



Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico

António **Borrvalho**

Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora

Portugal

amab@uevora.pt

Elsa **Barbosa**

Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora

Portugal

barbosa.elsa@gmail.com

Resumo

Este estudo pretendeu, com base numa abordagem de investigação qualitativa e interpretativa, compreender o significado da utilização, em sala de aula, de padrões num contexto de tarefas de investigação de forma a melhorar o desenvolvimento do pensamento algébrico. O ponto de partida assentou em duas questões de investigação centradas em: (1) raciocínio algébrico; e (2) comunicação matemática. Os resultados mostraram que a exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação pode contribuir para o entendimento da Álgebra, permite o desenvolvimento do pensamento algébrico e desenvolve a comunicação matemática através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação.

Palavras-chave: Ensino de matemática, tarefas de investigação, raciocínio matemático, Álgebra

Introdução

O desenvolvimento do pensamento algébrico é essencial ao domínio da Álgebra. A transição dos números para um maior grau de abstracção não é trivial, a passagem da Aritmética para a Álgebra é uma das grandes dificuldades dos alunos. (Barbosa e Borrvalho, 2009a; Sinitsky, Ilany e Guberman, 2009). Os professores devem diversificar estratégias permitindo, aos seus alunos, desenvolver o pensamento algébrico e o sentido de símbolo (Arcavi, 2006), é

essencial a escolha de estratégias adequadas que permitam, aos alunos, desenvolver a compreensão da linguagem algébrica.

Os problemas de raciocínio algébrico podem ter múltiplas soluções o que permite, aos alunos, explorar diferentes caminhos de resolução. É aqui que os professores têm um papel fundamental e é a eles que lhes cabe incentivar a explorar diferentes resoluções, ou seja, ajudando-os a desenvolver o pensamento algébrico.

Orton e Orton (1999) afirmam que os padrões são um dos caminhos possíveis quando pensamos em introduzir a Álgebra e, conseqüentemente, desenvolver o pensamento algébrico. Segundo Bishop (1997), quando um aluno relaciona quantidades com padrões está a adquirir conceitos matemáticos muito importantes, como por exemplo, o conceito de função. Está a aprender a investigar e a comunicar algebricamente. A resolução de tarefas de investigação que envolvam padrões salientam, por um lado a exploração, investigação, conjectura e prova, por outro, não menos importante, são interessantes e desafiadoras para os alunos (Vale e Pimentel, 2005) e, finalmente, promovem a comunicação de ideias matemáticas (Barbosa, 2007). Em suma, a abordagem dos padrões permite promover as competências matemáticas dos estudantes na medida em que se interliga com actividades de exploração e de investigação.

Problema e enquadramento do estudo

Pressupõe-se que a procura de padrões e regularidades permite formular generalizações em situações diversas, particularmente em contextos numéricos e geométricos, o que contribuirá para o desenvolvimento do raciocínio algébrico do aluno. Será que a utilização, na sala de aula, de padrões num contexto de tarefas de investigação permite um melhor desenvolvimento do pensamento algébrico por parte dos alunos? O trabalho desenvolvido procurou algumas respostas a este tema, através das seguintes questões mais específicas:

1. Como é que a análise de padrões e regularidades, envolvendo números e operações elementares, contribui para o entendimento da Álgebra?
2. De que modo é que os padrões, num contexto de tarefas de investigação permitem promover a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação?

Actualmente o pensamento algébrico tornou-se, tal como já acontece com o pensamento geométrico, uma orientação transversal do currículo. O desenvolvimento do pensamento algébrico é essencial ao domínio da Álgebra.

Fouche (1997) defende que um aluno algebricamente competente é um “bom” aluno de matemática. No entanto, para muitos alunos a Álgebra ainda é vista como um conjunto de símbolos desgarrados uns dos outros, “uma matéria muito complicada” que só existe “para lhes dificultar a vida” (Barbosa, 2007).

Quem não conseguir entender razoavelmente a linguagem abstracta da Álgebra e não tiver a capacidade de a usar na resolução de diferentes problemas e situações fica fortemente restringido na sua competência matemática (Ponte, 2005). No entanto, actualmente a Álgebra ainda prevalece muito centrada na manipulação simbólica, abordada de forma descontextualizada e muito abstracta (Barbosa, 2007; Canavarro, 2009).

Os problemas de raciocínio algébrico podem ter múltiplas soluções, o que permite aos alunos explorar diferentes caminhos de resolução. É aqui que os professores têm um papel fundamental, é a eles que lhes cabe incentivar a explorar diferentes resoluções, ou seja ajudando-os a desenvolver o pensamento algébrico. Segundo Arcavi (2006) ser professor de Matemática significa seleccionar, implementar e garantir tarefas que maximizem o potencial de aprendizagem dos alunos.

A interacção dos padrões com a Álgebra é um domínio privilegiado e, como já foi referido anteriormente, os padrões podem ser um óptimo veículo para uma abordagem à Álgebra e, conseqüentemente, desenvolver o pensamento algébrico (Orton e Orton, 1999).

O desenvolvimento do pensamento algébrico exige a utilização de práticas de ensino apropriadas, onde os alunos tenham a oportunidade de explorar padrões e relações numéricas generalizando-os, a possibilidade de explicitar as suas ideias e onde possam discutir e reflectir sobre as mesmas, em detrimento da aprendizagem descontextualizada de regras de manipulação simbólica (Barbosa e Borralho, 2009b).

Poder-se-á afirmar que a abordagem dos padrões permite promover as competências matemáticas dos estudantes na medida em que se interliga com actividades de exploração e de investigação.

A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação e o pensamento algébrico

Segundo o NCTM (2007), “a competência algébrica revela-se importante na vida adulta, quer no trabalho, quer como preparação para o ensino superior. Todos os alunos deveriam aprender álgebra” (p.39). São vários os autores que defendem a introdução da Álgebra desde os primeiros anos de escolaridade, conferindo aos alunos o tempo necessário à apropriação dos conceitos algébricos (Hodgen, Küchemann, Brown e Coe, 2009, NCTM, 2007 e Silver, 1997). No entanto, o seu estudo ainda continua associado à manipulação simbólica e à resolução de equações. Apesar disso, é importante referir que a visão da Álgebra tem-se vindo a alterar. Desde a década de 80 do século passado muitas têm sido as discussões sobre que Álgebra se deve ensinar nas escolas básicas e secundárias. Simultaneamente, a essas discussões, surgiu o interesse pela caracterização do pensamento algébrico (Ponte, Branco e Matos, 2009). Segundo Ponte (2006) a melhor forma de explicitar os objectivos do estudo da Álgebra, ao nível escolar, é dizer que se pretende desenvolver o pensamento algébrico dos alunos.

O NCTM (2007) define pensamento algébrico como algo que diz respeito ao estudo de estruturas (compreender padrões, relações e funções), à simbolização (representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos) e à modelação (usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas).

Para Kaput (2008) o pensamento algébrico pode ser dividido em cinco pontos: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintacticamente; (iii) o estudo de estruturas abstractas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos. Para este investigador os cinco pontos referidos dividem-se em dois aspectos fundamentais, o primeiro integra os dois primeiros pontos, que designa como “aspectos nucleares” (*core aspects*) da Álgebra, o segundo corresponde aos restantes três que o autor considera os “ramos” (*strands*) deste domínio. Segundo Arcavi (2006),

“o pensamento algébrico inclui a conceptualização e aplicação de generalidade, variabilidade e estrutura” (p.374). O autor defende ainda que o principal instrumento da Álgebra é o símbolo. Assim, por forma a melhorarmos o desenvolvimento do pensamento algébrico, tem que se desenvolver o sentido do símbolo, uma condição necessária para que tal aconteça é a utilização de práticas de ensino apropriadas onde todo o trabalho seja desenvolvido através de tarefas de natureza investigativa e exploratória, nas quais os alunos tenham a oportunidade de explorar padrões e relações numéricas e a possibilidade de explicitar as suas ideias, bem como a possibilidade de discutir e reflectir sobre as mesmas. A escolha das tarefas a propor e o modo como as articulam assume um cariz de destaque no trabalho do professor. É importante que o professor consiga envolver os alunos em tarefas de carácter exploratório e investigativo, contribuindo para o desenvolvimento das capacidades relacionadas com o pensamento algébrico (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999; NCTM, 2007). Vale e Pimentel (2005) referem que:

a integração deste tipo de actividades no currículo da Matemática escolar é uma das vias para que todos os estudantes descubram conexões entre vários tópicos, desenvolvam a sua capacidade de comunicar matematicamente e aumentem o seu desempenho na resolução de problemas (p.19).

A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação permite desenvolver a capacidade de os alunos, partindo de situações concretas, generalizarem regras, ou seja, ajuda os alunos a pensar algebricamente. Em suma poder-se-á afirmar que a integração de tarefas de investigação com padrões, no currículo da Matemática escolar, assume um papel de destaque na abordagem à Álgebra, e nos primeiros anos de escolaridade, de base ao pensamento “pré-algébrico” (Vale, Palhares, Cabrita e Borralho, 2006).

Proposta pedagógica

O grande desafio do ensino da Álgebra é o desenvolvimento do *sentido do símbolo*. Ganhar este desafio *obriga* a que os símbolos sejam introduzidos de forma contextualizada, num “quadro de actividades que mostrem de forma natural aos alunos o poder matemático da simbolização e da formalização” (Ponte, 2005, p. 40). Os domínios trabalhados foram *Números e Cálculo e Álgebra e Funções* e o tema escolhido *Equações* enquadrados no Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001). As competências matemáticas que se pretenderam desenvolver foram:

- “a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem” (p. 60);
- a predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;
- a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;

- “a aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos” (p. 66);
- “o significado de fórmulas no contexto de situações concretas e a aptidão para usá-las na resolução de problemas” (p. 67).

Deste modo, foram preparadas nove tarefas de investigação, quatro delas preliminares, e duas aulas de exploração de conteúdos. Todas as tarefas foram resolvidas em pequenos grupos, no final de cada tarefa era obrigatório a realização de um relatório. Não houve limite de tempo para a realização das tarefas, cada grupo trabalhava ao seu ritmo. Todas as tarefas foram realizadas em sala de aula, a investigadora recolhia os enunciados, mesmo que os grupos ainda não tivessem realizado o trabalho na íntegra, no final de cada aula. Os relatórios realizados pelos alunos eram todos analisados e comentados.

As aulas de exploração de conteúdos tiveram como objectivo proporcionar e promover “a ponte” entre as tarefas de investigação realizadas e os conteúdos abordados. Acima de tudo, tentou-se sempre manter um bom ambiente de trabalho, descontraído e construtivo, onde os alunos se sentissem à-vontade para colocar qualquer tipo de dúvida ou questão.

É ainda de referir que esta proposta de trabalho foi desenvolvida tendo em conta que, sempre que se justificasse, deveria ser adaptada, reformulada e reorientada.

Metodologia

Atendendo às questões do estudo, foi adoptada uma abordagem de investigação qualitativa e interpretativa, onde uma turma foi a unidade de análise no que diz respeito às tarefas de investigação envolvendo padrões. Bogdan e Biklen (1994) afirmam que, a investigação qualitativa apresenta as cinco características principais que se seguem:

- 1) A situação natural constitui a fonte dos dados, sendo o investigador o instrumento-chave da recolha de dados.
- 2) A sua primeira preocupação é descrever e só secundariamente analisar os dados.
- 3) A questão fundamental é todo o processo, ou seja, o que aconteceu, bem como o produto e o resultado final.
- 4) Os dados são analisados indutivamente, como se reunissem, em conjunto, todas as partes de um puzzle.
- 5) Diz respeito essencialmente ao significado das coisas, ou seja, ao “porquê” e ao “o quê”.

As características atrás referidas mostram-se de acordo com a essência das questões do estudo que foi realizado. Atendendo a que se pretendeu responder a questões de natureza explicativa, que não se desejou exercer qualquer tipo de controlo sobre a situação, que se pretendeu estudar uma turma de 8º ano (13 anos de idade) e dois alunos da mesma, correspondendo a critérios definidos e que se visou obter um produto final de natureza descritiva e analítica, a opção metodológica desta investigação recaiu na realização de um estudo de caso qualitativo e analítico.

O ano de escolaridade escolhido foi o 8º ano pelo facto de ser neste ano que a Álgebra começava a ser verdadeiramente introduzida (formalmente) no currículo dos alunos.

A turma enquanto objecto de investigação trabalhou em pequenos grupos. De entre os alunos da turma foram escolhidos dois alunos, um aluno com pior desempenho e outro com melhor. Os dois alunos escolhidos pertenceram a grupos distintos. O objectivo desta escolha prendeu-se com o facto de se ter pretendido confrontar as posições de alunos com desempenhos distintos.

A recolha dos dados foi feita através de um questionário, duas entrevistas semi-estruturadas, observação directa de aulas e análise de documentos produzidos pelos alunos.

Sofia

A Sofia define-se, sem grande convicção, como uma aluna média. A única disciplina que, em todo o seu percurso escolar, obteve nível de classificação inferior a três (escala de 1 a 5) foi a Matemática.

Não gosta das aulas de Matemática quando são muito expositivas. O tipo de tarefas que mais gosta é as de investigação. Ela considera que este tipo de actividades são um desafio constante que obrigam os alunos a raciocinar e que promove uma maior aprendizagem. A Sofia afirma que *faz bem puxar pelo raciocínio* (E2S)¹.

A contribuição dos padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento alébrico

Durante a realização das primeiras tarefas, a Sofia, foi uma aluna desinteressada e pouco confiante nos seus raciocínios e, inclusive demonstrou dificuldade em perceber a lei de formação dos diferentes padrões. No entanto, ao longo da realização das tarefas a sua evolução foi evidente. Nas últimas tarefas já era ela que avançava com as fórmulas solicitadas nas questões propostas e, facilmente, explicava os seus raciocínios. A realização da tarefa *A Moldura* foi um desses exemplos, onde a Sofia esteve sempre a “puxar” pelo grupo, experimentou diversas estratégias, apresentou algumas conjecturas, procurou a generalização e explicitou os seus raciocínios aos colegas de grupo e à professora.

A Moldura²

A Moldarte faz molduras em espelhos rectangulares formadas por azulejos quadrados, como mostra a figura.



1. Quantos azulejos são necessários para fazer o espelho representado na figura anterior?
2. Desenha espelhos de várias dimensões. Explica por palavras recorrendo a números, a tabelas, etc., o número de azulejos que são necessários para colocar à volta de um espelho com quaisquer dimensões.

Figura 1. Tarefa A Moldura

¹ (E2S) significa que os dados foram retirados da 2ª entrevista da Sofia.

² Adaptado de Vale e Pimentel, 2005

O relatório escrito no final da realização da tarefa mostra a forma como todo o trabalho se desenvolveu:

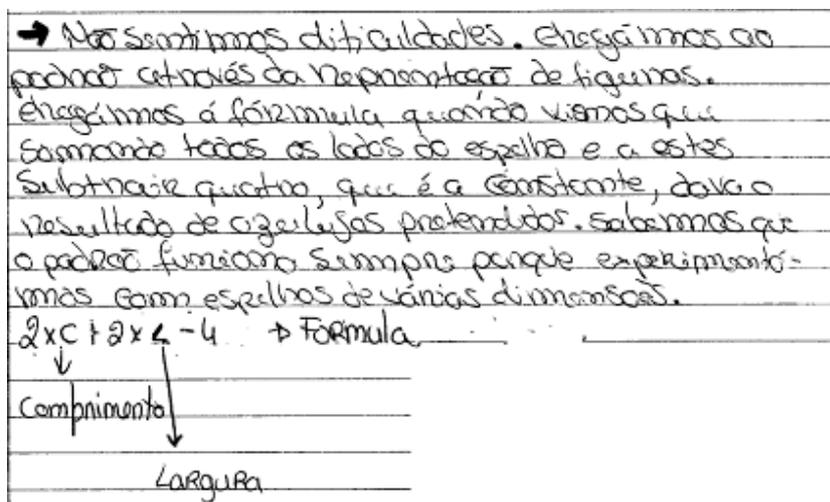


Figura 2. Extracto do relatório da tarefa A Moldura

Assim, é possível afirmar que, o grupo em geral e a Sofia em particular, conseguiram: (i) identificar e generalizar relações; (ii) representá-las simbolicamente; (iii) compreender que as relações simbólicas representam informações dadas ou desejadas; e (iv) perceber a importância da verificação dos resultados.

Nas aulas de Álgebra revelou facilidade na aquisição de conteúdos como monómios e polinómios (coeficiente, parte literal e grau) e operações com polinómios (adição algébrica e multiplicação). Contudo, ainda mostrou alguma dificuldade na simplificação de expressões algébricas.

A sua evolução foi evidente e no fim do estudo a Sofia conseguiu: (i) simplificar fórmulas; (ii) distinguir monómio de polinómio; (iii) identificar expressões equivalentes; e (iv) ter algum sentido do símbolo. Este último aspecto é evidenciado no excerto de entrevista que se apresenta:

Invest: Como é que sabemos que esta igualdade é verdadeira $2 \times C + 2 \times L - 4 = (C + C + L + L) - 4$? Posso dizer que esta igualdade é verdadeira ou não?

Sofia: Sim.

Invest: Porquê?

Sofia: Porque juntamos na mesma duas vezes o comprimento e duas vezes a largura. São só duas maneiras diferentes de representar a mesma fórmula.

Invest: Na fórmula a que chegaram, ou seja, na vossa generalização, consegues dar exemplos de monómios e de polinómios?

[...]

Sofia: O $2C$.

[...]

Invest: [...] Então e um exemplo de um polinómio?

Sofia: [silêncio]

Invest: Retirado dessa expressão.

Sofia: $2C + 2L$.

Invest: *Muito bem. Podemos adicionar variáveis com significados diferentes?*

Sofia: *Não.*

Invest: *Porquê? Podíamos adicionar o 2C com o 2L?*

[...]

Sofia: *Porque significam coisas diferentes.*

Invest: *Simplifica esta expressão: $(2 \times n) + (n - 2)$. Enquanto simplificas fala comigo.*

[...]

Sofia: $3n - 2$. (E2S)³

José

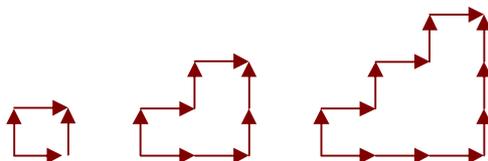
O José confia no seu trabalho e define-se como um aluno médio pois, segundo ele, só os alunos que obtêm nível cinco (escala de 1 a 5) de classificação é que são bons.

Na aula é muito participativo pois, como ele próprio afirma, gosta de expressar a sua opinião. Gosta de tudo nas aulas de Matemática: *gosto de [aprender] coisas novas sobre a matemática, [quanto ao] que gosto menos [...], acho que [...]* [posso afirmar que não há] *nada* [que não goste] (E1J)⁴. O tipo de tarefas que mais gosta são as de investigação pois, para ele, este tipo de tarefas são as que permitem *aprender mais de uma determinada matéria*. (E1J)⁴

A contribuição dos padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico

Desde o início que o grupo do José mostrou facilidade em perceber a lei de formação de cada um dos padrões apresentados mas só após muito esforço é que conseguiram descobrir a generalização. No entanto, é de salientar as capacidades de argumentar sobre ideias algébricas, como o raciocínio dedutivo e indutivo, a representação, a igualdade e a variável.

As escadas⁵



1. Desenha a escada seguinte e descobre o número de setas usadas em cada escada.
2. Explica como é que se pode obter o número de setas necessárias para fazer uma escada com 30 degraus.
3. Será que consegues prever o número de setas necessárias para fazer uma escada com **n** degraus?

Figura 3. Tarefa As escadas

Um bom exemplo disso é o relatório da tarefa *As escadas*, por ele apresentado:

³ (E2S) significa que os dados foram retirados da 2ª entrevista da Sofia.

⁴ (E1J) significa que os dados foram retirados da 1ª entrevista do José.

⁵ Adaptado de Vale e Pimentel, 2005

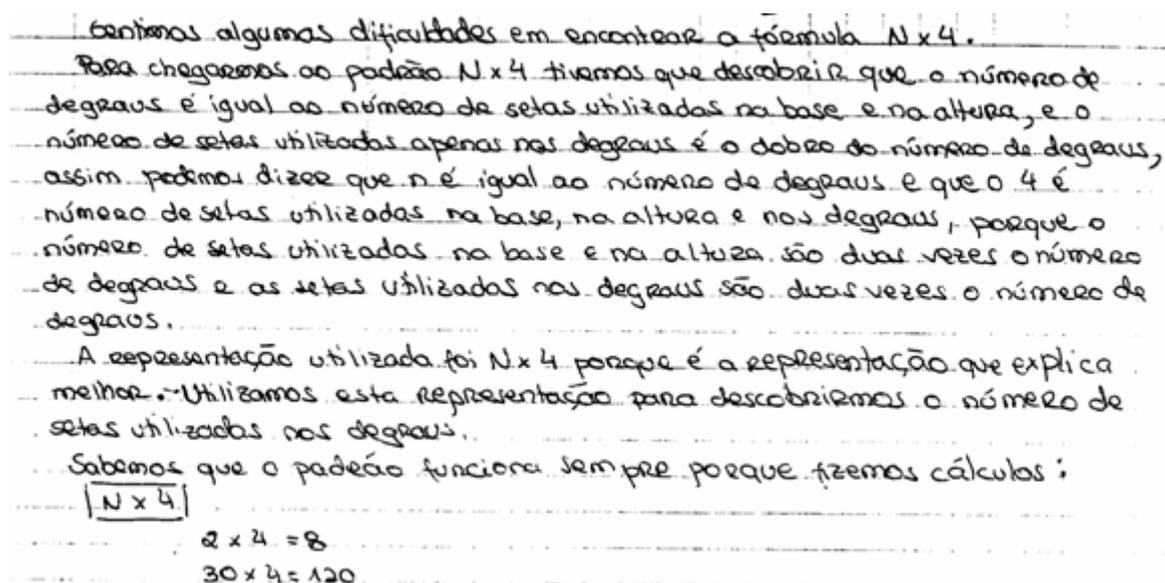


Figura 4. Extracto do relatório da tarefa *As escadas*

A análise deste relatório permite afirmar que este aluno conseguiu: (i) identificar e generalizar relações; (ii) representar simbolicamente; (iii) transformar expressões noutras equivalentes; e (iv) compreender que as relações simbólicas representam informações dadas ou desejadas.

O José conseguiu perceber com facilidade a lei de formação dos padrões mas, segundo ele, teve alguma dificuldade em descobrir o n ésimo termo. Apesar disso, mostrou facilidade em entender e manipular as fórmulas encontradas:

Invest: *Tens dificuldades quando trabalhas com fórmulas matemáticas? Entendes o que elas significam quando estás a resolver uma tarefa?*

José: *Sim, tive algumas dificuldades em encontrar [a fórmula] mas depois consigo percebe-la.*

[...]

Invest: *Para que serve o n ésimo termo? Qual é o seu significado?*

José: [...]*Aquela forma que estão a pedir serve para qualquer um, por exemplo num espelho pode servir para qualquer espelho.*

Invest: *“Num espelho pode servir para qualquer espelho” O que queres dizer? Nessa tarefa o que te era pedido?*

José: *Por exemplo, o número de azulejos em redor.*

Invest: *Portanto, permite-te prever? É isso? Corrige-me se estou enganada. Permite-te prever o número de azulejos para um espelho de qualquer tamanho?*

José: *Sim.* (E2J)⁶

Nas aulas de Álgebra, o José foi um dos alunos mais empenhado e participativo. Durante as aulas evidenciou: (i) ter adquirido o sentido do símbolo; (ii) dominar o conceito de monómio e polinómio (coeficiente, parte literal e grau); (iii) saber operar com polinómios; (iv) ter aprendido

⁶ (E2J) significa que os dados foram retirados da 2ª entrevista do José.

a simplificar expressões algébricas; (v) ter adquirido o conceito de expressões equivalentes. Sobre este último aspecto o excerto de entrevista que se apresenta é bastante esclarecedor:

Invest: *Olha para esta igualdade: $2 \times C + 2 \times L - 4 = (C+C+L+L) - 4$. O que significa? Como é que sabemos que esta igualdade é verdadeira?*

José: *Então, os menos quatro equivalem aos quatro azulejos comuns em todos os espelhos, e está duas vezes C e noutra lado está C+C porque pode se substituir o C+C por $2 \times C$ ou dois C e a mesma coisa para a largura o L, que L+L substitui-se por $2 \times L$, duas vez a largura.*

[...]

Invest: *Na generalização que vocês encontraram na última tarefa, consegues dar-me exemplos de monómios? E de polinómios?*

José: *Sim.*

Invest: *Então diz-me lá um monómio.*

José: *A.*

Invest: *E um polinómio?*

José: *A + A + C + C.*

[...]

Invest: *[...] Podemos adicionar variáveis com significados diferentes?*

José: *Não.*

Invest: *Porquê?*

[...]

José: *Porque como têm significados diferentes não se podem adicionar, nem subtrair também. (E2J)⁶*

Conclusão

O presente estudo serviu para mostrar que existe um caminho alternativo para introduzir a Álgebra. A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação pode contribuir para o entendimento da Álgebra, permite o estabelecimento de conexões matemáticas, desenvolve a comunicação matemática através do uso de uma linguagem (escrita e oral) não ambígua e adequada à situação e melhora a imagem da Matemática.

A realização de tarefas de investigação, onde os alunos puderam explorar padrões numéricos e pictóricos, possibilitou o desenvolvimento do pensamento algébrico ao propiciar que utilizassem diferentes representações, identificassem e generalizassem relações, analisassem os seus significados e tomassem consciência da importância da verificação de dados, ou seja, de acordo com Guimarães *et. al.* (2006) e Ponte (2006) os alunos estiveram a aprender Álgebra pois, segundo estes autores, estas são algumas das principais características da Álgebra.

Em suma, à semelhança dos resultados obtidos no estudo de Orton e Orton (1999), é possível concluir que o estudo da Álgebra pode ser iniciado através da exploração e generalização de padrões. No entanto, tal como os autores afirmam, não se pode deixar de alertar para o facto de este ser apenas um dos possíveis caminhos a ter em conta aquando da introdução da Álgebra. Além disso, é necessário mudar práticas de ensino, deixar para trás um ensino “tradicionalista” que promove a rotina e, conseqüentemente, a aprendizagem “isolada” de conteúdos, para passarmos a ter práticas de ensino que desenvolvam aprendizagens significativas por parte dos alunos. Tal como referem Nunes e Ponte (2010), neste contexto é ainda de salientar a importância que assume a forma como se abordam as tarefas em sala de aula. Torna-se fundamental preparar antecipadamente os diferentes conteúdos a abordar, definindo materiais a utilizar, estratégias que ajudem os alunos a ultrapassar possíveis dificuldades, conexões a fazer e

discussões a fazer com a turma. De igual importância é também a forma como se organiza a sala de aula, o que irá influenciar o trabalho dos alunos e a sua interação com os outros.

Limitações do estudo e algumas recomendações

Uma limitação que se poderá apontar é o tempo de permanência no terreno para a recolha de dados. Esta investigação teria beneficiado com o alargamento dos conteúdos explorados. Para que tal pudesse ocorrer seria necessário, em primeiro lugar, a exploração de um maior número de tarefas e, em segundo, que estas fossem mais diversificadas. No entanto tal alargamento obrigaria a aumento de aulas observadas, o que já não era possível acontecer.

Com este estudo pretendeu-se compreender de que forma é que os padrões num contexto de tarefas de investigação podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Os resultados obtidos, embora positivos, podem estar associados a aspectos particulares do trabalho realizado. Contudo, fizeram emergir novas questões a serem investigadas, como por exemplo: Os padrões num contexto de tarefas de investigação podem contribuir para o entendimento de outros domínios matemáticos, sem ser o domínio da Álgebra? Quais as vantagens e limitações da exploração de padrões aparecer como um dos conteúdos dos programas do terceiro ciclo do ensino básico? Que outras estratégias poderão ser utilizadas por forma a melhorar o entendimento da Álgebra?

Referências bibliográficas

- Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarró (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.
- Barbosa, E. (2007). *A Exploração de Padrões num Contexto de Tarefas de Investigação com Alunos do 8º ano de Escolaridade*. Lisboa: APM.
- Barbosa, E. e Borralho, A. (2009a). Exploring Patterns and Algebraic Thinking. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. e Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 344. Thessaloniki, Greece: PME.
- Barbosa, E. e Borralho, A. (2009b) Exploração de Padrões e Pensamento Algébrico. Em I. Vale e A. Barbosa (Org.), *Padrões: Múltiplas Perspectivas e contextos em Educação Matemática*. (pp. 59-68). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.
- Bishop, J. W. (1997). *Middle School students' Understanding of Mathematical Patterns and Their Symbolic Representations*. Chicago: Annual Meeting of the American Educational Research Association.
- Canavarró, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante* 16(2), 81-118.
- Fouche, K. (1997). Algebra for Everyone: Start Early. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2(4), 226-229.

- Guimarães, F. Arcavi, A. Gómez, B. Ponte, J. P. e Silva, J. N. (2006). O ensino aprendizagem dos Números e da Álgebra: Que problemas, que desafios? Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 361-379). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Kaput, J.J. (2008). What is álgebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carreher em. L. Blanton (Eds.), *Algebra de early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.
- ME-DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM
- Nunes, C. C. e Ponte, J. P. (2010). O professor e o desenvolvimento curricular: Que desafios? Que mudanças? Em Grupo de Trabalho de Investigação – GTI (Org.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp.61-88). Lisboa: APM.
- Hodgen, J., Küchemann, D., Brown, M. e Coe, R. (2009). School Students' Understanding of Algebra 30 years on. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. e Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 177-184. Thessaloniki, Greece: PME.
- Orton, A. e Orton, J. (1999). Pattern and Approach to Algebra. Em A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-124). Londres. Cassel.
- Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática*, 85, 36-42.
- Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Ponte, J. P., Branco, N., e Matos, A.(2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.
- Silver, E. A. (1997). “Algebra for All” – Increasing Students’ Access to Algebraic Ideias, Not Just Algebra Courses. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2(4), 204-207.
- Sinitsky, I., Ilany, B. e Guberman, R. (2009). From Arithmetic To Informal Algebraic Thinking Of Pre-Service Elementary School Mathematics Teachers. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. e Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5, (pp. 129-136). Thessaloniki, Greece: PME.
- Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., e Borralho, A. (2006). Os padrões no Ensino-Aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 193-212). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Vale, I., Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática*, 85, 14-22.