

# EMPLEO DEL MODELO 3 UV EN ÁLGEBRA TEMPRANA

Dulce N. LL. López R. y Andrea L. López P.

Universidad Autónoma de Querétaro

México

lluvianancy@hotmail.com y allopine@hotmail.com

## Resumen:

Se han señalado las ventajas de abordar de manera temprana la enseñanza del álgebra (Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000), sin embargo también se ha cuestionado si los niños en la escuela básica, pueden acceder a estos contenidos. Por ello, el presente trabajo aborda la pertinencia del empleo del modelo 3UV (Ursini y Trigueros, 2001, 2004 y 2006) en el diseño de estrategias didácticas con 46 niños de tercer grado de Educación Primaria, cuyo objetivo fue desarrollar el pensamiento algebraico. Se trabajó con un diseño cuasi-experimental, pretest y postest con grupos control y experimental. Los resultados muestran un avance extraordinario en el postest, apoyando con ello la pertinencia de la enseñanza del álgebra en edades tempranas con el empleo del modelo 3UV.

*Palabras clave: algebra temprana, Modelo 3 UV, educación primaria, variable, pensamiento algebraico.*

## Introducción

Desde hace algunas décadas se ha observado una problemática con respecto al aprendizaje del álgebra, por lo cual diversos autores han trabajado y propuesto introducir el álgebra en edades tempranas. A esta propuesta curricular, se le conoce como Álgebra Temprana y tiene como objetivo, la introducción del pensamiento algebraico en la matemática escolar desde los primeros cursos escolares (Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000). En términos de Kaput (2000), la propuesta consiste en la “algebrización del currículo”.

Para esta propuesta, la acepción del álgebra es entendida como “el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones” (Kaput, 1998, 2000; Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth, et al., 2003). Esta visión es aceptada también por: Usiskin (1988), Bednarz, Kieran y Lee (1996) y Drijvers y Hendrikus (2003).

Dicha propuesta pretende trabajar en las aulas lo siguiente: la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas. Para poder lograr lo anterior, se sugiere trabajar en un ambiente en el que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2005).

Busca crear un aprendizaje basándose en la comprensión de las matemáticas y de esta manera poder facilitar el aprendizaje del álgebra. Blanton y Kaput (2005) y Kaput (1998), apoyan el argumento anterior ya que consideran que el pensamiento algebraico puede nacer a partir de las matemáticas elementales de educación primaria, porque se pueden realizar

## EMPLEO DEL MODELO 3UV EN ALGEBRA TEMPRANA

actividades que permitan el desarrollo conceptual de matemáticas más profundas y complejas, desde edades muy tempranas.

Por otro lado, los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) ha alentado la propuesta curricular del álgebra temprana, adelantando la edad en la que recomienda la introducción del álgebra en el currículo escolar y ampliando su concepción del álgebra. En la última edición de los Estándares del NCTM, se recomienda que el desarrollo de pensamiento algebraico sea abordado desde la Educación Infantil en adelante, para ayudar a los estudiantes a construir una base sólida de aprendizajes y experiencias como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior” (NCTM, 2000).

Actualmente los educadores matemáticos e investigadores que apoyan la propuesta de que el álgebra debería ser parte del currículo propio de la Educación Primaria han ido aumentando, por consiguiente está cambiando la creencia de que el álgebra está lejos de las capacidades cognitivas de los estudiantes jóvenes. (Carraher et al., 2006).

Uno de los elementos esenciales en el trabajo algebraico, es el concepto de variable, la cual se ha venido estudiando desde diferentes enfoques.

En esta investigación consideramos que la variable algebraica puede ser entendida como incógnita, como número generalizado o como elemento en una relación funcional, en base en las investigaciones realizadas por Ursini y Trigueros (2001 y 2004). Estas tres acepciones son mejor conocidas como el *Modelo 3UV*, 3 usos de la variable: número general, incógnita específica y relación funcional. Este modelo nos permite por un lado abordar el estudio de la variable en el álgebra elemental, así como proponer mecanismos de valoración y estrategias didácticas que faciliten su comprensión por parte de los estudiantes.

### **Modelo 3UV**

El concepto de variable que se enseña a los estudiantes tiene diversas acepciones, como se ha mostrado anteriormente, los cuales son de acuerdo a Ursini (1994):

- “Incógnita, cuyo valor se puede determinar con exactitud tomando en consideración las restricciones del problema.
- Número Generalizado, es decir, aquella que aparece en generalizaciones y en métodos generales. Podemos afirmar que es “...un instrumento que se emplea para expresar una generalización. Cuando se quiere expresar matemáticamente un patrón, una regularidad o un método general, se usan las variables para representar los números generales involucrados...”
- Relación Función, se presenta en una relación de variación conjunta con otras variables. Es decir, uno estático y uno dinámico, entendemos por este aspecto estático “cuando se pone énfasis en la correspondencia estática entre dos cantidades” y por un aspecto dinámico cuando “se ven las dos cantidades como entidades en movimiento y se percibe su comportamiento global de manera relacionable.”

En cada uno de estos usos, se esperaría que los alumnos fueran capaces de interpretar, manipular, simbolizar y coordinar los diferentes usos de la variable.

Dentro de estos usos de la variable, se han identificado una serie de aspectos, con diferentes niveles de abstracción, que el estudiante requiere para poder trabajar con el álgebra,

señalados por Ursini y Trigueros, (2001), entre los cuales se encuentran por ejemplo: para la incógnita, reconocer en la expresión algebraica un valor susceptible de determinarse, interpretarla como una entidad que puede tener valores específicos, sustituir el o los valores para mantener la ecuación como verdadera y finalmente llevar a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias. En caso del número generalizado se vuelve imprescindible reconocer patrones y reglas en secuencias, para así interpretar a la variable como una entidad que puede asumir cualquier valor, pero que puede operarse como un ente indeterminado.

### **Perspectivas psicológicas**

Con respecto al desarrollo psicológico del niño, Piaget propone la posibilidad para considerar que el niño aprende a través de su interacción con el medio, descubriendo el mundo; y es su accionar hacia ese mundo lo que le permite la construcción del conocimiento. Las consecuencias de estos conceptos sobre la enseñanza son muy grandes, una de ellas, permite pensar que para organizar un curso de enseñanza que impacte sobre el aprendizaje, lo mejor que se puede hacer es promover la solución de problemas entre los asistentes, de manera tal que se cumpla con la consigna piagetiana de “conocer desde la acción”.

Debido a que este trabajo se realiza con estudiantes de 10 años de edad, nos enfocaremos a explicar al desarrollo cognitivo de este nivel.

La teoría Piagetiana coloca a los niños de 7 u 8 años hasta los 11 o 12 años en el estadio de las operaciones concretas. Desde esta perspectiva, el niño es capaz de resolver problemas frente a situaciones concretas y desarrolla conceptos lógicos que se van integrando en forma progresiva. Para poder razonar, el niño necesita la presencia concreta de los objetos. Puede comparar el tamaño de tres objetos y ordenarlos a partir de comparaciones sucesivas, pero si se le plantean esas relaciones en el terreno de lo abstracto, el niño no las podrá realizar (Lejarraga, 2004)

Las operaciones son consideradas como acciones reales o internalizadas y reversibles y coordinadas a otras operaciones en una estructura de conjunto que comporta leyes de totalidad, acciones que se logran sólo en la tercera etapa es decir el de las operaciones concretas. (Piaget, 1990).

Desde este posicionamiento, el conocimiento matemático es el resultado de la acción sobre una acción, es decir a una abstracción reflexiva o reflexionante, esta abstracción se dirige tanto a sí misma como a la operación realizada con los objetos.

En suma podemos afirmar que para Piaget es de gran importancia la acción del sujeto sobre el objeto y a partir de esas relaciones podrá surgir el conocimiento, por tanto, de alguna manera parecería implicar que la construcción de nociones algebraicas serían alcanzadas en un posterior estadio como es el de las operaciones formales entre los 11 y 12 años.

Así mismo para Vygotski “el desarrollo de los procesos que pueden dar lugar más tarde a la formación de conceptos tiene sus raíces en la primera infancia, pero aquellas funciones intelectuales cuya combinación constituye el fundamento psíquico del proceso de formación de los conceptos, maduran, se forman y se desarrollan sólo al llegar a la edad de la pubertad.” (1992:130).

A partir de la problemática de la enseñanza y del aprendizaje del álgebra que se ha mencionado anteriormente y de las propuestas de iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas por diversos autores, por todo ello, se propone una investigación basada en

## EMPLEO DEL MODELO 3UV EN ALGEBRA TEMPRANA

el trabajo de conjuntar el modelo 3 UV en edades tempranas, es decir, trabajar los conceptos de variables algebraicas en niños de 3er. grado de la educación primaria. Esto se refiere a llevar a cabo una Investigación Básica, por lo cual, se plantea como **problema de investigación**, dar respuesta a la siguiente interrogante:

¿Qué implicaciones tiene un programa de intervención didáctica, basado en el modelo 3UV, en niños de 3er. grado de Primaria, en la manipulación, coordinación, simbolización e interpretación de la variable algebraica?

### Metodología

En este trabajo sólo se aborda la variable como Incógnita y como Número Generalizado, en función del tiempo y los contenidos abordados en la materia en el periodo en el cual se llevó a cabo esta intervención.

El **diseño** de investigación que se propuso, fue cuasi-experimental, pre-test y post-test en grupo control y experimental.

La muestra estuvo constituida por un total de 46 alumnos de nivel primaria, de una escuela privada, bilingüe de un nivel socioeconómico alto. Se asignaron 23 niños a grupo control (GC) y otro tanto a grupo experimental (GE) A todos los estudiantes de dichos grupos se les aplicó el cuestionario -el cual fue piloteado y evaluado previamente- en horario de clase, en el espacio dedicado a la materia de matemáticas.

El cuestionario que se diseñó consta de 51 reactivos de respuesta breve, en ellos se trata de poner énfasis en cada una de las caracterizaciones de la variable como incógnita y como número generalizado. Este diseño pretende facilitar un diagnóstico de cómo los niños manipulan, interpretan, simbolizan y coordinan la variable como incógnita y como número generalizado.

Para cada una de las dos caracterizaciones de la variable se incluyeron preguntas que permitían observar si los estudiantes: a) Interpretan correctamente la variable involucrada; b) Simbolizan de manera adecuada en un problema donde se presenta un tipo de variable; c) Manipulan las variables que aparecen en una expresión y d) Coordinan todas las habilidades anteriores.

Posteriormente, se llevaron a cabo las Intervenciones Didácticas, que consistieron en realizar actividades de clase que permitirían introducir y trabajar con la variable algebraica, específicamente la variable como incógnita y como número generalizado. Se llevaron a cabo 15 intervenciones didácticas de 45 minutos dentro del salón de clases de los alumnos, durante el tiempo destinado a matemáticas. En cada sesión se trabajó un tema en específico y se aplicó una actividad de práctica y/o de reforzamiento de lo trabajado durante la sesión.

Una parte importante de las actividades didácticas fue el poder trabajar con los niños actividades divertidas, como, loterías, adivinanzas, cuentos, etc. Un ejemplo de las actividades trabajadas durante la investigación (sesión 9) es la siguiente:

*Tema: Manipulación de Número Generalizado.*

• *Objetivo: Que el estudiante manipule la variable como Número Generalizado.*

1. *Representar entre todos los estudiantes un número desconocido en una tarjeta.*

## EMPLEO DEL MODELO 3UV EN ALGEBRA TEMPRANA

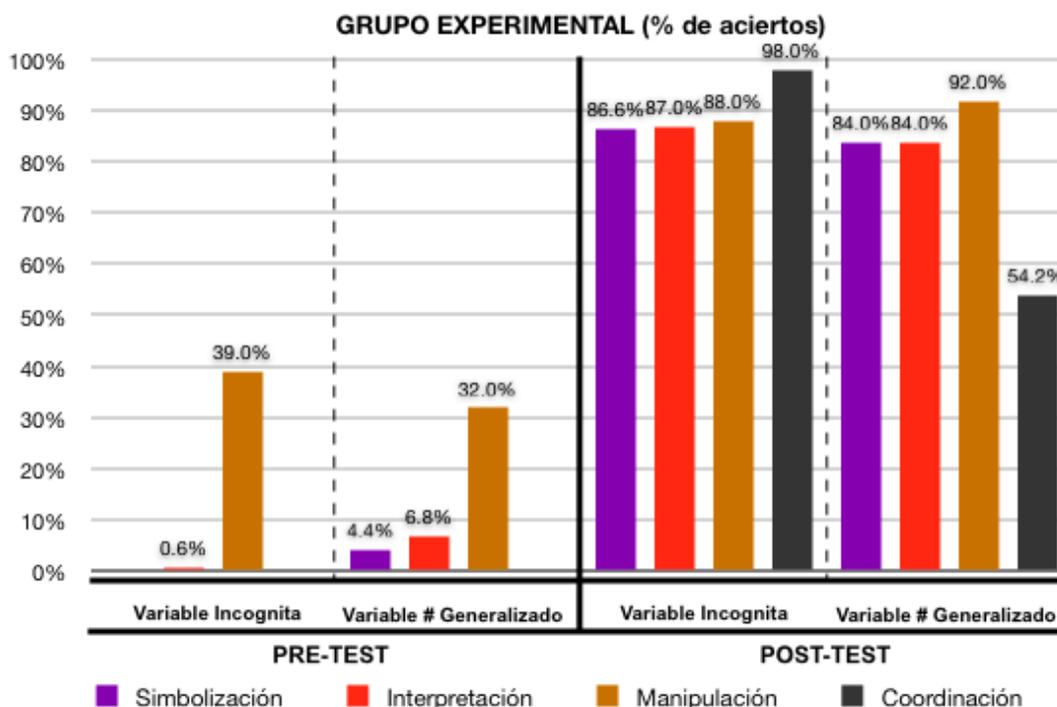
2. Repartir a cada estudiante 3 tarjetas con la representación de un número desconocido.
3. Jugar pirinola. Los valores de la pirinola son:  $+2m$ ,  $+3m$ ,  $-2m$ ,  $-m$ ,  $+m$ ,
4. Escribir en el pizarrón las operaciones que salgan del juego y buscar cómo resolverlas.
5. Hacer ejercicios escritos. Ejemplo:  $10t - 3t =$

### Resultados

Se observó una diferencia ampliamente significativa entre el pretest y el posttest en el grupo experimental, en todos los niveles, lo cual no ocurrió en el grupo control.

En la siguiente gráfica se muestra el porcentaje de aciertos del pre y post-test del grupo experimental. Presentando los resultados de la simbolización, interpretación, manipulación y coordinación de la variable de como Incógnita y como Número Generalizado.

Grafica 1. Análisis del porcentaje de aciertos de grupo experimental



	Pre-Test		Post-Test	
	Variable Incognita	Variable Número Generalizado	Variable Incognita	Variable Número Generalizado
Simbolización	0% aciertos	4.4% aciertos	86.6% aciertos	84% aciertos
Interpretación	0.62% aciertos	6.8% aciertos	87% aciertos	84% aciertos
Manipulación	39% aciertos	32% aciertos	88% aciertos	92% aciertos
Coordinación	0% aciertos	0% aciertos	98% aciertos	54.2% aciertos

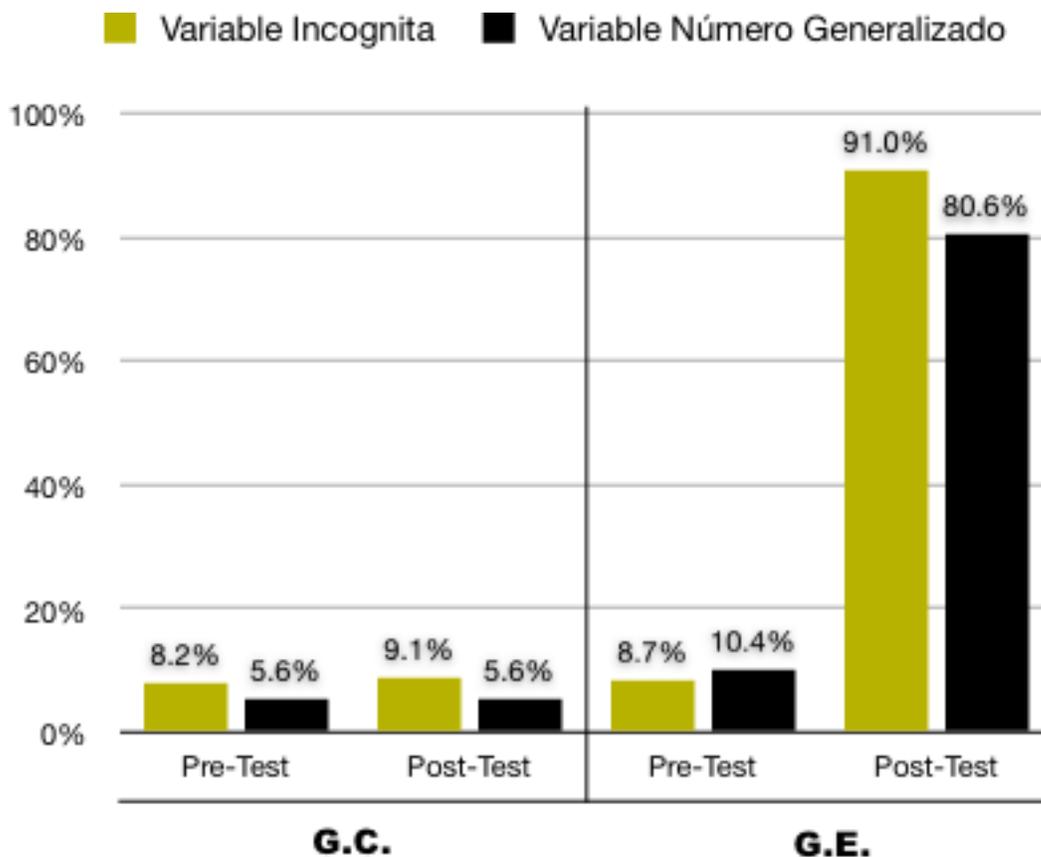
Al comparar los resultados entre ambos grupos encontramos una diferencia significativa en posttest a favor de quienes participaron en la situación experimental ( $t =$  , es decir, los niños que

## EMPLEO DEL MODELO 3UV EN ALGEBRA TEMPRANA

trabajaron las sesiones con el programa para favorecer el pensamiento algebraico a través del modelo 3 UV.

En la siguiente gráfica se presentan los resultados del porcentaje de aciertos totales del pre y post- test del grupo control y del grupo experimental.

Grafica 2. Análisis de porcentajes de aciertos de grupo control y grupo experimental



	GRUPO CONTROL (G.C.)		GRUPO EXPERIMENTAL (G.E.)	
	Pre-Test	Post-Test	Pre-Test	Post-Test
Variable Incognita	8.2	9.1	8.7	91
Variable Número Generalizado	5.6	5.6	10.4	80.6

### Conclusiones

Como pudo observarse, el Modelo 3 UV, resultó ser una herramienta muy útil en el desarrollo del pensamiento algebraico, en los niños participantes de este estudio, lo que nos lleva a proponer la pertinencia de nuevos trabajos de investigación que indaguen la aplicación de dicho modelo en otros espacios, así como también se pone de manifiesto la clara posibilidad por parte de los niños en edades tempranas de acercarse y trabajar con contenidos algebraicos de

manera exitosa, nosotros coincidimos, a partir de esta experiencia, y considerando las propuestas de varios investigadores (Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000, entre otros) en la conveniencia de introducir el álgebra a edades tempranas, pero no sólo como contenidos a manejarse de manera convencional, formal o lógica, sino como una forma de pensar entre muchas, y por ende como una forma de representar la realidad entre otras, a fin de no restringir el pensamiento a un pensamiento lógico, axiomático, deductivo, sino ampliar las posibilidades de pensar siempre de múltiples formas.

### Limitaciones

Un aspecto importante a considerar en el trabajo, es que la realización de esta intervención se llevó a cabo en una escuela con un nivel socioeconómico alto, y que quien condujo las estrategias didácticas es una estudiante con altos puntajes en su práctica docente, sin embargo, consideramos que aún en casos menos favorecidos socialmente podrían obtenerse resultados alentadores, por ello se propone para nuevas investigaciones, la realización de esta práctica a fin de determinar su pertinencia en otros espacios educativos.

### Referencias Bibliográficas

- Bastable, V. y Schifter, D. (2007). Classroom stories: examples of elementary students engaged in the early algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Bednarz, N., Kieran, C. & Lee. (Eds) (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht. Países Bajos: Kluwer.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446
- Carraher, D.W., Schliemann, A.D., Brizuela, B.M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*. 37(2), 87-115
- Carraher, D. W. y Schliemann, A.D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Reston, Virginia: NCTM e IAP.
- Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter. Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Países Bajos: Utrecht University.
- Kaput, J. J. (1998) Transforming algebra from an engine of inequity an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. In S. Fennel (Ed.) *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceeding of a National Symposium* (pp. 25-26). Washington, D.C.: National Research Council, National Academic Press.
- Kaput, J.J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J.J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.) *Algebra in the early grades* (pp. 5-17) New York, NY: Taylor & Francis Group.
- Lejarraga, H. (2004). Cinco perspectivas para el estudio del desarrollo del niño. En: *Desarrollo del niño en contexto*. Buenos Aires: Paidós.
- National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia.
- Piaget, J. (1990). El nacimiento de la inteligencia en el niños. México: Grijalbo.
- Ursini. S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática*. 6(3), 90-108.

## EMPLEO DEL MODELO 3UV EN ALGEBRA TEMPRANA

- Ursini, S. Trigueros, M. (2001) A model for the uses of variable in elementary algebra. En: M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.) Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, PME 25.Vol. 4. Freudenthal Institute. Faculty of Mathematics and Computer Science. Utrecht University. Utrech, Países Bajos, p.p. 327-334.
- Ursini, S., Trigueros, M. (2004) How do High School Students Interpret Parameters in Algebra? Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, PME 28. Bergen, Noruega.Vol. 4. p.p. 361-368.
- Ursini, S., y Trigueros, M (2006). Students' evolution in the understanding of variable. En Proceedings of 8<sup>th</sup> ICTM. Estambul, Turquía.
- Usinskin, Z. (1998) Conceptions of school algebra and uses of variable. En Coxford A. F. y Shulte, A.P. (Eds). The ideas of algebra K-12. Pp. 8-19. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics