



Geometria dinâmica: um caminho para o estudo de Geometria Espacial

Jesus Victoria Flores **Salazar**

Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
Brasil

flores@ccet.ufrn.br

Talita Carvalho Silva de **Almeida**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Brasil

talita_almeida@yahoo.com.br

Resumo

Apresentamos um recorte da tese de doutorado de Salazar (2009). Analisamos nesta comunicação, uma atividade realizada por um estudante de segundo ano de Ensino Médio no Estado de São Paulo. Objetivamos observar suas ações e seus possíveis esquemas de utilização quando realiza uma atividade que envolve noções de Transformações Geométricas no Espaço utilizando *Cabri 3D*. Para tal, nos baseamos na abordagem Instrumental de Rabardel (1995), e utilizamos aspectos de Engenharia Didática de Artigue (1995) como metodologia de pesquisa. Percebemos que o estudante estabeleceu relações entre as ferramentas e/ou recursos do *Cabri 3D* e seus conhecimentos matemáticos. Fato que nos dá subsídios para afirmar que aconteceu o processo de Gênese Instrumental.

Palavras chave: *Cabri 3D*, abordagem instrumental, transformações geométricas no espaço, esquemas de utilização, Gênese Instrumental.

Introdução

Pesquisas em Educação Matemática mostram que o ensino de conteúdos matemáticos e, em especial, os relacionados à Geometria, tanto plana quanto espacial, não têm oferecido subsídios suficientes aos estudantes para que superem suas dificuldades para fazer conjecturas.

Por outro lado, nos resultados do Exame Nacional do Ensino Médio¹ (ENEM), foram observadas dificuldades dos estudantes, tais como: domínio da linguagem científica e identificação dos pressupostos que estruturam o domínio conceitual da Matemática, para interpretar formas geométricas presentes na natureza, dentre outros aspectos (INEP², 2006).

Além disso, segundo as informações do INEP, no ENC-Provão³ (1998-2001), as questões de Geometria Espacial apresentaram um baixo índice de respostas e de acertos (quadro 1), o que mostra a necessidade de maior empenho no trabalho com a área.

Quadro 1

Porcentagem de acertos no Exame Nacional de Cursos. Fonte: ENC - Provão (1998-2001)

Ano	Questão	Tema	% de acerto
1998	16	Pirâmide, visualização de elementos.	8
1999	26	Cubo, pirâmide regular inscrita, aresta lateral.	7
2000	14	Secção de um cubo.	3
2001	02	Blocos lógicos, figuras planas e espaciais.	7

Também, investigações como as de Parzysz (1988; 1991), Cavalca (1997), Kaleff (2003), Flores (2002; 2007), Salazar (2009) e Almeida (2010), bem como as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática PCN (1998) do Brasil, assinalam a necessidade de estudos que evidenciem como se desenvolve o processo de aprendizagem de Geometria Espacial.

Portanto, pensamos que o ambiente de Geometria dinâmica *Cabri 3D* apresenta-se como uma alternativa para o ensino e a aprendizagem desta área da Matemática, uma vez que permite construir, manipular e explorar figuras espaciais, além de conjecturar e verificar propriedades.

Apresentamos nessa comunicação, uma reflexão sobre as estratégias do estudante Carlos que ao mobilizar conhecimentos de geometria plana, realiza uma atividade utilizando transformações geométricas no espaço com ajuda do *Cabri 3D*. As ações do estudante são observadas por meio da Abordagem Instrumental de Rabardel (1995), visto que nos permite analisar a interação do estudante com esse ambiente computacional.

¹ As informações aqui apresentados constam nos relatórios de divulgação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), os que contêm informações sobre as provas realizadas desde 1998 a 2002. Nesse exame, as questões são distribuídas em termos de cinco competências e 21 habilidades a serem avaliadas.

² Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

³ Exame Nacional de Cursos (ENC-Provão) foi um exame aplicado aos formandos, no período de 1996 a 2003, no que tange aos resultados do processo de ensino e aprendizagem em diversas áreas - fonte INEP.

A Geometria Dinâmica e o Cabri 3D

Grinkraut (2009) assinala que Baldin e Villagra (2004) apontam que o ambiente de Geometria Dinâmica possui muitas possibilidades, como: Linguagem visual, pois estimula um novo meio de comunicação de conceitos abstratos, tornando a tarefa de compreensão da linguagem matemática mais agradável, Interatividade, visto que, propicia a oportunidade de introduzir experiências que instiguem o espírito de investigação e conjecturar sobre propriedades, e confirmação ou não de resultados, Desenvolvimento de atividades manipulativas concretas que permite o acompanhamento da aprendizagem, respeitando as diferenças individuais, e por fim, Desenvolvimento da sensibilidade em relação aos conceitos matemáticos de natureza pura e aqueles inerentes aos equipamentos.

Além disso, Gravina (2001) assinala a importância do uso dos ambientes de Geometria Dinâmica e diz:

Os ambientes de Geometria Dinâmica também incentivam o espírito de investigação Matemática: sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, disponibiliza os experimentos de pensamento. Manipulando diretamente os objetos na tela do computador, e com realimentação imediata, os alunos questionam o resultado de suas ações/operações, conjecturam e testam a validade das conjecturas inicialmente através dos recursos de natureza empírica. (GRAVINA, 2001, p. 89-90)

Nessa visão, o ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D*, concebido e desenvolvido por Cabrilog⁴, e lançado em 2004. Fundamenta-se na tecnologia CABRI⁵, originada das investigações desenvolvidas no Laboratório Leibniz (associado à Universidade Joseph Fourier, em Grenoble, França).

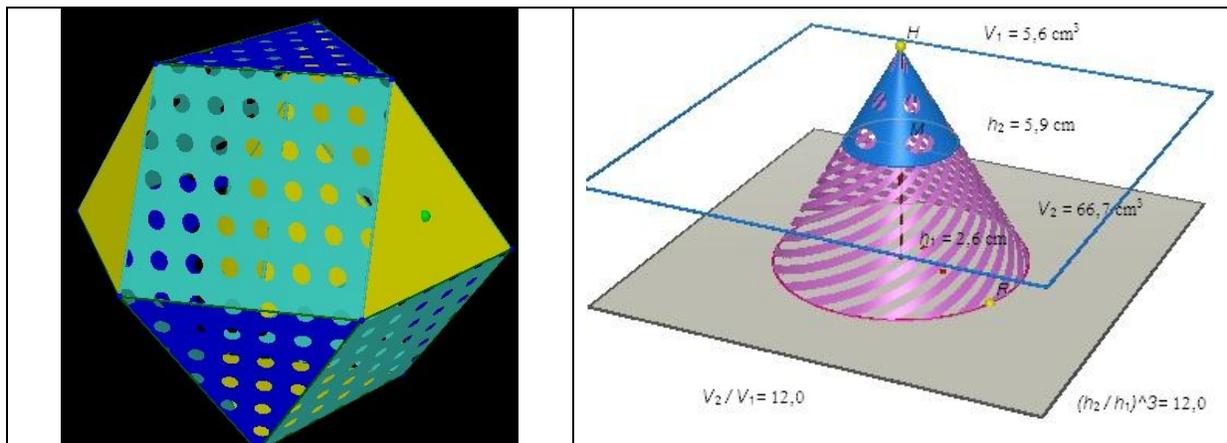


Figura 1. Figuras construídas no Cabri 3D.

Fonte: <http://www.cabri.com>

Como observamos na figura 1, o ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D*, permite manipular e construir figuras espaciais, além de verificar e testar suas propriedades. Por

⁴ Logotipo da companhia criadora dos ambientes de Geometria Dinâmica *Cabri II* e *Cabri 3D*.

⁵ A sigla CABRI vem do francês **C**ahier de **B**rouillon **I**nformatique, que significa Caderno de Rascunho Informático.

exemplo, no *Cabri 3D*, a mudança de tons das cores indica se as figuras construídas estão mais perto do observador ou não, ou seja, as cores são mais intensas ou mais tênues, respectivamente.

Nas pesquisas sobre ambientes de Geometria Dinâmica, assinaladas anteriormente, podemos inferir que esta promove mudanças no aprendizado de Geometria, uma vez que abre a possibilidade para que os estudantes construam e explorem figuras, estabelecendo relações entre elas. Além do mais, os estudantes podem fazer conjecturas, que podem ser testadas com as ferramentas e/ou recursos disponíveis no ambiente. A seguir apresentamos a abordagem instrumental de Rabardel (1995) que dá suporte teórico a esta pesquisa.

Gênese Instrumental

A abordagem Instrumental de Rabardel (1995) define o instrumento como uma entidade mista, composta pelo artefato (parte material ou simbólico) e esquemas de utilização.

Nesta abordagem, a transformação do artefato em instrumento articula o sujeito - com suas habilidades e competências cognitivas - o instrumento e o objeto para o qual a ação é dirigida. Esse processo de transformação é chamado pelo autor: Gênese Instrumental.

Segundo o mesmo autor, a Gênese Instrumental tem duas dimensões que dependem da orientação. A instrumentação, quando é orientada para o sujeito, e instrumentalização, quando é orientada para o artefato. Para o autor,

[...] os processos de **instrumentalização** referem-se ao surgimento e evolução da componente artefato do instrumento: selecionado, agrupando, produzindo e definindo funções, transformando o artefato (estrutura, funções etc.) enriquecendo as propriedades do artefato cujos limites são difíceis de determinar; [...] Os processos de **instrumentação** são relativos ao surgimento e evolução de esquemas de utilização e da ação instrumental: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução por acomodação, coordenação e combinação, inclusão e assimilação recíproca, a assimilação de novos artefatos aos esquemas pré-existentes. (RABARDEL, 1995, p. 111, tradução nossa do original francês) (grifo nosso).

As duas direções do processo de Gênese Instrumental, de acordo com Trouche (2004), são ilustradas na figura 2.

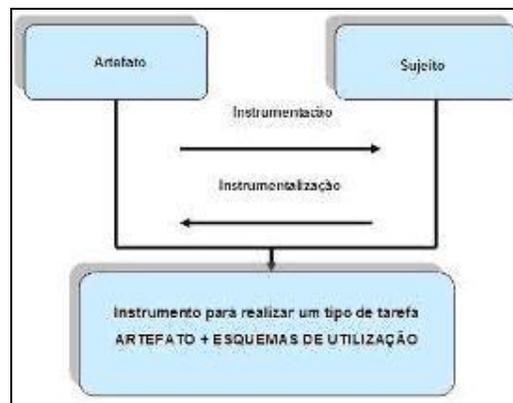


Figura 2. Processo de Gênese Instrumental

Além disso, Trouche (2002; 2004), afirma que para observar de maneira didática o processo de Gênese Instrumental, embora os processos instrumentação e instrumentalização, não são processos independentes é necessário separá-los.

Metodologia

Para a investigação, são usados como base metodológica, aspectos da Engenharia Didática de Artigue (1995),

[...] é uma forma de trabalho didático que pode ser comparado com o trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, baseia-se em conhecimentos científicos de sua área e aceita submete-se a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo é obrigado a trabalhar com objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. (ARTIGUE, 1995, p. 33, tradução nossa do original espanhol).

De acordo com Almouloud (2007), a Engenharia Didática se apoia em um esquema experimental baseado na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino, além da validação, que é a comprovação ou não das hipóteses assumidas no estudo, mediante as análises a **priori** e a **posteriori**.

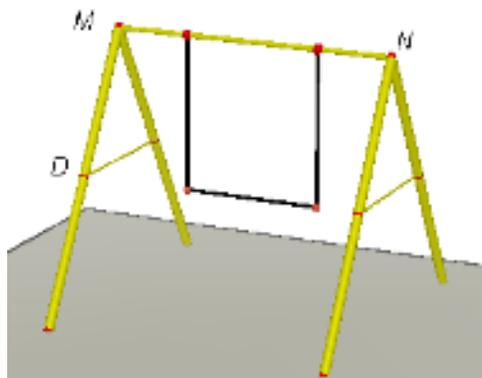
Na parte experimental trabalhamos com estudantes do segundo ano do Ensino Médio de uma escola particular do Estado de São Paulo. Nesta comunicação analisamos a atividade “balanço”, realizada pelo estudante Carlos, que forma parte da sequência de atividades de Salazar (2009).

A atividade

A seguir mostramos a atividade que pede a construção do modelo “balanço” utilizando transformações geométricas no espaço. Esta atividade permitiu ao estudante explorar noções de geometria, bem como, de transformações geométricas no espaço e suas propriedades.

Atividade: balanço

Criar um balanço e o seu suporte conforme desenho abaixo



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>

Figura 3. Atividade apresentada aos estudantes

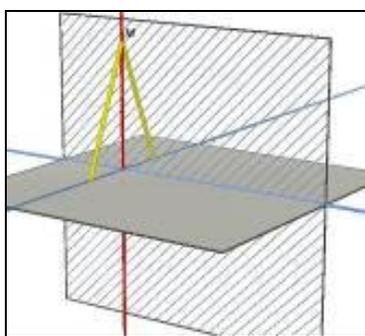
Fonte: <http://www.cabri.com/download-cabri-3d.html>

Análise a priori

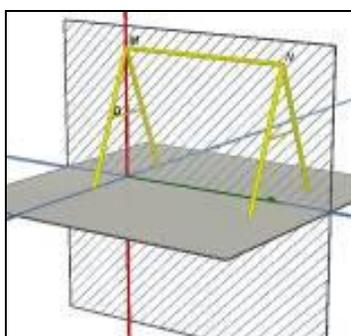
A atividade visa à construção do modelo “balanço”⁶ por meio do uso das ferramentas “reflexão”, “translação” e outras ferramentas e recursos do *Cabri 3D*. Também mobiliza a noção de reflexão em relação a um plano (para a construção dos dois pés do balanço) e de translação (para os outros dois pés) introduzidas, em outras atividades.

Esquema de utilização

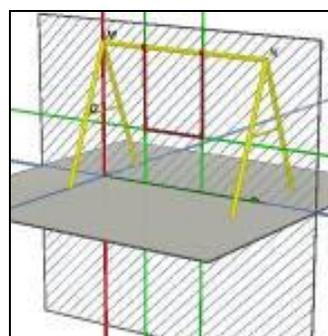
- Conceitos-em-ato: devemos mobilizar as noções de reta paralela e perpendicular, segmento, vetor, plano perpendicular, reflexão e translação para construir o modelo desta atividade.
- Regras-de-ação: as ações para o desenvolvimento dessa atividade são apresentadas por meio da Figura 4 que mostra passo a passo o processo de construção do balanço.



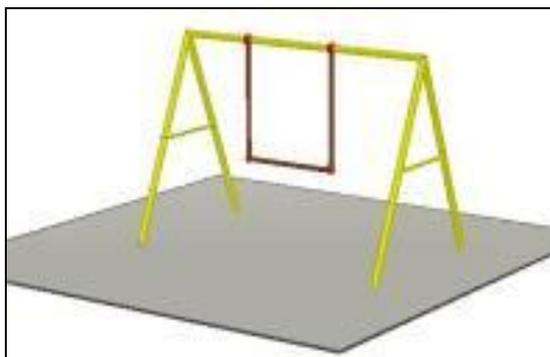
(a) reflexão do segmento em torno ao plano



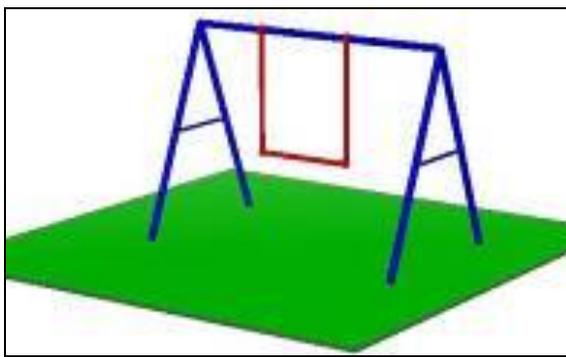
(b) translação segundo o vetor



(c) construção de retas paralelas e perpendiculares para o balanço



(d) balanço com objetos ocultos



(e) utilização dos atributos “cor” e “raio da curva”

Figura 4. Possível processo de construção do balanço da análise a priori

⁶ Atividade adaptada de: <http://www.cabri.com/download-cabri-3d.html>

Análise a posteriori

Carlos realizou uma construção diferente da que havíamos previsto na análise a priori, pois empregou basicamente retas paralelas, retas perpendiculares, ponto médio e segmento (figura 5), sem usar nenhuma das transformações que tínhamos pensado. Pensamos que o fato pode ter sido em razão de várias possibilidades:

1. Embora Carlos tivesse realizado com sucesso as atividades nas quais as ferramentas de translação e reflexão, foram introduzidas, nada garante que está instrumentado o uso das citadas ferramentas.
2. Pensamos que Carlos poderia estar instrumentado nas noções de translação e reflexão, além das outras noções mobilizadas nos encontros anteriores; entretanto, pode ter acontecido que para ele foi mais fácil ter usado as noções trazidas da Geometria Plana.

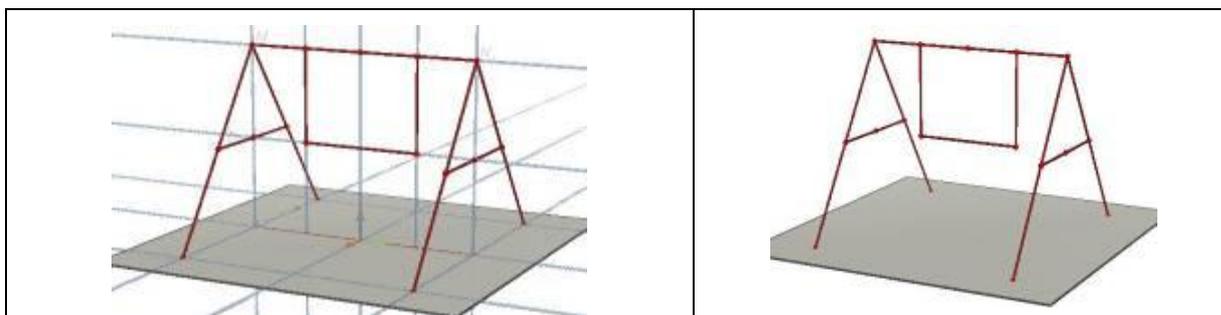


Figura 5. Balanço construído por Carlos

Por fim, podemos afirmar que Carlos estava *instrumentado* com as ferramentas usadas nessa construção. Além disso, foi dado um desafio: criar a movimentar e criar a sombra do balanço, o estudante realizou a construção que apresentamos na figura 6.

	<p>O aluno criou uma reta inclinada que se intersecta com o plano de base e, retas paralelas a esta que passam pelos vértices do balanço.</p>
	<p>Carlos terminou sua construção e mudou o ponto de vista, além de animar o balanço.</p>

Figura 6. Construção da sombra do balanço

Como Carlos, outros estudantes criaram a sombra do balanço como mostramos na figura 7.

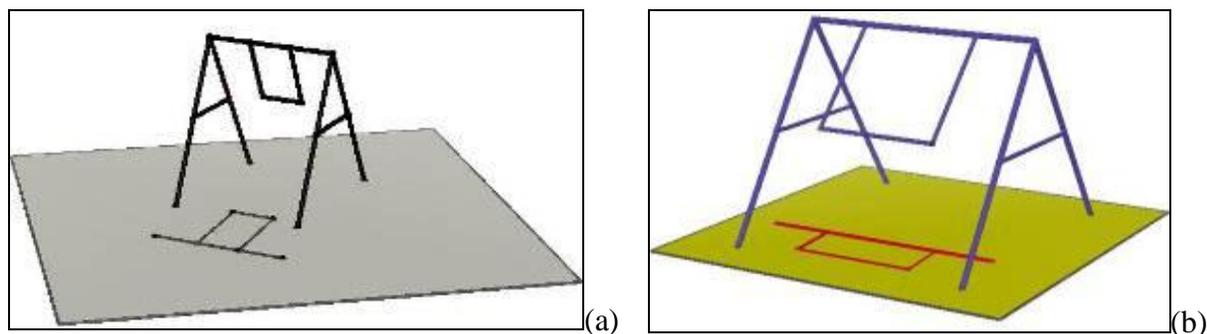


Figura 7. Sombra do balanço construída por de Francisco (a) e Álvaro (b)

Na presente atividade, os estudantes já *instrumentados* com as ferramentas e os recursos do software, necessários para essa construção, mostraram estar *instrumentados* também em relação às ferramentas utilizadas nas atividades anteriores, o que nos fez afirmar que usaram esquemas preexistentes e instrumentos (parte das ferramentas do *Cabri 3D*).

Considerações finais

As estratégias de Carlos, quanto ao uso do *Cabri 3D* e, os conhecimentos geométricos mobilizados, nos fazem pensar que a Gênese Instrumental estava acontecendo, porque suas ações indicaram que estava instrumentado com as ferramentas que utilizou para sua construção. Além disso, as ações de Carlos mostram que noções de transformações geométricas no espaço foram introduzidas de maneira intuitiva.

Além disso, o estudante estabeleceu relações entre as ferramentas, recursos do *Cabri 3D* e seus conhecimentos de geometria plana, pois, suas ações evidenciaram a mobilização de esquemas pré-estabelecidos e/ou a criação de novos esquemas de utilização. Esse fato nos dá subsídios da ocorrência do processo de Gênese Instrumental na interação com essas ferramentas e/ou recursos do *Cabri 3D* e com as noções de Geometria envolvidas na atividade desenvolvida por Carlos.

Assim sendo, em geral não podemos afirmar que existe uma única sequência de ações para desenvolver uma atividade ou tarefa. Contudo, para que os estudantes utilizem e/ou criem novos esquemas de utilização ou similares aos que o professor prevê, a priori, cabe a ele fazer as escolhas adequadas e orientar o desenvolvimento do trabalho, de acordo com o conteúdo escolhido.

Apoiados nos resultados desta investigação, podemos pensar em outras pesquisas que aprofundem o estudo de transformações geométricas no espaço, especialmente na interação com o *Cabri 3D* (ou com outros ambientes de Geometria Dinâmica) e que articulem, ainda mais, os ambientes informáticos e de lápis e papel, com sequências de atividades, que levem os estudantes a fazer conjecturas e demonstrar as propriedades de diferentes objetos geométricos espaciais.

Igualmente, pensamos que são necessárias outras investigações de Geometria Plana e Geometria Espacial, que utilizem a abordagem Instrumental como referencial teórico e a interação com outros ambientes de Geometria Dinâmica.

Referências bibliográficas

- Almeida, T.C.S. (2010). Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Almouloud, S. A. (2007). Fundamentos da didática da Matemática. Curitiba: Ed. UFPR.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. In: Artigue M., Douady R., Moreno L.. Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Grupo editorial Iberoamérica, Bogotá.
- Baldin, Y.Y. & Villagra, G.A.L. (2004). Atividades com o Cabri-Geómetre II para cursos de Licenciatura em Matemática e Professores do Ensino Fundamental e Médio. São Carlos: EdUFSCar.
- Brasil (1998). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília, DF.
- Cabri 3D, Manual do usuário. Disponível em:
<http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/c3dv2/user_manual_pt_br.pdf> . Acessado em: 01.03.2008.
- Cavalca, A. de P. (1997). Espaço e Representação Gráfica: Visualização e Interpretação. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Flores, C. R. (2002). Abordagem histórica no ensino de Matemática: o caso da representação em perspectiva. *Contrapontos*. v. 2, n. 6. p. 423-437.
- _____. Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva. São Paulo. Musa, 2007.
- Grinkraut, M. L. (2009). Formação de professores envolvendo a prova matemática: um olhar sobre o desenvolvimento profissional. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Kaleff, A. M. (2003). Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. EdUFF.
- Laborde, C. (1993). The Computer as Part of the Learning Environment: The Case of Geometry, in Keitel, C. & Ruthven, K. (Eds) *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 48-67), Springer.
- Parzys B. (1988). Knowing vs. Seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, n.19, p. 79-92.
- _____. (1991). Representation of space and students' conceptions at High school Level. *Educational Studies in Mathematics*, n. 22, p. 575-593.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 239 p.
- Trouche, L.(2002). Une Approche Instrumentale de l'apprentissage des Mathématiques dans des Environnements de Calculatrice Symbolique. In: *Calculatrices symboliques Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*. La Pensée Sauvage. Grenoble. p. 187-212.
- _____. (2004). Environnements Informatisés et Mathématiques: quels usages pour quels apprentissages? *Educational Studies in Mathematics*. v. 55. p. 181-197.

Salazar, J.V.F. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço*. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.