposición oral por cada grupo en la última clase práctica. El proyecto ha ido evolucionando a lo largo de los años y desde hace dos cursos se plantea un trabajo que engloba todos los contenidos del Cálculo Numérico establecidos en el programa.

En lo que respecta a la metodología utilizada, se sigue la experiencia de Miguel Valero, y Roc Meseguer ([8]) basada, fundamentalmente, en el puzzle de Aronson (1978, 1997), el aprendizaje cooperativo y la elaboración de un *Project Based Learning*, (Johnson, Johnson & Smith, 1991, 1998; Wankat & Oreovicz, 1993; Markham et al. 2003). En el curso 2008-2009 se inicia la aplicación de estas metodologías en las clases prácticas y en el Proyecto, (Finn & Sing, 1994; Vidal et al, 2009, 2010).

Es en la parte práctica de la asignatura, al abordar los contenidos del programa referentes a Cálculo Numérico (Alamar et al, 2008; Cordero et al, 2005), donde se desarrolla la experiencia. Se realizan 5 sesiones prácticas de dos horas, utilizando un asistente matemático (Matlab<sup>®</sup>). En síntesis, en dichas sesiones se explican los siguientes contenidos: Una introducción a las matemáticas con Matlab<sup>®</sup>; interpolación y ajuste de puntos; aproximación de integrales definidas; resolución aproximada de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y representación e interpolación de superficies.

La primera parte de una clase práctica se dedica al estudio teórico de un tema en concreto, bien a partir de la exposición del profesor o bien mediante la realización de un puzzle. El tiempo restante es utilizado para resolver uno de los apartados del Proyecto, precisamente aquel relacionado con el tema abordado en la primera parte de la sesión.

En el Proyecto que se plantea a cada uno de los grupos, en líneas generales, se trata de obtener resultados en base a diversas aproximaciones (o lo que es lo mismo, modelizar de diversas formas) sobre un mismo problema: calcular la longitud de un camino representado por una línea recta trazada sobre un mapa topográfico.

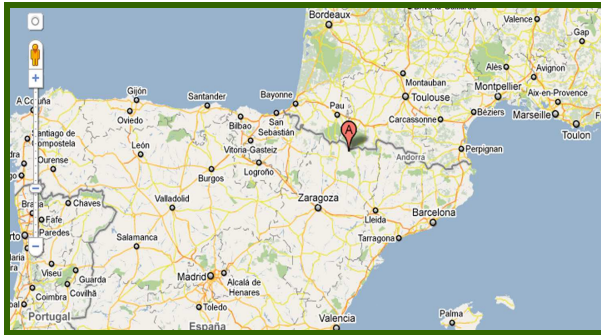


Figura 1. Localización de la región global a estudiar en el proyecto

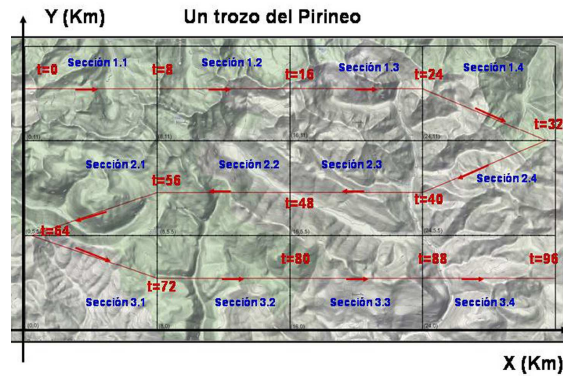


Figura 2. Región global a estudiar en el proyecto conjunto

En base a las medidas que toman los alumnos sobre el mapa topográfico proporcionado a cada grupo de trabajo, se puede modelizar el camino simplemente como una poligonal y calcular su longitud aproximada sumando las longitudes de las hipotenusas a partir del Teorema de Pitágoras o bien utilizando el método de los Trapecios sobre dicha poligonal.

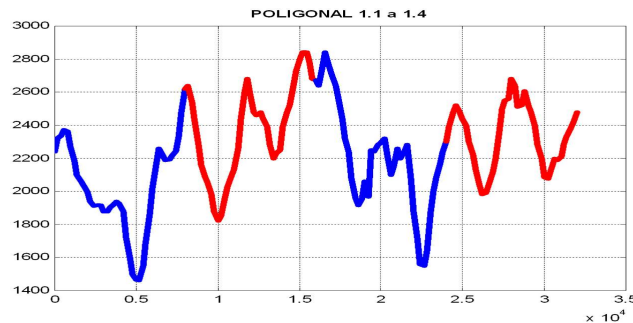


Figura 3. Poligonal global de la primera fila (secciones 1.1-1.4)

Sin embargo el estudio previo de las técnicas de interpolación y ajuste permiten la aproximación de la curva mediante una función polinómica, lo cual da lugar a un nuevo modelo. La experiencia con el polinomio interpolador permite a los alumnos concluir que el método no proporciona, en general, buenas soluciones, y como consecuencia hay que plantear la opción de disminuir el grado del polinomio para que, a partir de la representación gráfica y de la determinación de errores, se pueda obtener un polinomio más ajustado a los datos que definen el camino sobre el mapa.

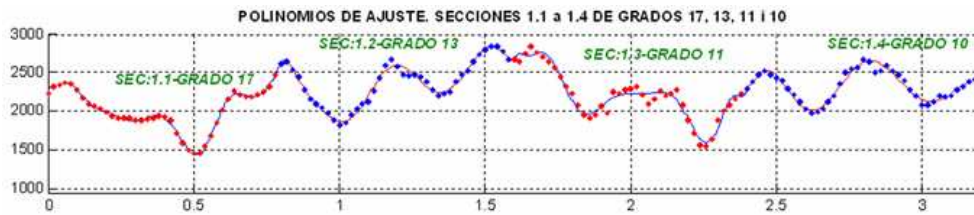


Figura 4. Representación de los polinomios de ajuste de la primera fila

Una vez obtenido el polinomio adecuado,  $P(x)$ , se pueden calcular aproximaciones a la longitud buscada a partir de la integral

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (P'(x))^2} dx,$$

teniendo en cuenta diversos métodos de integración numérica. En el proyecto se pide en concreto obtener varias aproximaciones al aplicar el método de los trapecios con particiones distintas, hasta obtener la precisión adecuada.

Por último, la determinación de la longitud también puede afrontarse modelando el problema como uno de condiciones iniciales,

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = \sqrt{1 + (P'(t))^2} \\ L(t_0) = L_0 \end{cases}$$

de forma que, al aplicar los métodos de resolución numérica de EDO's estudiados se obtiene, además de la aproximación del valor de la longitud del camino,  $L(t_1)$ , la gráfica de esta longitud como función  $L(t)$  desde  $t = t_0$  hasta  $t = t_1$ .

En definitiva, se calculan aproximaciones a la longitud del camino a través de tres métodos distintos: Pitágoras, método de los trapecios, método de Runge Kutta.

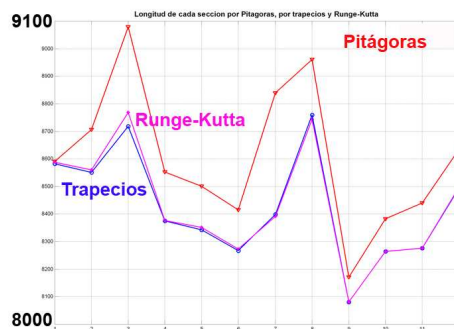


Figura 5. Aproximaciones de la longitud de todos l

Como complemento, se aprovecha la potencia gráfica de Matlab<sup>®</sup> para obtener el modelo 3D del mapa topográfico completo. Para ello los alumnos toman una serie de medidas sobre el mapa correspondiente, previamente cuadrículado, y recurriendo a la interpolación por esplines cúbicos obtienen el modelo 3D.

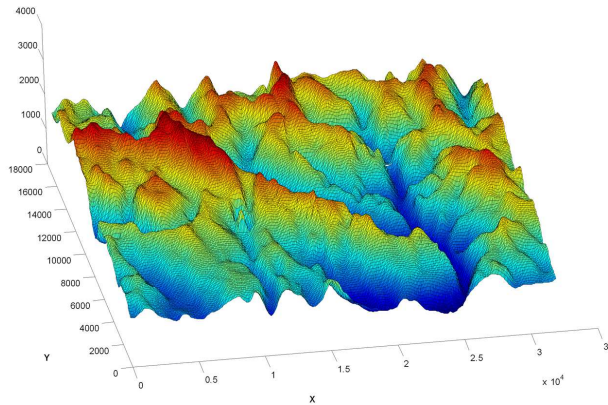


Figura 6. Representación 3D global interpolada

### Resultados

Durante el curso 2008-2009 se recurrió a diversos mapas topográficos obtenidos en Google Maps. En los dos últimos cursos, el mapa de partida abarca una extensa región que se divide en 12 partes o secciones, cada una de las cuales es estudiada por un grupo. En el mapa global se señala el camino trazado, el cual quedará dividido en 12 trozos, uno por cada sección del mapa global. El objetivo es obtener resultados para el camino global a partir de sus partes, de esta forma se consigue que los grupos de trabajo cooperen e interactúen para la resolución de un problema común en el que un buen resultado para cada sección es esencial. El trabajo a realizar por cada grupo es similar en lo que respecta a los pasos a seguir, pero las secciones, y por lo tanto los datos de partida, son distintas. A partir de los resultados para cada sección se llega al resultado final para toda la extensión.

El título del Proyecto del curso 2009-2010 fue “Un trozo de Pirineo”. Se consideró una región de 396 Km<sup>2</sup> situada en el Pirineo Central (Figura 1), en cuyo mapa topográfico (Figura 2) se pueden observar las 12 secciones. En la Figura 3 se muestra la parte del camino correspondiente a las secciones de la 1.1 a la 1.4 (primera fila del mapa) y en la Figura 4 se observa la longitud de cada trozo del camino, correspondiente a cada sección. Se puede observar que los métodos aplicados a la resolución del problema EDO ofrece resultados similares e inferiores al enfoque de Pitágoras puesto que calculan la longitud de un camino más regular que viene dado por el polinomio de ajuste.

La Figura 6 corresponde al modelo 3D del Parque Nacional de Ordesa y Monte Perdido, constituido por 4 valles de extraordinaria belleza: Ordesa al Suroeste, Añisclo al Sur, Escuaín al Sureste y Pineta al Este. Parte del macizo se interna al Norte en territorio francés, formando parte del Parc National des Pyrénées, destacando el Circo de Gavarnie, un impresionante circo glaciar que, en su cabecera, tiene la cascada más alta de Europa, con más de 400 metros de caída vertical. Al Este de Gavarnie también se observan los circos de Estaubé y el de Troumouse.

En el curso 2010-2011, se ha partido del mapa de una región próxima al Campus de Gandia, que engloba el monte Montdúver, en el que hay emplazadas muchas antenas de telecomunicaciones.

En la actualidad el “Grup d’Innovació Educativa i Recerca en Matèries Científiques” (GIERMAC) trabaja en desarrollar proyectos similares al expuesto pero orientados al estudio e interpretación de mapas acústicos.

### Referencias y bibliografía

- Alamar, M., Roig, B. & Vidal, A. (2005). *Fundamentos Matemáticos I*. Valencia: editorial UPV
- Alamar, M., Roig, B. & Vidal, A. (2008). *Fonaments Matemàtics II*. Valencia: editorial UPV.
- Alamar, M., Roig, B. & Vidal, A. (2008). *Fonaments Matemàtics: pràctiques de laboratori*. Valencia: editorial UPV.
- Aronson, E. & Patnoe, S. (1997). *The Jigsaw Classroom, Building Cooperation in the Classroom* (2ª ed.). New York: Addison Wesley Longman.
- Aronson, E., Blaney, N., Strphin, C., Sikes, J. & Snapp, M. (1978). *The Jigsaw Classroom*. Beverly Hills, CA: Sage Publishing Company.
- Cordero, A., Hueso, J.L., Martínez, E. & Torregrosa, J.R. (2005). *Métodos Numéricos con Matlab*. Valencia: editorial UPV.
- Johnson, D. W., Johnson, R. T. & Smith, K. A. (1991). *Active Learning: Cooperation in the College Classroom*. Edina, Mn: Interaction Book Company.
- Del Canto, P., Gallego, I., Hidalgo, R., López, J., López, J.M., Mora, J. et al. (2007). Aprender a programar ordenadores mediante una metodología basada en proyectos. *Libro resumen del 15º Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas, CUIEET*, (pp.1-2). Valladolid.
- Finn K. & Stig E. (1994). *The Aalborg Experiment*. Aalborg: Aarhus University Press editorial.
- Markham, T., Larmer, J. & Ravitz, J. (2003). *Project Based Learning, a guide to Standard-focused project based learning for middle and high school teachers*. Oarkland: Buck Institute for Education.
- Roger T. J., David W. J. & Holubec, E. J. (1988). *Cooperation in the Classroom*. Edina, Mn: Interaction Book Company.
- Vidal, A. (2009). Metodologías activas en la asignatura Fundamentos Matemáticos de la IT de Telecomunicaciones. *Actas resumen del 17º Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas, CUIEET*, (pp.1-12). Valencia.
- Vidal, A., Roig, B., Estruch V., & Boigues F.J. (2010). Realización de un proyecto a través de la colaboración entre grupos de trabajo. *Actas resumen del 18 Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas, CUIEET*, (pp. 1-12). Santander.
- Wankat, P. & Oreovicz, F.S. (1993). *Teaching Engineering*. New Cork: McGraw-Hill.