Um estudo sobre Lógica e Demonstrações em Matemática

Debora Cristiane Barbosa **Kirnev**
Mestranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina
Brasil
deborabarbosa09@yahoo.com.br
Prof. Drª Angela Marta Pereira das Dores **Savioli**
Universidade Estadual de Londrina
Brasil
angelamarta@uel.br

Resumo

Considerando as demonstrações iniciais de um curso de matemática, principalmente em relação ao raciocínio lógico dedutivo desenvolvido por meio da argumentação, apresentamos uma pesquisa que visa detectar algumas dificuldades de graduandos em relação a esse tipo de prova. Trataremos, inicialmente, de alguns aspectos da lógica, no que tange à sua caracterização e pontos históricos, e de demonstrações, na Matemática e na Educação Matemática, utilizando principalmente Balacheff (1982,1988, 2002), em várias abordagens sobre prova em matemática. Exporemos a proposta aplicada aos estudantes, a qual contemplou algumas tarefas envolvendo conteúdos e propriedades de conjuntos. Finalmente, apresentaremos uma primeira análise dos registros escritos dos mesmos nessas tarefas.

Palavras chaves: Educação Matemática, Demonstrações, Raciocínio Lógico Dedutivo, Lógica, Conjuntos.

Abstract

Whereas the initial demonstrations of a mathematics course, mainly in relation to logical deductive reasoning developed through, we present a study that aims to detect some problems of students in relation to such evidence. We will deal initially with some aspects of logic, when it comes to characterization and historical displays, and demonstrations, in mathematics and mathematics education, mainly using Balacheff (1982.1988, 2002), various approaches to proof in mathematics. We will present the proposal applied to students, which included some tasks involving content and properties of sets. Finally, we present a first analysis of the written records of them in these tasks.

Keywords: Mathematics Education, Demonstrations, Logical Reasoning Deductive, Logic, Sets.

Introdução

Considerando a importância de demonstrações em um curso de Matemática quando se trabalha com o Ensino Superior, iniciamos nossa investigação, realizando um levantamento junto ao banco de teses e dissertações da CAPES, apreciando os últimos cinco anos e detectamos poucos trabalhos acerca deste tema. Elaboramos a seguinte questão de investigação, visando nortear nosso trabalho: "que dificuldades graduandos em matemática teriam em demonstrações iniciais do curso?"

Como objetivo da pesquisa, visamos detectar as dificuldades apresentadas por graduandos em matemática em demonstrações iniciais desse curso, principalmente em relação ao raciocínio lógico dedutivo desenvolvido por meio da argumentação.

A princípio examinamos as ementas de algumas disciplinas de um curso de matemática. Estávamos focados em desenvolver a pesquisa abrangendo algumas formas de demonstração, isto é, demonstração direta, contrapositiva e por absurdo, a fim de verificar as possíveis dificuldades. Porém, em meio às inquietações iniciais, questionamos: e 'se o estudante pesquisado tiver dificuldade no conteúdo trabalhado e não na forma de demonstração, como iremos lidar com isso?' Este questionamento fez com que refletíssemos e o foco da pesquisa foi direcionado para demonstrações que abrangessem Conjuntos, sendo este um dos primeiros conteúdos trabalhado, o qual contempla as formas de demonstrações citadas anteriormente.

Ao desenvolver tarefas sobre demonstrações matemáticas com o conteúdo Conjuntos esperamos que as dificuldades em demonstrações aflorem nos registros escritos dos estudantes. Destarte, acreditamos ser possível detectar se o mesmo possui dificuldades nas formas de demonstrações ou no conteúdo trabalhado, uma vez que não há como desvincular as demonstrações dos conteúdos. A proposta de tarefas foi construída com esse propósito e constituiu-se de questões envolvendo o conteúdo Conjuntos, das quais quatro solicitavam demonstrações.

As análises dos protocolos foram realizadas segundo os pressupostos teóricos, quais sejam as provas apresentadas principalmente por Balacheff.

Iniciaremos com uma breve história da Lógica, com provas e demonstrações, exporemos a proposta de tarefas aplicada a estudantes graduandos em matemática de uma universidade paranaense e, finalmente, uma análise inicial dos protocolos obtidos, segundo os referenciais teóricos.

Sobre a lógica

O pensamento humano trabalha com conceitos e definições, chegando a convicções, raciocínios e outros conceitos. Estudiosos do psicologismo afirmam que a lógica seria a ciência das leis do pensamento, como aponta Rosa "elas representariam operações básicas da mente humana, descreveriam empiricamente o modo como nós (que possuímos a constituição mental que possuímos) pensamos e seriam, portanto, leis do nosso pensamento ou raciocínio (Rosa, 2010, pg. 1)."

O raciocínio se desenvolve por meio de um processo argumentativo para se chegar a uma conclusão partindo de premissas e seguindo regras definidas para lógica formal podemos verificar se essas inferências são válidas ou não válidas. Deste modo a lógica promove a correção do processo do raciocínio humano, sendo um instrumento para a construção do conhecimento.

Início da Lógica: Aristóteles

Segundo Machado e Cunha (2008) o primórdio da lógica surgiu com Aristóteles por volta do século IV a.C. seu trabalho consistiu em caracterizar as formas legítimas de argumentação para distingui-las das sentenças que pareciam corretas, mas que foram construídas ou de forma inadequada, esta caracterizada como falácia, ou com o intuito de enganar, esta caracterizada como sofisma.

Um argumento é formado de uma ou mais premissas e uma conclusão, sendo que as premissas e a conclusão correspondem a proposições. Proposição é uma frase declarativa que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambas, sendo assim, as frases exclamativas, interrogativas e imperativas não podem ser classificadas como proposições.

Para termos um argumento válido é necessário que exista uma ligação entre as premissas. Definimos esta ligação como termo médio, de modo que ao estabelecer esta ligação, torna-se impossível ter simultaneamente as premissas verdadeiras e inferirmos uma conclusão falsa , caso contrário, o argumento não é bem construído e dizemos que este é não válido, isto é, trata-se de uma falácia ou de um sofisma. Vale ressaltar que somente as proposições são classificadas como verdadeiras ou falsas, os argumentos são classificados como válido ou não válido.

Ao argumentarmos temos a intenção de justificar a veracidade da conclusão, assumindo premissas verdadeiras para a argumentação. Para garantir a verdade da conclusão torna-se necessário: a verdade das premissas e uma argumentação coerente.

Segundo os mesmos autores Aristóteles classificou as proposições em categorias, sendo conhecidas como proposições categóricas, caracterizada pelo uso de quantificadores. A estrutura dos argumentos formados por proposições categóricas, constituídos por duas premissas e uma conclusão, é chamada de silogismo. No silogismo aristotélico, cada proposição é composta de um sujeito e um predicado. O termo médio entre as duas premissas deve representar um elemento – sujeito ou predicado – em comum. A estrutura dos argumentos das proposições categóricas, desenvolvida por Aristóteles, foi representada por Leonhard Eüler, em torno de 1770, em forma de diagramas que contemplam as premissas e a conclusão. Por volta de 1880, o matemático inglês Venn, aperfeiçoou os diagramas desenvolvidos por Eüler, mas o que ocorre é que, usualmente utilizamos a representação de Eüler e atribuímos o nome de diagramas de Venn. Os diagramas possibilitam, por meio da inspeção direta, avaliarmos se uma argumentação é válida ou é um sofisma.

Lógica Matemática: Boole

Segundo Daghlian (1995), George Boole (1815-1864) marcou o período contemporâneo da Lógica promovendo novos estudos a partir da sua obra The mathematical analysis of logic (1847).

Este mesmo autor afirma que Boole em sua obra Investigations of the laws of thoght (1854) introduziu a álgebra da lógica, em que são válidas as leis da álgebra matemática quando os valores se limitam a 0 e 1. Seus estudos deram origem as álgebras booleanas que receberam o nome deste matemático inglês, sendo o primeiro a defini-las como parte de um sistema de lógica em meados do século XIX. A álgebra booleana caracteriza-se por utilizar técnicas algébricas para lidar com expressões do cálculo proposicional.

A Álgebra de Boole é definida por uma série de símbolos, estruturados para representar fenômenos que, encadeados convenientemente, dão lugar a expressões matemáticas mais complexas, denominadas funções.

Na álgebra tradicional opera-se com relações quantitativas, porém na Álgebra de Boole opera-se com relações lógicas. Isto implica que na álgebra tradicional as variáveis podem assumir qualquer valor, mas na álgebra booleana as variáveis são denominadas por variáveis binárias, que assumem um de dois valores binário, e estes valores binários não exprimem quantidades, mas sim estados do sistema.

A lógica booleana tem uma grande importância no mundo digital. Está é aplicada em diversas áreas como as memórias digitais, os circuitos discretos, ou os microprocessadores.

Lógica Moderna: Frege

Uma concepção diferente das anteriores é a de Gottlob Frege (1848-1925). Segundo Hegenberg (1977) sua obra mais conhecida é Grundlagen der Arithmetik (1884), uma característica da obra era de verificar até que ponto a aritmética poderia ser construída à custa de princípios do pensamento, sem qualquer recurso aos enunciados empíricos com o intuíto de mostrar que a aritmética poderia ser construída exclusivamente a partir de leis da lógica.

São créditos de Frege o que se chama hoje de cálculo sentencial, como também, a distinção clara de o que são as premissas em que se baseia um raciocínio e as regras de inferência, ou seja, quais regras e como proceder para comprovar uma dada tese a partir das premissas.

Ainda segundo Hegenberg (1977), Frege não comparou a Lógica e a Matemática e sua simbologia não era adequada para fins matemáticos, mas influenciou os estudos de B. Russell (1872-1970) e A. N. Whitehead (1861-1947) autores da importante obra Principia Mathemática, que favoreceu o avanço da lógica e Wittgenstein (1889-1951), aluno de Frege, atribuiu à noção de "verdade lógica", como também escreveu importantes obras no campo da filosofia da linguagem.

Atualmente há inúmeros sistemas lógicos como afirma Machado e Cunha (2008) quando falamos em lógica, num contexto de ciência, estamos, geralmente, nos referindo à lógica formal, também chamada lógica clássica ou de Aristóteles. Porém restrições impostas às sentenças sobre as quais se debruça a lógica clássica não dá conta das inúmeras experiências humanas que não podem ser traduzidas em sentenças classificáveis, exclusivamente, em verdadeiras ou falsas, mostrando-se insuficiente na representação dos vários tipos de argumentos informais. Surge então a necessidade da lógica não-clássica, que segundo estes autores são caracteriza por:

- extensões da lógica clássica, por incorporarem mais recursos expressivos, entre elas as lógicas temporais, lógicas modais.
- alternativas à lógica clássica, por rejeitarem algum de seus princípios, entre elas as lógicas trivalentes, lógicas polivalentes, lógicas paraconsistentes.

Neste trabalho nos ateremos apenas em aspectos da lógica clássica ou lógica formal.

Sobre Demonstrações

Provas e demonstrações

Que diferenciações há entre os termos provas e demonstrações?

Segundo Almouloud (2009) os termos são utilizados como sinônimos e muitos autores fazem uso dos termos provas e demonstrações como tal. Contudo, recorremos à distinção realizada por Balacheff (1982), o qual afirma que provas são explicações realizadas em um determinado momento para um determinado grupo social. Balacheff (1982) denomina que as demonstrações são provas particulares.

Demonstrações em Matemática

Em Matemática é necessário definir os conceitos de modo que esta definição satisfaça as características de tal conceito e somente deste conceito, e posteriormente provar ou demonstrar as propriedades relacionadas a este, o que difere esta ciência das demais que aceitam provas empíricas.

Bicudo (2002) em seu artigo sobre demonstrações matemáticas afirma que em termos da lógica uma demonstração trata-se de um sistema formal que é a parte sintática de um sistema axiomático, composto pela linguagem e seus símbolos, expressões e fórmulas, pelos axiomas e pelas regras de inferência. Estes componentes afirma sob certas condições a conclusão da regra que pode ser inferida de outras regras chamadas de hipótese.

As demonstrações são as únicas aceitas pelos matemáticos, por provar que uma afirmação matemática é verdadeira fazendo o uso de uma sequência de proposições deduzidas logicamente a fim de justificar uma conclusão. Durante este processo, algumas proposições são aceitas sem demonstração, chamadas de axiomas, e outras que já foram provadas são usadas para que a partir de uma hipótese aceita como verdade, possamos provar que uma tese é verdadeira.

Demonstrações em Educação Matemática

Durante uma demonstração matemática um indivíduo faz uso da razão ou racionalidade como afirma Balacheff (2002) e por meio deste processo se desenvolve o raciocínio lógico necessário para se demonstrar. Ao afirmar sobre a racionalidade, Balacheff (2002, pg. 1) esclarece que esta "é densa em toda a vida do ser humano, seja em um indivíduo ou em um nível coletivo. Por 'racionalidade' entendemos o sistema dos critérios ou regras mobilizados quando se tem que fazer escolhas, tomar decisões, ou para realizar julgamentos. Na verdade, uma grande parte da nossa vida tem a ver com informação, alegação, discussão, argumentação. Essas regras e critérios poderia tanto ser um dado adquirido que permanecem implícitos - o que é, em geral, no caso da chamada vida de todos os dias - ou poderiam ser explícita ou mesmo formalizada - o que é o caso quando se tem de justificar a sua ou seu pedido para a verdade ou a validade de uma declaração ou uma ação. Essas regras e critérios poderiam originar-se de opinião, crença ou saber, mas em todos os casos, eles são organizados em uma estrutura, que permite a tomada de decisão."

Podemos afirmar que durante o processo de uma demonstração está envolvida a racionalidade do indivíduo que muitas vezes é denominado por raciocínio lógico dedutivo. A respeito disso Balacheff afirma que "a racionalidade nos permite raciocinar e decidir, é então a base de qualquer processo de prova. Como vemos a racionalidade em geral, e sua relação com a matemática, em particular, é um ponto chave para nossa compreensão de qualquer obra de arte em nosso campo de pesquisa. Pode-se aceitar, não com muita dificuldade, que a prova depende do conteúdo e contexto." Balacheff (2002, pg. 2)

Balachef (1988) apresenta dois tipos de provas denominadas de prova pragmática e prova conceitual. As provas pragmáticas são produzidas por pessoas que tomam como base fatos e ações, sem um formalismo lógico, também tida como "mostrações", pois os resultados apresentados são por meio de exemplos. As provas conceituais se caracterizam por formulações de propriedades e as possíveis relações entre elas. Deste modo as demonstrações matemáticas seriam um tipo de prova conceitual.

Balacheff (1988) admite existir vários níveis de provas pragmáticas e provas conceituais que podem ser classificados da seguinte maneira:

Empirismo ingênuo: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização;

Experimento crucial: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar;

Exemplo genérico: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos;

Experimento de pensamento: consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos.

Segundo Balacheff (1988) as provas pragmáticas são classificadas ao nível do empirismo ingênuo e do experimento crucial e as provas conceituais são consideradas ao nível do experimento de pensamento. Há ainda, as provas ao nível do exemplo genérico que caracterizam um período de transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais.

Além de refletirmos sobre o processo em que uma demonstração está envolvida também precisamos estabelecer quais as finalidades das demonstrações. Mariotti e Balacheff (2008) afirmam que demonstrações matemáticas proporcionam ao estudante importantes elementos matemáticos, como estratégias e métodos para resolver problemas. Para se demonstrar uma proposição é preciso ter uma noção sobre o objeto matemático, estabelecer relações com axiomas ou proposições anteriormente provadas e, caso seja um objeto desconhecido, promover a investigação sobre o mesmo. Quando finamente demostra uma afirmação matemática o autor precisa estar convencido de que o resultado é válido.

Neste mesmo aspecto Fawcet afirma que a " respeito do conceito de prova o aluno deve ter uma compreensão cada vez maior e crescente. É um conceito que não só permeia seu trabalho em matemática, mas também está envolvido em todas as situações onde as conclusões estão a ser atingidas e decisões a serem tomadas. A Matemática tem a contribuição única a fazer no desenvolvimento deste conceito. "(Fawcet, 1938 apud Balacheff 2002, pg. 2).

Garnica (2002), em seu artigo sobre demonstrações em Educação Matemática, afirma que a prova rigorosa, realizada nos termos da lógica, é tida como elemento de prática científica da Matemática e fundamental na formação inicial do professor em uma abordagem crítica dos objetos matemáticos. Em suas referências sobre prova rigorosa vale ressaltar que: “a prova rigorosa é elemento essencial para compreendermos o funcionamento do discurso matemático e o modo como são formadas as concepções em um ambiente de sala de aula.”

Vimos que, sobre diferentes aspectos, a demonstração matemática é fundamental para a formação do matemático, tanto que autores como Rav (1999), Hanna e Barbeau (2008) defendem que elas são o coração da matemática, sendo relevantes as pesquisas acerca desse assunto uma vez que existem dificuldades do desenvolvimento do raciocínio matemático de graduandos dos cursos de graduação em matemática. Sendo assim as demonstrações matemáticas são essenciais para o desenvolvimento do conhecimento matemático, pois estas permeiam inúmeras atividades matemáticas.

Proposta de tarefas

Levaremos em consideração que para trabalhar com demonstrações matemáticas precisamos de um contexto e conteúdo conforme o proposto por Balacheff (2002). Deste modo, pesquisamos na ementa da disciplina de Elementos da Matemática, da universidade em que aplicamos as tarefas, quais eram os conteúdos trabalhados e as formas de demonstrações utilizadas.

Constatamos que a lógica é trabalhada antes de iniciar os conteúdos sobre Conjuntos e implicitamente em todos os outros conteúdos. Destarte, optamos em abordar alguns elementos deste conteúdo, por ser o primeiro que contempla as formas de demonstrações.

Na elaboração das tarefas utilizamos como referência o primeiro capítulo da 4ª edição do livro de Álgebra Moderna de Domingues e Iezzi (2003). Neste há uma abordagem sobre Conjuntos e formas de demonstrações. Consideramos que para se demonstrar, um estudante pode ter dificuldades relacionadas ao conteúdo ou à demonstração matemática, sendo assim temos questões relacionadas ao conteúdo, as quais discutem a respeito dos elementos utilizados nas demonstrações. Tais questões abrangeram os principais elementos envolvidos com Conjuntos e requerem definições. Consideramos que se o estudante definir corretamente os itens propostos nas questões que não envolvem demonstrações estes, provavelmente, não apresentariam dificuldades de conteúdo.

Posteriormente às questões sobre conteúdo, propusemos afirmações que possibilitariam demonstração direta, ou contrapositiva, ou condicional, ou por redução ao absurdo. Nesta segunda etapa da proposta de tarefas foi necessário o uso das definições antes questionadas, que estavam interrelacionadas, utilizando a argumentação na estrutura da lógica formal e tivemos o objetivo de constatar que dificuldades os estudantes apresentariam ao lidarem com essas tarefas.

A aplicação das tarefas nos sujeitos da pesquisa ocorreu em uma amostra de treze participantes, os quais são identificados com os códigos de A_1 até A_{13}. No início da aplicação foi realizada a apresentação da pesquisadora e da proposta de tarefas, informando aos estudantes que se tratava de uma pesquisa sobre demonstrações matemáticas.

As tarefas referentes ao conteúdo constam no quadro a seguir, na mesma ordem da aplicação, juntamente com os comentários sobre as definições apresentadas pelos estudantes.

1)O que são conjuntos?
- Todos responderam.
- A maior parte dos alunos apresentou uma definição.
- Alguns poucos apresentaram exemplos particulares de conjuntos.

2)Em sua opinião, quais das palavras a seguir apresentam relação com conjuntos? Se existir, caracterize.
a)Classe:
b)Coleção:
c)Elemento:
d)Pertinência:
e)Relação:
f)Função:
g)Partição:
h)Números:
i)Intervalo:
- Todos responderam.
- Muitos apresentaram dificuldades de interpretação do enunciado.
- Alguns apresentaram erros conceituais.
- Houve um caso em que compreendeu classe como classe de alunos.

3)Qual a diferença de classe, coleção e conjunto?
- Apenas três estudantes responderam e nenhum conseguiu diferenciar claramente os itens.

4)Defina o conceito de pertinência em relação aos conjuntos?
- Há seis questões respondidas.
- Associação do pertence ao está contido como sinônimos.
- Há duas definições coerentes.

5)O que são subconjuntos?
- Há doze questões respondidas.
- Há uma definição coerente.
- Em um caso o aluno assumiu que o subconjunto pertence a outro conjunto.

6)O que são conjuntos disjuntos?
- Há sete questões respondidas
- Algumas definições estão coerentes.
- Há erros conceituais.

7)Escreva sobre o conjunto vazio.

• Todos responderam coerentemente.
8)Como você relaciona os diagramas de Eüler-Venn e conjuntos?
• Há dez questões respondidas.
• Algumas coerentes outras não.
9)Defina interseção e união de conjuntos.
• Todos responderam as questões.
• Há definições formais completas, incompletas e informais.
• Há erros conceituais, trocas da definição de interseção pelo de união e vice-versa.
10) Sejam A e B conjuntos não vazios, defina complementar de A em relação a B e a diferença entre A-B e B-A? O que você concluí?.
• Todos responderam as questões.
• Há erro na definição de complementar, erro de notação.
• Há um caso que exemplificou.
11)Defina os conjuntos numéricos? O que os distingue? Dê alguns exemplos.
• Todos responderam.
• Há muitas divergências nas respostas.
• Algumas das respostas foram coerentes
• Houve um caso de exemplificar com os conjuntos dos pares e dos ímpares.
• Houve um caso de distinção de conjuntos numéricos "pelas operações básicas".

Analisando as questões sobre o conteúdo pudemos concluir que os estudantes possuem algum conhecimento prévio sobre Conjuntos. Contudo, o que ocorreu é que em algumas definições específicas, os estudantes apenas exemplificaram.

A seguir apresentamos as questões que se referem às demonstrações matemáticas.

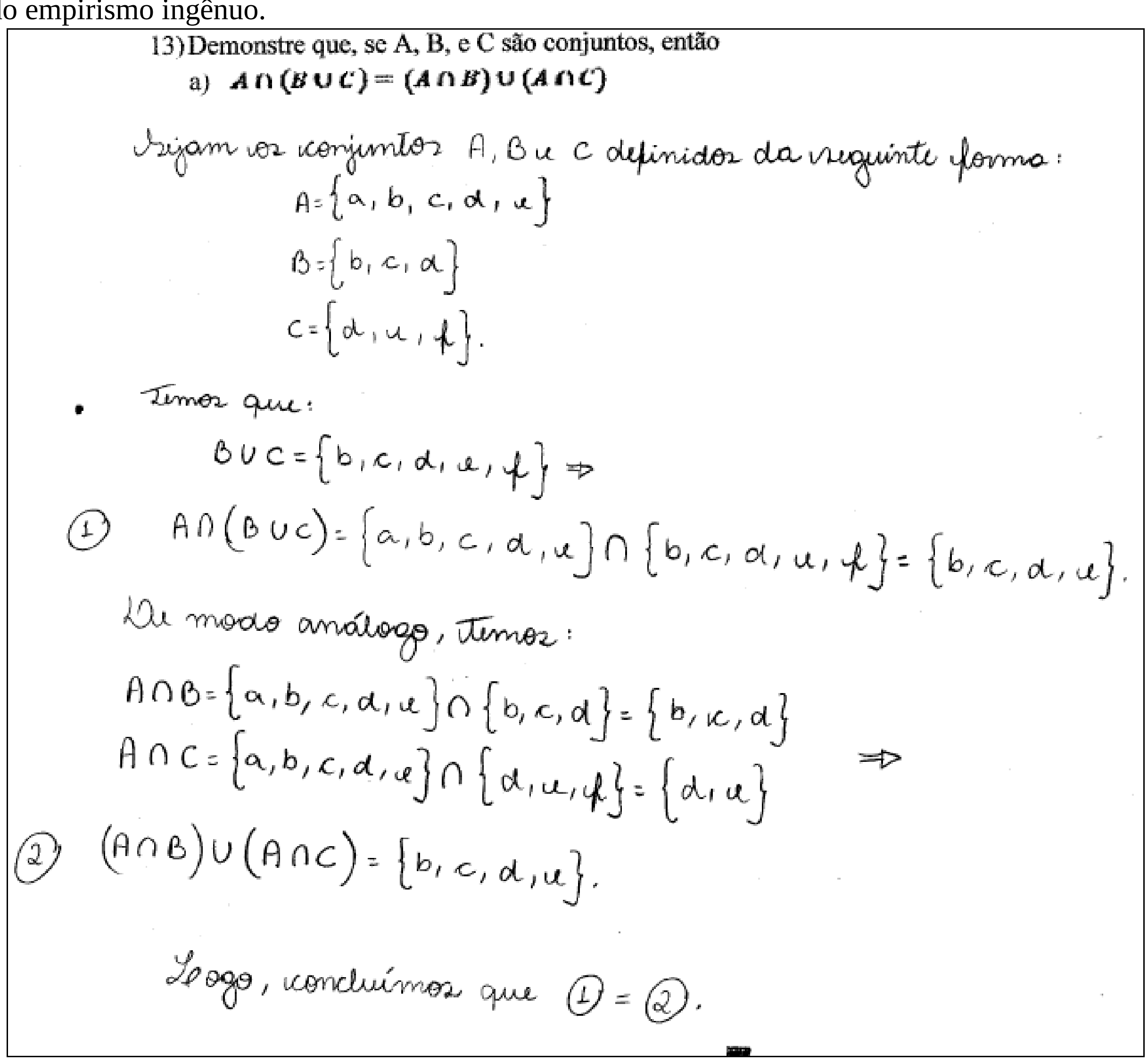
12) Demonstre que para qualquer conjunto A, temos que $\emptyset \subseteq A$.
• Há seis questões respondidas.
• Há duas tentativas de demonstração por absurdo.
• Há quatro que afirmam que a proposição é uma definição.
13)Demonstre que, se A, B, e C são conjuntos, então:
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
• Doze responderam as questões.
• Há sete demonstrações com argumentação coerente e erro conceitual do conteúdo.
• Há uma demonstração parcial.
• Há uma demonstração usando equivalência lógica.
• Há três demonstrações com exemplos.
b) $(A \cup B)^C = A^c \cap B^c$
• Nove responderam a questão
• Seis demonstrações com argumentação coerente.
• Uma demonstração por absurdo usando equivalência lógica.
• Duas demonstrações com exemplos.

c) $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$
• Onze responderam a questão.
• Há três demonstrações por absurdo.
• Há quatro demonstrações com argumentação coerente.

• Há uma demonstração parcial.

Ao analisarmos as demonstrações matemáticas agrupamos conforme Balacheff (1988) em provas pragmáticas e provas conceituais e, a princípio, tivemos o seguinte:

-Provas pragmáticas: neste agrupamento tivemos evidências do empirismo ingênuo. Da amostra, dois estudantes apresentaram apenas exemplos e não utilizaram, em nenhum momento, uma prova conceitual; um estudante ora apresenta exemplos ora apresenta uma prova conceitual em tarefas distintas, neste caso notamos uma transitoriedade entre as provas pragmáticas e as provas conceituais, sendo assim este estudante apresenta um exemplo genérico para demonstrar. Estes estudantes analisados não apresentaram dificuldades de conteúdo nas demonstrações, porém segundo a análise dos protocolos não utilizaram o método dedutivo para demonstrar, apresentando dificuldades em lidar com as mesmas. A seguir, temos o protocolo da questão 13) a) do estudante A8 que entende uma demonstração como uma "mostração", uma característica do empirismo ingênuo.


13) Demonstre que, se A, B, e C são conjuntos, então

a) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Sejam os conjuntos A, B e C definidos da seguinte forma:

$A=\{a, b, c, d, e\}$

$B=\{b, c, d\}$

$C=\{d, e, f\}$.

• Temos que:

$B\cup C=\{b, c, d, e, f\} \Rightarrow$

(1) $A\cap(B\cup C)=\{a, b, c, d, e\}\cap\{b, c, d, e, f\}=\{b, c, d, e\}$.

De modo análogo, temos:

$A\cap B=\{a, b, c, d, e\}\cap\{b, c, d\}=\{b, c, d\}$

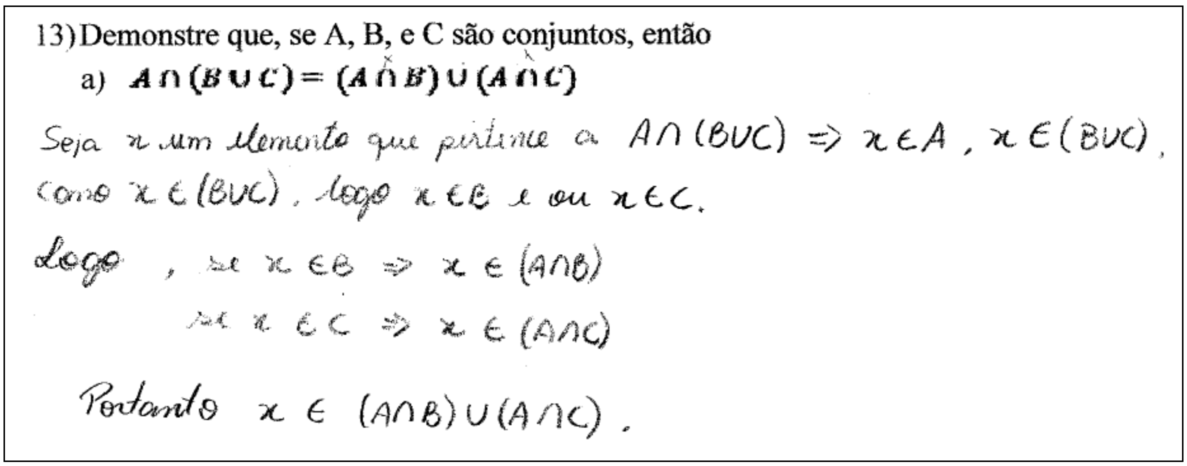
$A\cap C=\{a, b, c, d, e\}\cap\{d, e, f\}=\{d, e\} \Rightarrow$

(2) $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{b, c, d, e\}$.

Logo, concluímos que (1) = (2).

Figura 1- registro do estudante A_8

- Provas Conceituais: neste agrupamento tivemos evidência do experimento de pensamento. Da amostra, nove estudantes apresentaram provas com o uso do raciocínio lógico dedutivo; algumas foram demonstrações parciais outras completas. Podemos subdividir em dois novos grupos: os que apresentaram dificuldades de conteúdo e os que não apresentaram esta dificuldade. Os que apresentaram dificuldade de conteúdo utilizaram de definições inconsistentes. Deste modo o argumento era não válido, porém se considerarmos a estrutura da demonstração podemos inferir que os estudantes não apresentaram dificuldades quanto à forma de demonstrar, e sim na validação do argumento. Aos que não apresentaram dificuldades neste conteúdo a argumentação estava coerente, logo válida, assim podemos afirmar que a demonstração foi satisfatória. A seguir temos dois protocolos da mesma questão abordada anteriormente, o do estudante A11, em que temos uma demonstração parcial, e o do estudante A4 que apresenta uma demonstração que atende a forma de demonstração, porém utiliza um argumento não válido por não usar corretamente uma definição, e deste modo sua demonstração está incoerente.


13) Demonstre que, se A, B, e C são conjuntos, então

a) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

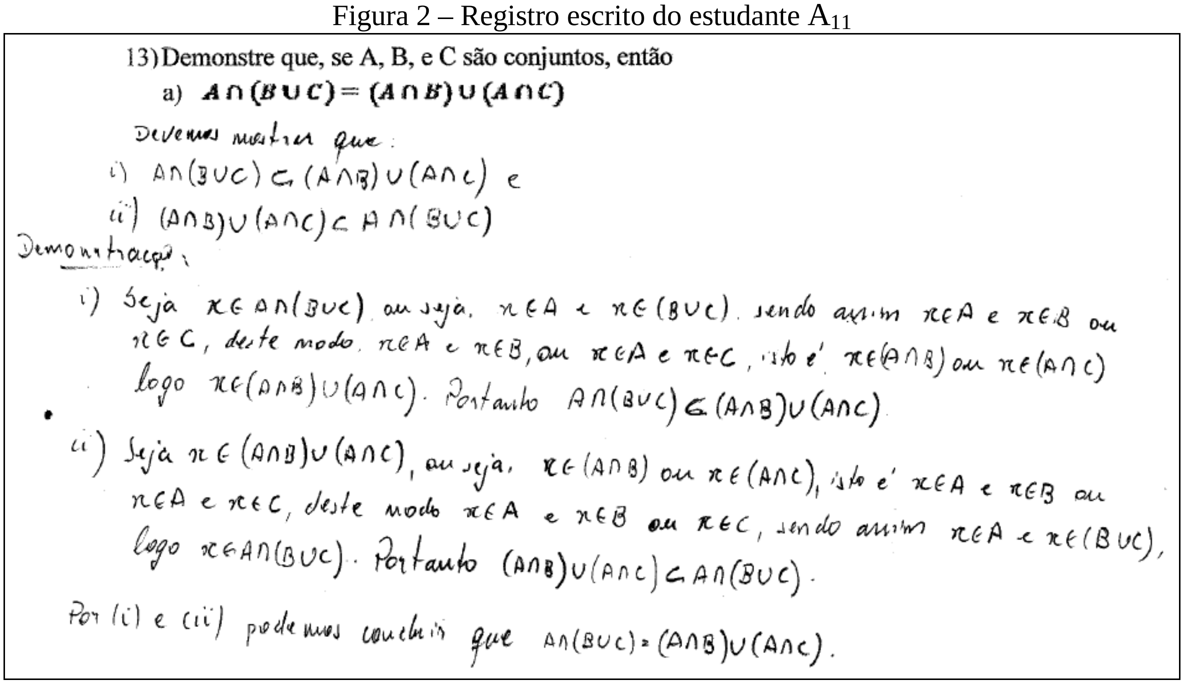
Seja x um elemento que pertence a $A\cap(B\cup C) \Rightarrow x\in A$, $x\in(B\cup C)$, como $x\in(B\cup C)$, logo $x\in B$ e ou $x\in C$.

Logo, se $x\in B \Rightarrow x\in(A\cap B)$

se $x\in C \Rightarrow x\in(A\cap C)$

Portanto $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Figura 2 – Registro escrito do estudante A_{11}


13) Demonstre que, se A, B, e C são conjuntos, então

a) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Devemos mostrar que:

i) $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$ e

ii) $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$

Demonstração:

i) Seja $x\in A\cap(B\cup C)$ ou seja, $x\in A$ e $x\in(B\cup C)$. sendo assim $x\in A$ e $x\in B$ ou $x\in C$, deste modo, $x\in A$ e $x\in B$, ou $x\in A$ e $x\in C$, isto é, $x\in(A\cap B)$ ou $x\in(A\cap C)$ logo $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Portanto $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$

ii) Seja $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, ou seja, $x\in(A\cap B)$ ou $x\in(A\cap C)$, isto é $x\in A$ e $x\in B$ ou $x\in A$ e $x\in C$, deste modo $x\in A$ e $x\in B$ ou $x\in C$, sendo assim $x\in A$ e $x\in(B\cup C)$, logo $x\in A\cap(B\cup C)$. Portanto $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$.

Por (i) e (ii) podemos concluir que $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Figura 3 – Registro escrito do estudante A_4

Além destes estudantes analisados temos um caso em que o estudante A3 não demonstrou os resultados das tarefas propostas na segunda parte, apenas apresentou algumas definições referentes aos conteúdos.

Nesta proposta de tarefas podemos notar que os estudantes analisados apresentaram dificuldades de conteúdo e em demonstrações matemáticas. Nos limitamos a uma análise preliminar, pois precisamos nos aprofundar nos referenciais teóricos para realizarmos inferências, mas prosseguiremos nossa pesquisa para evidenciar dificuldades em demonstrações por meio de uma análise vertical e horizontal destes dados.

Bibliografia e referências

Balacheff, N.(1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches em Didactique des Matémathiques,* Grenoble, v. 3, n. 3, 261-304.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, n. 2,147-176.

Balacheff , N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In *David Pimm (Ed.). Mathematics Teachers and Children*. Hodder and Stoughton, London, 216-229.

Balacheff, N.(1999) Is Argumentation an Obstacle? *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Grenoble, n.1, may-jun.

Balacheff, N.(2004) *The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof*. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, Grenoble, n. 109.

Bicudo, I. (2002). Demonstração em Matemática. *Bolema*, ano 15, nº18,79-90.

Garnica, A. V. M. (2002). As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Bolema*, ano 15, nº18,91-99

Gerônimo, J. R., Franco, V.S. (2006). Fundamentos de Matemática: uma introdução à Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções.Eduem, Maringá-PR.

Hanna, G.(1989). Proofs that proove and proofs that explain. Proceedings of the 13rd. *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (PME 13). Paris, França. (2): 45–51.

Hanna, G.(1989) More than Formal Proof. For the Learning of Mathematics. 9 (1): 20–23.

Hanna, G. Proof,(2000) explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*. 44: 5–23.

Hanna, G., Barbeau, E .(2008) Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education 40*, 345 -353.

Hegenberg, L. (1977). *Lógica Cálculo Sentencia*,2ª ed., EPU, São Paulo-SP.

Machado, N. J., Cunha, M. O. da(2008). *Lógica e linguagem cotidiana - verdade, coerência, comunicação, argumentação*. 2ª ed., Autêntica, Belo Horizonte-MG

Mariotti, M. A.; Balacheff, N.(2008) Introduction to the special issue on didactical

and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics*

Education, Heidelberg, v.40, n.3, p. 341-344.

Nagafuchi, T.,Batista, I. L., *O que é demonstração? Aspectos Filosóficos*. disponível em <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/69-1-A-gt2_nagafuchi_ta.pdf> acesso em 13/01/2011.

Rosa, M. H. (2010). Frege, Wittgenstein e a Normatividade da Lógica. *Revista Índice*, vol. 02, n. 01.