

Competencias profesionales del profesor de matemáticas y la gestión de la transición entre etapas educativas

Edelmira **Badillo**

Universidad Autónoma de Barcelona

España

Edelmira.Badillo@uab.cat

Mario **Martínez**

Secretaría de Educación de Nuevo León/Universidad Autónoma de Barcelona

México

Mario.martinez@uab.cat

Lourdes **Figueiras**

Universidad Autónoma de Barcelona

España

Lourdes.Figueiras@uab.cat

Vicenç **Font**

Universidad de Barcelona

España

vfont@ub.edu

Resumen

En esta comunicación se presentan los resultados parciales de una investigación que pretende contribuir a caracterizar la competencia profesional de los profesores de matemáticas en la gestión de la transición entre etapas educativas. El estudio forma parte de otros proyectos más generales que tienen como objetivos: (a) asegurar que los programas de formación inicial del profesorado de secundaria garantizan la adquisición de la competencia profesional necesaria para evaluar las competencias matemáticas de los alumnos de secundaria y, (b) identificar los factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático a lo largo de las diferentes etapas educativas. La investigación a partir del análisis de episodios de clases (enfoque ontosemiótico) ha permitido detectar puntos críticos que bloquean la adquisición de la competencia del profesorado para atender el concepto concreto de mediatrix de una manera continua, previendo las situaciones a las que se enfrentará el estudiante en el futuro de su educación.

Palabras clave: competencias profesionales, competencias matemáticas, enfoque ontosemiótico, gestión de la transición.

1. Introducción

La tendencia a una convergencia internacional en el diseño de los planes de estudio universitarios, y en particular los que se refieren a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria, han impulsado un conjunto de reformas que en el caso de España han dado lugar a la implantación de un título de máster. Dicho máster habilita para el ejercicio de la profesión de Profesor de Educación Secundaria y su currículum, siguiendo las tendencias internacionales, se organiza por competencias profesionales. Esta organización requiere una reflexión profunda que atienda, entre otras, las siguientes preguntas: ¿Cómo se entiende la competencia matemática que ha de tener un maestro? ¿Qué competencias parciales contribuyen a adquirirla? ¿Cómo se puede desarrollar y evaluar?

Por otra parte, y ahora atendiendo los currículums que organizan la educación secundaria, la tendencia es también considerar un diseño basado en competencias y a diferencia de lo que ocurre con la competencia matemática del profesorado, existe una tendencia a considerar que “saber matemáticas” incluye la competencia para aplicarlas a situaciones no matemáticas de la vida real. Esta tendencia, en algunos países, como es el caso de España, se ha concretado en el diseño de currículos que entienden la competencia matemática de manera similar a como se entiende en el informe PISA 2003.

Ante esta situación, los currículos para la formación inicial de profesores han de garantizar una competencia matemática, específica de la profesión de profesor, que permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo de secundaria. La cuestión, por tanto, que han de atender los programas de formación del profesorado es determinar cuáles son las competencias profesionales que permiten a los profesores desarrollar y evaluar las competencias, generales y específicas de matemáticas, prescritas en el currículum de secundaria. Un primer problema inherente a esta cuestión es determinar el conocimiento matemático y educativo que los maestros en formación deben adquirir (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Schilling y Ball, 2004; Sowder, 2007; Hill, y Bola Schilling, 2008; Wood, 2008; Font, Rubio, Giménez y Planas, 2009; Godino, 2009). En particular, en este artículo nos ocuparemos del conocimiento que requiere el profesorado para atender a los estudiantes en el momento de iniciar la educación secundaria.

El principal objetivo de la investigación que presentamos aquí es contribuir a la caracterización de la competencia que permite al profesorado garantizar una educación matemática continua, en particular en la transición de primaria a secundaria.

2. Análisis didáctico de procesos de instrucción

De acuerdo con Font, Rubio, Giménez y Planas (2009) la competencia matemática del profesorado se puede considerar compuesta por dos macro competencias interconectadas que a su vez agrupan otras más específicas: a) La competencia matemática y, b) La competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción matemática. El desarrollo de esta segunda macro competencia es el objetivo principal del máster de formación inicial para ser profesor de secundaria de matemáticas porque se presupone que esta competencia ya se ha desarrollado en los estudios previos que acreditan a los alumnos para su ingreso en el máster. La competencia en la gestión de la transición entre etapas educativas está relacionada tanto con la competencia matemática como con la competencia en análisis didáctico.

2.1. La competencia en la gestión de la transición entre etapas educativas

En general, la investigación previa sobre la transición de primaria a la secundaria se ha centrado en el logro académico de los estudiantes (McGee, Ward, Gibbons y Harlow, 2003, Fernández y Figueiras, 2010), mientras que una focalización en los docentes y sus perspectivas ha estado generalmente ausente.

Considerando la transición específicamente en matemáticas surge, inmediatamente, la siguiente pregunta: ¿qué características la describen? Revisando el foco de atención y las conclusiones de la investigación previa, el contenido matemático surge como un factor determinante: el paso de la aritmética al álgebra (Boulton-Lewis et al, 1997; Boulton-Lewis, Cooper, Atweh, Pillay y Wilss, 1998, Cooper et al., 1997; Flores, 2002; González y Ruiz López, 2003), el aprendizaje de los números enteros (Gallardo, 2002; Pujol, 2006) o el desarrollo de la necesidad de pruebas en geometría (Berthelot y Salin, 2000-2001; Sdrolias y Triandafillidis, 2008).

Puesto que los profesores determinan el acceso de los estudiantes a este contenido, consideramos crucial su papel en la transición. Fernández y Figueiras (2011) describen mediante competencias el conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua: a) estrategia, b) consultor y c) transformador, sobre la base de que la competencia en la gestión de la transición se ha de poner en funcionamiento en diferentes momentos, en especial en el momento de la planificación de secuencias didácticas fuera del aula y en la gestión en el aula. La competencia de *estratega* se refiere a la preparación de actividades desde una perspectiva de continuidad; la de *consultor* se refiere a la identificación, prevención y reorientación de errores y dificultades desde una perspectiva de continuidad, y la de *transformador* se refiere a la adaptación de la actividad en el aula desde las contribuciones de los estudiantes. Para cada una de esas tres competencias las autoras identifican tres niveles de adquisición.

3. Metodología

Una referencia teórica útil para la consecución de nuestro objetivo es el modelo de análisis propuesto por el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Font, Planas y Godino, 2010) que integra aspectos epistemológicos y socioculturales. Este enfoque propone un análisis didáctico de procesos de instrucción que considera cinco niveles de análisis: 1) Identificación de prácticas matemáticas, 2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, 4) Identificación del sistema de normas y metanormas y, 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción. Los cuatro primeros niveles de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa mientras que el quinto nivel es una síntesis orientada a la identificación de mejoras potenciales del proceso de instrucción en nuevas implementaciones. Los dos primeros, a los que atendemos en este trabajo, prestan especial atención al contenido matemático específico de la profesión de profesor. No descartamos que futuros trabajos puedan incidir en los siguientes niveles.

El primer nivel de análisis explora las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de instrucción matemática y se puede entender como la narración que haría un profesor para explicar a otro profesor lo que ha sucedido desde el punto de vista matemático. El análisis didáctico debe progresar desde la situación problema y las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (nivel 1), a los objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas. El segundo nivel de análisis se centra en los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la

realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. Dado que el estudio de las matemáticas tiene lugar usualmente bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros estudiantes, se debe progresar hacia el estudio de la interacción.

Desde el enfoque ontosemiótico para la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007; Font y Contreras, 2008), la actividad matemática juega un papel central y está modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. Desde estas prácticas, emergen los diferentes tipos de objetos primarios relacionados (lenguaje, argumentos, conceptos, proposiciones, procedimientos y problemas), dando lugar a configuraciones epistémicas o cognitivas (dependiendo de si el punto de vista adoptado es institucional o personal) entre ellos.

Se observaron las clases de último curso de primaria y primero de secundaria de diferentes colegios e institutos durante todo un curso escolar y se procedió a seleccionar aquellos contenidos que estaban presentes, de manera muy similar, en ambas etapas educativas. Uno de ellos era la geometría del triángulo y en particular la mediatriz. Se seleccionaron dos profesoras de primaria que mostraban modelos diferentes de gestión de la clase de matemáticas que de manera explícita no contemplaban ninguno de los indicadores de competencia para atender la transición, que previamente se habían desarrollado en Fernández y Figueiras (2010). Además, se seleccionó una tercera profesora cuya práctica sí cumplía tales indicadores. Se pidió a las tres que planificaran una sesión sobre la mediatriz para llevarla a la práctica. Las tres clases fueron grabadas en vídeo y transcritas para su posterior análisis.

En los primeros dos casos, el objetivo de la clase se centró en aprender el procedimiento para trazar la mediatriz con regla y compás y la planificación consistió básicamente en seguir el libro de texto de la institución en la que se implementaría. En el tercer caso, el objetivo es que, dado un segmento, los estudiantes caractericen geoméricamente la frontera entre dos regiones, cada una de las cuales está constituida por todos los puntos que están más cerca de un extremo del segmento que del otro.

La tercera secuencia didáctica tuvo como eje el planteamiento y la resolución en pequeños equipos y de manera colectiva del problema mostrado en la Figura 1, que la maestra adaptó de una tarea propuesta en el libro publicado por el Instituto Freudenthal: *Geometría con Aplicaciones y Pruebas* (Goddijn, Kindt y Reuter, 2004, parte. I, 5).

En el desierto: En la figura se muestra parte de un mapa de un desierto. Hay dos pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas este mapa contigo.

- a) ¿A cuál de los pozos irías a tomar agua?
- b) Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro.
- c) Ahora, esboza una división del desierto en dos partes o regiones de manera que siempre tengas más cerca un pozo que el otro pozo. ¿Si estás en la frontera a qué pozo irías y por qué?
- d) ¿Qué clase de línea es la frontera? ¿Recta o curva?

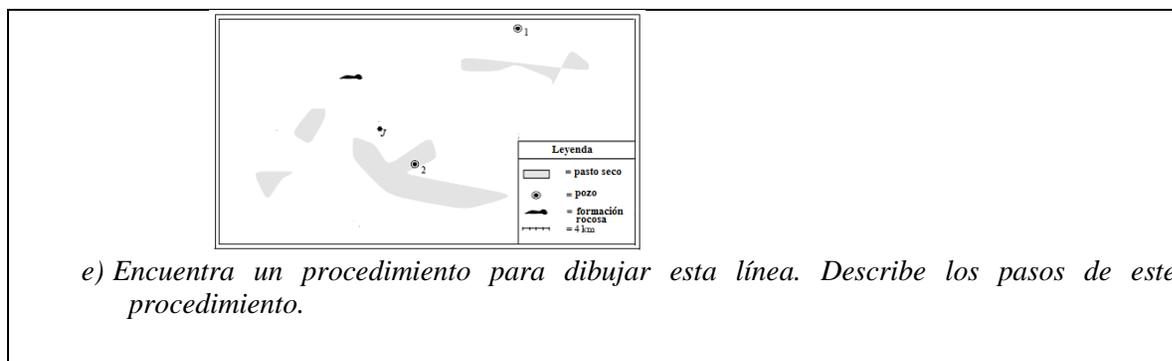


Figura 1. Problema inicial de la secuencia 3

4. Análisis de los datos

Para el análisis se tomaron en consideración los cinco primeros minutos de cada una de las clases, que fueron grabadas en video y descritas en términos de planificación y estructura (Tabla 1).

Tabla 1. Descripción de las tres secuencias didácticas
Secuencia didáctica 1 (5 minutos de una hora de clase)

Planificación

No atención a la transición
 Utilización del libro de texto

Estructura

Definición de la mediatriz.
 Ejemplificación de la construcción de la mediatriz con regla y compás
 Justificación de que la construcción mostrada efectivamente es la mediatriz
 Planteamiento de ejercicios de aplicación de la construcción anterior

Secuencia didáctica 2 (5 minutos de una hora de clase)

Planificación

No atención a la transición
 Utilización del libro de texto

Estructura

Construcción de diversos ejemplos de mediatriz con regla y compás.
 Reflexión sobre los procedimientos realizados.
 Definición colectiva de la mediatriz.
 Aplicación del procedimiento geométrico para la construcción de la mediatriz con regla y compás y estrategias para verificarlo.
 Planteamiento de ejercicios de aplicación.

Secuencia didáctica 3 (5 minutos de dos horas de clase)

Planificación

Atención a la transición
 No utilización del libro de texto habitual

Estructura

Lectura del enunciado del problema en gran grupo
 Inicio del trabajo en pequeños grupos

Cada una de las tres secuencias didácticas fueron analizadas en primer lugar por el equipo de investigación utilizando el modelo de análisis didáctico propuesto por el enfoque ontosemiótico (Font, Planas y Godino, 2010). A continuación se determinaron los aspectos que podían facilitar o dificultar la transición de la primaria a la secundaria de acuerdo con la caracterización desarrollada por Fernández y Figueiras (2010) para atender el conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua.

4.1. Práctica matemática, objetos y procesos

Se han aplicado los dos primeros niveles de análisis propuestos por el enfoque ontosemiótico atendiendo a las prácticas matemáticas y los objetos y procesos matemáticos activados en su realización. En este sentido hemos realizado un análisis similar, en algunos aspectos, al realizado en Malaspina y Font (2010) y en Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2010). También han sido analizados los puntos críticos que bloquean las competencias profesionales caracterizadas por Fernández y Figueiras (2010) para una educación matemática continua.

Por práctica matemática se entiende una secuencia de acciones sujeta a reglas matemáticas. La realización de una práctica moviliza diferentes elementos: un agente (institución o persona) que realiza la práctica, y un medio en el que dicha práctica se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.). La práctica matemática que se llevó a cabo en cada una de las tres secuencias fueron las que aparecen en la Tabla 2. También aparece sintetizado en esta tabla el análisis detallado de los objetos y procesos matemáticos de la secuencia 1.

Tabla 2. Prácticas matemáticas, análisis de objetos y procesos.

Secuencia 1
Práctica matemática
Se define la mediatriz como la recta perpendicular a un segmento por un punto medio. A continuación explica un procedimiento de construcción de esta recta coherente con esta definición y se intenta justificar que la construcción, realmente, es coherente con la definición. Se reproduce repetidamente este procedimiento con otros segmentos.
Análisis de objetos y procesos
Lenguaje verbal: mediatriz, línea recta, segmento, origen y final de un segmento, extremo opuesto, amplitud del segmento, recta perpendicular, punto medio de un segmento, semicircunferencia, punto de corte, ángulo, grado, etc.
Lenguaje gráfico: Extremos de un segmento, segmento, semicircunferencia, recta perpendicular, punto de corte.

Lenguaje simbólico: A, B, \overline{AB}
Lenguaje gestual: Movimiento a lo largo del segmento, cruz con brazos para perpendicular
Situaciones- problema
Construir la recta perpendicular a un segmento por su punto medio (es el problema del profesor).

Ejercicios para reproducir y mecanizar el procedimiento de construcción (son los problemas de los alumnos)

Definiciones y conceptos

Previos

- Segmento (tiene origen y final)
- Línea recta (no tiene principio ni fin)
- Punto medio (divide al segmento en dos de igual longitud)
- Semicircunferencia (Media circunferencia trazada con el compás dado el centro y el radio)
- Recta perpendicular (forma con el segmento cuatro ángulos de 90°).
- Ángulo recto (mide 90 grados).

Emergentes

Mediatriz (definida como recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio) (profesora)

Procedimientos

Previos

- Medir longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos con regla y transportador de ángulos
- Identificación de rectas y segmentos. (Fijar dos puntos en la recta)
- Identificación de rectas perpendiculares. (Tomar el transportador. Medir 90°)

Emergente

Determinación del punto medio: 1) se mide la longitud del segmento con una regla, 2) se determina con la regla el punto cuya distancia a un extremo del segmento es la mitad de la longitud del segmento (*Sugerido por un alumno*)

- Procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz (*Explicado por la profesora*)

1) Con centro un extremo del segmento se dibuja la semicircunferencia de radio la longitud del segmento. 2) Se repite el punto 1 con el otro extremo del segmento. 3) Se determinan los dos puntos de corte de las dos semicircunferencias. 4) Se dibuja la recta que pasa por los dos puntos de corte.

Proposiciones

Emergentes

La recta que se construye de esta manera corta al segmento en dos partes iguales (Profesor)

La recta construida de esta manera tiene un punto común con el segmento (Alumno)

La recta que se construye de esta manera es perpendicular al segmento (Profesor)

Argumentos

Tesis: la recta construida con el procedimiento explicado es perpendicular al segmento [y esto es la mediatriz]

Argumentos: Si es perpendicular los 4 ángulos medirán 90° (proposición). Hago la medición de los 4 ángulos con el transportador de ángulos y compruebo los 4 miden 90° (procedimiento)

Procesos que genera el profesor durante la interacción

Comunicación del objetivo/la intención de la sesión.

Definición

Primera fase del proceso de algoritmización (presentación de un procedimiento)

Argumentación.

Segunda fase del proceso de algoritmización (ejercicios de aplicación del procedimiento)

Secuencia 2

Práctica matemática

Se impone un procedimiento tradicional de construcción de la mediatriz con regla y compás. A continuación esta recta se define como mediatriz. Se toma la regla para medir que la distancia es la misma a los dos extremos y se visualiza que la recta forma una cruz. Se define la mediatriz de un segmento como la recta que lo divide en dos partes iguales y además es perpendicular. Se repite el procedimiento con otros segmentos.

Secuencia 3

Práctica matemática

Planteamiento del problema de la Figura 1. Comprensión de todos los elementos del enunciado y énfasis en el concepto geográfico de frontera. Referencia a casos particulares de puntos mediante su propiedad como lugar geométrico respecto de la distancia a los dos pozos que se mencionan en el problema. Organización de los estudiantes en grupos para resolver el problema.

4.2. Puntos críticos

Hemos detectado tres puntos críticos en la interacción que informan sobre qué aspectos bloquean la competencia necesaria para la transición. Dos de ellos informan sobre las competencias matemáticas del profesorado y el tercero sobre la gestión de la interacción en el aula.

Punto crítico 1. Tanto en las secuencias 1 y 2 se dan procesos de medida directa con la regla o el transportador de ángulos que en unas ocasiones se utilizan como justificación de propiedades de carácter general y en otras se consideran no válidos en términos de justificación. En general, si un alumno pretende utilizar este procedimiento para substituir alguno de los pasos de la construcción de la mediatriz que lleva a cabo el profesor, es considerado no riguroso:

[Extracto de la secuencia 2]

Profesora: Por lo tanto la mediatriz del segmento no es nada más que la línea recta perpendicular a este segmento que lo divide en dos partes exactamente iguales, ¿de acuerdo? ¿Cómo se hace para conseguir ese centro de ese segmento y partirlo en dos mitades iguales? Dime.

Alumno: Podría subir eso y medir con esto (*levanta una regla*)

Profesora: Lo podría medir con la regla, pero me saldría exactamente, exactamente igual. Podría...

Alumna: con el compás

Profesora: con el compás. Con el compás (*Agarra el compás de pizarra*) es el instrumento de medida adecuado con el cual el centro del segmento me va a salir a la perfección (...)

En cambio, se utiliza la medida directa para justificar los elementos de la definición que no se justifican de manera inmediata a partir del procedimiento de construcción:

[Extracto de la secuencia 1]

Profesora: Por lo tanto, una condición es que la recta que divide al segmento en dos partes iguales, la mediatriz del segmento ha de ser perpendicular. ¿Cómo puedo yo saber si estas dos rectas son perpendiculares? ¿De qué manera lo tengo que hacer? perpendicular (*con las manos señala los cuatro cuadrantes que se forman en la intersección del segmento y la recta perpendicular a él*).

Alumno: Midiéndolo con el transportador de ángulos.

Profesora: Midiéndolo con el transportador de ángulos. (*Agarra el transportador de ángulo de madera*)

Alumno: Un ángulo recto.

Profesora: y me tiene que dar...

Alumnos: Un ángulo recto, noventa.

Profesora: ...y me tiene que dar cuatro ángulos rectos. Uno, dos, tres, y cuatro. Si yo pongo el transportador de ángulos aquí (*coloca el transportador sobre el segmento y mide el ángulo del primer cuadrante*) y lo hago coincidir, a ver, fijaros que me sale perfectamente un ángulo de 90° . ¿Lo veis? Si lo pongo al revés aquí me sale también exactamente 90° . Por lo tanto yo puedo decir que la mediatriz del segmento es la recta perpendicular a ese segmento que divide a ese segmento en dos partes perfectamente iguales. Exactamente.

Punto crítico 2. La falta de coherencia entre la actividad que se propone y el contenido que se presenta parece limitar mucho las posibilidades de acción del profesorado para atender el concepto mediatriz. En particular la construcción con la que se inicia la secuencia número 2 sugiere una definición de mediatriz como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos extremos del segmento. Esta definición no utiliza el concepto de perpendicularidad y permitiría a los estudiantes dar significado a la construcción, y en particular al hecho de que la apertura del compás en el dibujo de la mediatriz pueda ser cualquiera, siempre que supere la medida de la mitad del segmento. Esta falta de coherencia tiene consecuencias directas sobre el significado que los estudiantes pueden dar a las definiciones y los procesos involucrados. Al introducir otra definición que utiliza la condición de perpendicularidad, la maestra se ve obligada a *comprobar* esta condición en su construcción y es entonces cuando aparece la confusión entre demostración y medida directa a la que nos referimos en el punto anterior, de la que se desprenden a su vez problemas importantes de argumentación.

Punto crítico 3. Gestión de la interacción en el aula. La interacciones en el aula en las dos primeras secuencias siguen un patrón general profesor-alumno-profesor con muy escasa interacción entre los estudiantes. El discurso en el aula tiene como contenido central el contenido y objetivos de aprendizaje matemático que se ha fijado para la clase. Aunque las profesoras monopolizan el discurso matemático, proporcionan oportunidades para que los estudiantes participen en la clase planteando preguntas que parecen tener como finalidad: a) confirmar que los estudiantes están siguiendo la exposición, b) retomar los conceptos previos de los estudiantes para ampliarlos o precisarlos.

Este tipo de interacción da poco margen para reflexión individual y colectiva del grupo y limita al mismo tiempo la posibilidad de las profesoras para identificar y gestionar los errores que los estudiantes tienen sobre el tema, mermando en consecuencia su competencia para atender el contenido desde una perspectiva matemática continua.

5. Consideraciones finales

La descripción que proporciona el modelo de análisis propuesto por el enfoque ontosemiótico permite analizar qué contenido matemático se ha puesto en juego en el episodio y cuales son las limitaciones y potencialidades del conocimiento matemático del profesorado. En particular, el haber llevado a cabo el análisis de tres profesoras con diferentes niveles de conocimiento matemático útil para atender la continuidad nos ha permitido encontrar al menos tres puntos críticos que impiden dar un significado robusto al concepto de mediatriz, a pesar de dominar el conocimiento de los conceptos y procedimientos básicos involucrados en la definición. Las numerosas investigaciones realizadas en España sobre la débil formación matemática de los profesores de primaria, permiten suponer que una razón plausible es la falta de reflexión sobre qué significa demostrar en matemáticas y la confusión entre comprobación y demostración, que se hace evidente en los dos primeros puntos críticos comentados anteriormente.

Un indicador positivo de competencia en gestión de la transición para una matemática continua, que favorezca la transición entre etapas educativas habría sido que la profesora hubiese aprovechado los comentarios de los alumnos para profundizar en la diferencia entre comprobación y demostración. Las razones por las cuales no se ha dado podrían ser: (1) la profesora no tiene un conocimiento de las matemáticas de la secundaria, (2) en el sistema educativo español no se ha problematizado la transición como una cuestión a la que haya que prestar atención y, (3) la profesora no tiene una competencia en análisis didáctico que le permite detectar los puntos críticos en los que su acción puede facilitar (o no) un conocimiento suficientemente robusto para facilitar el aprendizaje matemático posterior.

El análisis realizado nos permite concluir con algunas sugerencias para el desarrollo de la competencia en la transición entre etapas. El primer paso consiste en problematizar la transición como una cuestión a la que haya que prestar atención y ofrecer al profesorado instrumentos de análisis adecuados para analizar su práctica docente desde esta perspectiva. Un ciclo formativo con los futuros profesores en los que se les guíe para la realización de un análisis similar al que se ha descrito en este trabajo a cabo puede y debe ser llevado a los programas de formación del profesorado. Cómo adaptar este análisis es el siguiente paso en nuestra investigación.

Agradecimientos. Este trabajo de investigación se ha llevado a cabo en el contexto de los siguientes proyectos:

- REDICE-10-1001-13 “Una perspectiva competencial sobre el Máster de Formación de Profesor de Secundaria de Matemáticas”.
- EDU2009-07298 “Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre primaria y secundaria”

Referencias Bibliográficas

- Ball, D., Lubienski, S. T. & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers’ mathematical knowledge, in V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp.433-456). Washington, D.C., EEUU: American Educational Research Association.
- Berthelot, R. & Salin, M.H. (2000-2001). L’enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie de constat à la géométrie déductive? *Petit x*, 56, 5-34.

- Boulton-Lewis, G.; Cooper, T., Atweh, B.; Pillay, H., Wilss, L. & Mutch, S. (1997). Transition from arithmetic to algebra: A cognitive perspective. *21st Annual Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education: Vol. 2.* (178-185). Lahiti, Finland.
- Boulton-Lewis, G., Cooper, T., Atweh, B., Pillay, H. & Wilss, L. (1998). Arithmetic, pre algebra and algebra: A model of transition. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, Gold Coast.
- Cooper, T., Boulton-Lewis, G., Atweh, B.; Pillay, H.; Wilss, L. & Mutch, S. (1997). Transition from arithmetic to algebra: Initial understanding of equals, operation and variables. *21st Annual Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education 2*, 82-89. Lahiti, Finland.
- Fernández, S. & Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. En M.M. Moreno, A Estrada, J. Carrillo & T. A Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 291-301). Lleida: SEIEM.
- Fernández, S. & Figueiras, L. (2011). Re defining HCK to approach transition. Comunicación presentada en el séptimo *Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática (CERME-7)* Rzeszów, Poland.
- Flores, A. (2002). Geometric Representations in the Transition from Arithmetic to Algebra. In Fernando Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 9-29). México, D.F.: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.
- Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (1), 33-52.
- Font, V., Planas, N. & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (1), 89-105.
- Font, V., Rubio, N., Giménez, J. & Planas, N. (2009). Competencias profesionales en el Máster de Profesorado de Secundaria. *UNO*, 51, 9-18.
- Gallardo, A. (2002). The extension of the natural number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171-192.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, Vol. 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. & Lurduy, O. (2010). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*. Springer
- Goddijn, A., Kindt, M. & Reuter, W. (2004). *Geometry with applications and proofs*, Freudenthal Institute. Utrecht, The Netherlands.
- González, F.E. & Ruiz Lopez, F. (2003) Las centenas cuadrículadas: un material matemáticamente potente para ilustrar el tránsito de la aritmética al álgebra. *SUMA: Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 42, 47-59.
- Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, 105, 11-30.
- Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

- McGee, C., Ward, R., Gibbons, J & Harlow, A. (2004). *Transition to Secondary School: A Literature Review*. Hamilton: The University of Waikato.
- Malaspina, U. & Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, 75(1), 107-130.
- Pujol, R. (2006) *Diagnóstico sobre la disposición del alumnado para aprender matemáticas a través de la resolución de problemas*. PhD Thesis. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Sdrolias, K. A.; Triandafillidis, T. A. (2008) The transition to secondary school geometry: can there be a “chain of school mathematics”? *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 159-169.
- Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-223). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Wood, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.