



A Operação Potenciação e os Números Inteiros Negativos

Ana Maria **Paias**

PUC-SP

Brasil

anamariapaias@yahoo.com.br

Resumo

Este artigo é um estudo da Operação Potenciação em relação aos Números Inteiros Negativos e se baseia na dissertação do curso de Mestrado Acadêmico da PUC/SP, intitulada “Diagnóstico dos Erros sobre a Operação Potenciação aplicado a Alunos dos Ensinos Fundamental e Médio”. A análise levou em consideração a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1999), os estudos sobre o erro de Cury (2007) e a noção de obstáculos de Brousseau (1983). Apresentamos uma análise quantitativa e qualitativa das respostas apresentadas pelos alunos assinalando os erros no que se refere a Números Inteiros Negativos como expoente e como base. O resultado das respostas dos alunos indicou que, grande parte dos alunos, não domina a concepção da operação potenciação, decorrendo disso que muitos alunos entendem a operação potenciação como multiplicação entre base e expoente.

Palavras-chave: potenciação, erro, obstáculos, números inteiros negativos.

Introdução

Este trabalho está baseado em um estudo realizado sobre a Operação Potenciação. A pesquisa é intitulada “Diagnóstico dos erros sobre a Operação Potenciação aplicado a alunos dos Ensinos Fundamental e Médio”, trabalho final de Mestrado Acadêmico pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

A pesquisa foi realizada com 30 alunos da oitava série do Ensino fundamental e 30 alunos da primeira série do Ensino Médio de uma escola estadual de São Paulo.

O instrumento aplicado constituiu-se de questões que envolviam diferentes tipos de representação da operação potenciação. Levou em conta também todas as situações em relação a possíveis casos de potenciação.

Entendemos que a análise das soluções apresentadas pelos alunos na resolução de uma questão pode mostrar se o aluno se apropriou do conhecimento sobre um determinado objeto matemático ou não. A análise dos erros nas respostas é importante, pois para o aluno serve como construção do conhecimento e para o professor como instrumento de processos cognitivos. (Cury,1995).

Desenvolvimento

Neste estudo focamos apenas questões com a operação potenciação envolvendo Números Inteiros Negativos tanto como expoente como base. Apresentamos as análises das respostas relacionadas a estas questões e indicaremos possíveis causas para estes erros.

Consideramos que detectar o erro e interpretá-lo é uma tarefa difícil, mas é a oportunidade que o professor tem em mostrar o seu interesse pela aprendizagem do aluno.

A nosso ver o erro faz parte do processo ensino-aprendizagem e pode ser trabalhado de maneira construtiva do conhecimento. Essas produções escritas do aluno e seus erros servem como pontos de partida para uma compreensão deste processo de ensino e aprendizagem

Para Almouloud que se apóia nos trabalhos de Guy Brousseau:

O erro seria a expressão ou manifestação explícita de um conjunto de concepções espontâneas ou reconstruídas integradas numa rede coerente de representações cognitivas, que se torna um obstáculo à aquisição e dominação de um conceito. A superação seria o projeto de ensino e o erro a passagem operatória. (1997, pág.38).

Atualmente o erro é visto não apenas como uma possível falha na aprendizagem, mas serve como fundamentação a metodologias e identificação de problemas de currículo.

Conforme Cury (1995, p. 9):

Se estivermos interessados no processo de aprendizagem da Matemática o erro pode ser visto como instrumento de identificação dos problemas do currículo e da metodologia, e, ao resolvê-los, os erros serão eliminados; se, no entanto, queremos explorar o erro, esse pode constituir-se em instrumento para a compreensão dos processos cognitivos.

Sabemos que a partir da análise dos erros que os alunos cometem, podemos elucidar algumas questões fundamentais no processo de ensino e aprendizagem matemática ligados à potenciação e no possível foco a identificação de obstáculos.

A análise das respostas dos alunos fundamentou-se na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1999). Consideramos os tipos de tarefas que estão propostas, assim como as técnicas, ou seja, os métodos de resolução, tecnologias e teorias relacionados a problemas ou cálculos com a operação potenciação.

Em nosso trabalho, designamos como *discurso tecnológico-teórico* a integração entre tecnologia e teoria.

Segundo Chevallard:

Ao redor de um tipo de tarefa $\mathbf{T}$, se encontra em princípio, um trio formado por uma técnica (uma pelo menos), τ , por uma tecnologia, θ e por uma teoria, Θ . No total indicado por $[\mathbf{T}, \tau, \theta, \Theta]$, constituindo uma praxeologia pontual, onde este último qualificativo significa que se trata de uma praxeologia relativa a um único tipo de tarefa, $\mathbf{T}$. Tal praxeologia ou organização praxeológica está constituída por um bloco prático-técnico $[\mathbf{T} / \tau]$ e por um bloco tecnológico $[\theta / \Theta]$. (CHEVALLARD, 1999, p. 6).

Sabemos que a aprendizagem da matemática está ligada à compreensão do conceito e a apreensão do significado de um objeto matemático. No processo de aprendizagem admitem-se rupturas cognitivas, assimilação e acomodação de conceitos e é interessante que se formem idéias transitórias apesar de algumas idéias resistirem mesmo quando há tentativas de superação. Temos então a imagem de obstáculo.

Conforme D'Amore (2007):

Obstáculo é uma idéia que, no momento da formação de conceitos, foi eficaz para enfrentar os problemas anteriores, mas que se revela um fracasso quando se tenta aplicá-lo a um novo problema. Dado o êxito obtido tende-se a conservar a idéia já adquirida e comprovada e, apesar do fracasso, busca-se salvá-la; mas esse fato acaba sendo uma barreira para aprendizagens sucessivas.

Almouloud (2007) relata o valor da noção de obstáculo como importantíssimo por se tratar de um saber em constituição no aluno e que necessariamente passa por conhecimentos provisórios. Ressalta também a utilidade da noção de obstáculos, segundo Brousseau, na construção de engenharias didáticas. Relevante também o uso da noção de obstáculos na análise histórica de um conhecimento e também no desenvolvimento do aluno quando cada conhecimento pode tornar-se um obstáculo a uma aquisição de um novo conhecimento. A institucionalização local é considerada válida em conhecimentos que ainda vão ser transformados e essa verificação gera questionamentos como: todas as concepções seriam obstáculos a aquisições futuras. Segundo o autor: “A noção de obstáculo é importantíssima porque se trata de um saber em constituição no aluno e que a constituição desse conhecimento passa pelos conhecimentos provisórios”.

Os obstáculos se manifestam com o objetivo de compreender certos problemas ou resolvê-los com eficácia. Segundo Brousseau um obstáculo não deve ser considerado uma falta de conhecimento, e sim como um conhecimento que produz respostas adaptadas num certo contexto, produzindo respostas falsas fora desse contexto.

Destacaremos em nosso trabalho o estudo relativo aos obstáculos de origem epistemológicos e didáticos. Para tanto faremos um estudo mais profundo e detalhado, pois acreditamos que assim delinearemos a nossa pergunta de pesquisa acerca da operação potenciação de uma forma mais adequada.

O obstáculo epistemológico não pode somente ser compreendido como o erro que o aluno comete, ou como uma falha do aluno que tem dificuldade de aprendizagem. Estes obstáculos são relevantes neste momento, pois é necessário que aconteça uma ruptura entre o conhecimento

comum e o conhecimento científico. O aluno vai aprender quando mudar a sua razão e substituir o saber fechado por um conhecimento dinâmico. (Lopes, 1993).

Barrantes (2006) relata a dificuldade que temos ao tratar de obstáculos epistemológicos. Para ele, segundo Brousseau, um obstáculo epistemológico se manifesta por erros que não são devidos ao acaso. Estes erros reaparecem, são reconhecíveis, são previsíveis, e que persistem ao longo do tempo. Estes obstáculos não são necessariamente explícitos. Seria correto facilitar o conhecimento que o torna um impedimento do saber e dizer no qual o domínio é válido, mas não se trata de eliminar obstáculos.

Almouloud (2007), com base nos trabalhos de Durox e Brousseau aponta que um obstáculo não pode ser considerado apenas uma dificuldade do aluno e para precisar quando um conhecimento pode ser declarado como um obstáculo, e que para isso estabeleceram os seguintes critérios: um obstáculo é um conhecimento, tem um domínio de validade, é resistente, reaparece e é característico do saber.

Além de obstáculos epistemológicos acreditamos em obstáculos didáticos que estão ligados diretamente ao processo de ensino. Entendemos que seja comum dentro do processo ensino aprendizagem de matemática a existência de obstáculos didáticos.

Brousseau (1983, p.176) apud Almouloud, (2007, p.141) destaca que obstáculos de origem didática são aqueles que parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo. Estas situações são provocadas por uma transposição didática onde o professor não consegue negociar novamente no ambiente de sala de aula. São aqueles que se originam no momento da escolha de estratégias deixando-se formar no momento da aprendizagem, com conhecimentos errôneos ou incompletos que mais tarde servirão de obstáculos à formação de conceitos.

Conforme Almouloud (2007 p.142):

Os obstáculos desse tipo são, em sua grande parte, inevitáveis e inerentes a necessidade da transposição didática, embora seu reconhecimento permita ao professor rever a introdução escolhida para um determinado conceito para explicitar um determinado conceito para explicitar a dificuldade vivida pelo aluno.

Almouloud (2007) relata que os obstáculos desse tipo são ligados a Transposição Didática e permite ao professor rever suas escolhas na apresentação um conceito. O autor cita entre outros, exemplos de obstáculos didáticos como: concepções que os alunos têm ao trabalhar com números decimais, a idéia de que uma fração é sempre uma parte da unidade, o quadrado não é um losango e a apresentação do conjunto dos números inteiros como uma escala, dificultando a operação multiplicação e o uso correto das regras de sinal quando se trata destes números.

Schubring (2007) afirma que:

A história dos números negativos é extremamente rica em apresentar exemplos significativos que mostram que a história da matemática não é como a concebeu Gaston Bachelar, “uma maravilha de regularidade”, de

continuidade no seu desenvolvimento, mas sim de desvios, de regressos, obstáculos, de diversidade conceitual em comunidades matemáticas.

Vamos considerar alguns itens extraídos do instrumento diagnóstico da pesquisa. As respostas foram analisadas segundo a justificativa do aluno. Embora tenhamos analisado todos os itens para a oitava série do Ensino Fundamental e primeira série do Ensino Médio, neste estudo apresentamos para cada item as respostas e análise de apenas uma das séries.

1) $(-6)^2 =$

Tabela1

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
36	15	1 aluno usou a regra de sinal
		5 alunos utilizaram a definição
		9 alunos utilizaram a definição e a regra de sinal
-36	12	2 alunos efetuaram a operação multiplicação $-6 \cdot 6$
		1 aluno afirmou que sempre que a base é negativa, o resultado é negativo
		7 alunos aplicaram a definição, mas erram a regra de sinal
		2 alunos referiram-se ao uso dos parênteses, mas erraram a resposta
12	1	1 aluno efetuou $6 \cdot 2$ e não considerou o sinal
-12	2	os alunos efetuaram o produto $6 \cdot 2$ e afirmam que o resultado é negativo, porque a base era negativa e o expoente, positivo
Branco	0	

2) $-6^2 =$

Tabela 2

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
-36	10	2 alunos referiram-se ao fato da potência não ter os parênteses e ficar negativa
		8 alunos efetuaram a multiplicação $-6 \cdot 6$
36	17	2 alunos usaram a regra de sinal
		11 alunos utilizaram a definição
		4 alunos utilizaram a definição e a regra de sinal
-12	2	Os alunos efetuaram a multiplicação $-6 \cdot 2$
-42	1	O aluno efetuou a multiplicação $-6 \cdot 6$, mas errou o produto
Branco	0	

3) $(-2)^3 =$

Tabela 3

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
-8	15	8 alunos utilizaram a definição de potenciação: $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
		4 alunos aplicaram a definição e afirmaram que base negativa e expoente ímpar têm resultado negativo
		1 aluno aplicou a definição
		1 aluno afirmou que a resposta era negativa porque a base era positiva e o expoente negativo
		1 aluno referiu-se sobre uso dos parênteses
8	8	6 alunos efetuaram o produto $2 \cdot 2 \cdot 2$
		1 aluno afirmou que quando a base era negativa o resultado era positivo
		1 aluno afirmou que quando se multiplicam números negativos obtém-se um número positivo

-6	2	os alunos efetuaram -2.3
6	3	o alunos efetuaram o produto 2.3
-12	1	o aluno afirmou que 2 elevado a 3 é 12 e negativo pela base ser negativa
Branco	1	

4) $-2^3 =$

Tabela 4

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
-8	18	5 alunos utilizaram a definição
		1 aluno afirmou que a resposta é - 8 porque está elevado a 3
		6 alunos utilizaram a definição e a regra de sinais
		2 alunos referiram-se ao uso dos parênteses
		1 aluno justificou a resposta por ser base negativa e expoente positivo
		2 alunos afirmaram que o resultado era negativo, porque sempre que a base era negativa o resultado era negativo
		1 aluno não justificou a resposta
8	5	1 aluno efetuou $2.2.2$
		4 alunos afirmaram que multiplicando números negativos obtém-se um número positivo
6	2	os alunos efetuaram 2.3
4	1	o aluno efetuou 2.2
-6	3	os alunos efetuaram o produto $-2 . 3$
-12	1	o aluno justificou o sinal por ser base negativa e errou o produto
Branco	0	

5) $4^{-2} =$

Tabela 5

8ª série do Ensino Fundamental

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
-16	12	9 alunos efetuaram o produto $-4 \cdot 4 = -16$
		2 alunos afirmaram que quando o expoente era negativo, a resposta era negativa
		1 aluno não justificou
16	10	4 alunos efetuaram $4 \cdot 4$
		4 alunos efetuaram $(-4) \cdot (-4)$
		2 alunos aplicaram propriedade de potência incorretamente: $4^{-2} \cdot 4^{-2} = 4^{+4} = 16$
8	2	1 aluno fez o produto $(-4) \cdot (-4) = 8$
		1 aluno não justificou
-8	1	o aluno não justificou
-2	1	o aluno não justificou
Branco	2	

6) $(-5)^{-3} =$

Tabela 6

1ª série do Ensino Médio

Respostas apresentadas	Número de respostas	Justificativa
-125	10	2 alunos aplicaram a definição incorretamente ignorando o sinal do expoente $(-5).(-5).(-5)$
		4 alunos utilizaram a definição e justificaram a regra de sinal base negativa e expoente ímpar, resposta negativa
		2 alunos afirmaram que o resultado vai ser sempre negativo, porque o expoente era negativo
		2 alunos justificaram o sinal porque a base e o expoente são negativos
125	12	3 alunos aplicaram a definição incorretamente ignorando o sinal do expoente $(-5).(-5).(-5)=+125$
		7 alunos justificaram o sinal da resposta fazendo regra de sinal entre base e expoente
		2 alunos não justificaram a resposta
-5	1	O aluno não justificou a resposta
625	1	O aluno efetuou 5.5 e 25.25
15	2	Os alunos efetuaram 5.3 e justificam o sinal positivo, fazendo regra de sinais entre a base e o expoente
-75	1	O aluno efetuou a definição incorretamente e errou no produto
-10	1	O aluno não justificou
$(-5)^{-27}$	1	O aluno fez $(-3)^3 = -27$ para justificar o expoente
Branco	1	

Paías (2009) elabora em seu trabalho categorias de erros relacionadas com a operação potenciação. Apresentamos neste estudo apenas categorias em que Números Inteiros Negativos aparecem como base ou expoente. Dentre estas categorias relacionaremos duas: erros relacionados à técnica de regra de sinal e erros relacionado a expoentes negativos. Exemplificaremos com alguns protocolos em que apresentamos os erros apresentados e a justificativa feita pelo aluno.

- O aluno afirma que o produto de 2 números negativos tem como resultado um número negativo.

$(-6)^2 = -36$	PORQUE $(-6) \cdot 6 = -36$
----------------	-----------------------------

Figura 1: Aluno da 1ª. Série Ensino Médio

- O aluno aplica a regra do sinal entre o sinal da base e o sinal do expoente.

$(-2)^3 = -8$	PORQUE UM É POSITIVO E O OUTRO NEGATIVO
---------------	--

Figura 2: Aluno da 1ª. Série Ensino Médio

- O aluno afirma que o resultado é negativo porque o número é negativo (base).

$(-6)^2 = (-36)$	porque 6×6 é 36 e o número está com o sinal de negativo.
------------------	---

Figura 3: Aluno da 1ª. Série Ensino Médio

- O aluno afirma que quando se multiplicam números negativos, o resultado é positivo.

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +8$	O resultado deu +8 porque menos com menos com menos é menos e $2 \cdot 2 \cdot 2$ é igual a 8.
--	--

Figura 4: Aluno da 8a. Série Ensino Fundamental

- O aluno afirma que se o expoente é negativo, o resultado também será negativo.

$4^{-2} = 4 \cdot 4 = -16$	Expoente negativo, resultado negativo.
----------------------------	---

Figura 5: Aluno da 8a. Série Ensino Fundamental

Considerações finais

Observamos no estudo que o número de erros relativos a questões que envolvem a Operação Potenciação e Números Inteiros Negativos é muito significativo.

O aluno erra, pois não considera a definição e as regras de sinais, poucos se lembram ou afirmam regras que são sistematizadas, criando uma grande confusão em suas justificativas.

Os aspectos que consideramos muito fortes nos casos de erros, são os de expoentes inteiros negativos. Neste caso, o total de erros foi 100%, acreditamos ser uma importante matéria para um estudo futuro.

Referências Bibliográficas

- Almouloud, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Primeira edição Curitiba: UFPR, 2007. 217 p.
- Barrantes, H. *Los obstáculos epistemológicos*. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Ano 1. N.2. Costa rica. 2006.
- Chevallard, Y. (1999) *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, n. 2, p. 221–266. Tradução em espanhol de ricardo barroso campos.
<<http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a1005.pdf> (acesso em 25/04/2008).
- Cury, h. N. *Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática*. Zetetiké, v.3, n.4, p. 39–50, nov. 1995.
- Cury, H. N. *Análise de erros – o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. São Paulo. Ed. Autêntica. 2007.
- D' Amore, B. *Elementos de didática da matemática*. São Paulo. Ed. Livraria da física. 2007.
- Lopes, A.R.C. *Contribuições de Gastón Bachelard ao ensino de ciências*. Enseñanza de las ciencias, 11(3), 324–330, 1993.
- Paias, A. M. *Diagnóstico dos erros sobre a operação potenciação aplicado a alunos dos ensinos fundamental e médio*, dissertação de mestrado. Pucsp. 2009.
- Shubring, G. *Um outro caso de obstáculos epistemológicos: o princípio de permanência* Bolema, Rio Claro (sp), ano 20, nº 28, 2007, pp. 1 a 20