



Niveles de razonamiento combinatorio que demuestran estudiantes universitarios.

Diego **Bonilla** Martínez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Colombia

dfbmartinez@hotmail.com

Mario **Rueda** Mejía

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Colombia

jeycoperfil@hotmail.com

Resumen.

Dentro del pensamiento probabilístico uno de los aspectos de gran importancia dentro del mismo es la combinatoria, así mismo la que esta tiene dentro del razonamiento probabilístico, además que como mostraron ciertos autores, los cuales determinaron que dichas operaciones tienen su desarrollo en las operaciones formales, aunque muchas personas no las desarrollan. Por ello la necesidad de establecer el nivel de razonamiento combinatorio que tienen estudiantes de primer semestre de licenciatura en matemáticas, para lo cual por medio de un enfoque mixto propondremos un instrumento en el cual se planteen una serie de situaciones combinatorias. De esta manera una de las dificultades principales que se presenta dentro de la población es la identificación de los elementos distinguibles e indistinguibles lo cual hace que en general obtengan un espacio muestral más grande.

Palabras claves: Combinatoria, Razonamiento combinatorio, distinción, indistinción, técnicas de conteo

El pensamiento probabilístico o estocástico es uno de los aspectos que con el paso del tiempo ha cobrado fuerza en el campo educativo y por ello la necesidad del desarrollo del mismo, puesto que según MEN (2006) éste pensamiento permite tomar decisiones en momentos donde la incertidumbre, el azar o el riesgo se hacen presentes, de manera que la información con la que se cuenta no es confiable, por lo cual resulta difícil predecir con toda certeza lo que pueda ocurrir. Además dicho pensamiento tiene su base dentro del razonamiento combinatorio ya que como afirma Roa (2000) numerosas investigaciones muestran que con frecuencia las personas adultas que presentan dificultades o sesgos dentro de su razonamiento probabilístico puede ser consecuencia de un razonamiento combinatorio deficiente. De esta manera el pensamiento probabilístico “se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de la

probabilidad y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y la combinatoria entre otras (MEN, 2006)”.

La capacidad combinatoria determina un aspecto fundamental del pensamiento formal. Puesto que dicho razonamiento constituye algo más que una parte de las matemáticas, y además se convierte en un esquema tan general como lo es la proporcionalidad y la correlación (Roa, Batanero, Godino & Cañizares, 1997).

Ahora bien, el término combinatoria será entendido como el arte de la enumeración de todas las formas posibles en que un número de elementos pueden ser organizados sin perder algún resultado posible, definido por Batanero, Godino & Navarro, (1997) Es por ello, que la combinatoria cobra gran importancia, dado que si el sujeto no tiene capacidad de enfrentarse a situaciones de tipo combinatorio y usar la idea de probabilidad, entonces el sujeto no puede generar un pensamiento probabilístico. Por su parte, Inhelder y Piaget (1955), sostienen que el razonamiento hipotético-deductivo, opera con las posibilidades que el sujeto descubre y evalúa por medio de la combinatoria, lo cual se da solamente en las operaciones formales.

Igualmente *Fischbein, Pampu y Minzat (1970)*, estudiaron el aprendizaje de conceptos combinatorios de niños entre 10 y 15 años, encontrando que ante tareas como estimar el número de permutaciones de un número de elementos, los estudiantes tienden a estimar un número menor del que es correcto aunque esta estimación mejora con la edad. En el experimento de enseñanza se partía de las variaciones con repetición con ayuda del diagrama de árbol, y en la cual se encontró que los alumnos aprendían la construcción del diagrama, pero eran pocos los que descubrían las fórmulas de las variaciones de 3 y 4 elementos. De esta manera los autores concluyeron

Que no se conocen suficientemente los mecanismos del razonamiento combinatorio. Muchos sujetos no son capaces de resolver problemas combinatorios aunque conocen las operaciones aritméticas requeridas. En opinión de Fischbein y sus colaboradores, la resolución de problemas combinatorios requiere un tipo de razonamiento para el que no hemos sido suficientemente preparados (según cita Roa (2000) (Fischbein, Pampu y Minzat, 1970)

Ahora bien, una de las principales dificultades respecto al razonamiento combinatorio son los bajos resultados que se han encontrado en diferentes clases de poblaciones, por lo cual Roa, Batanero & Godino (2003) establecen en su investigación que esos resultados bajos cuestionan los métodos actuales de enseñanza de la combinatoria. De esta forma con base en los argumentos anteriores, en donde se expone la importancia del razonamiento combinatorio dentro del pensamiento aleatorio y teniendo como referencia los resultados de algunas investigaciones donde se establece la importancia de la instrucción sobre este tipo de razonamiento sería conveniente establecer el nivel de razonamiento y los elementos relacionados al razonamiento combinatorio que son utilizados por estudiantes universitarios al momento de enfrentarse a situaciones de tipo combinatorio, puesto que esto permitiría encontrar cuales son las principales dificultades que los estudiantes presentan al enfrentarse a estas situaciones.

Aspectos teóricos relacionados al razonamiento combinatorio

Un primer aspecto fundamental es definir a que haremos referencia por *Razonamiento Combinatorio*, para lo cual como primera medida tomaremos lo planteado por Chervany, (1977) citado por (Norman L. Chervany, P. George Benson, & Raja K (1980)) determinan que el razonamiento estadístico es definido como: lo que un estudiante es capaz de hacer con el contenido estadístico, por ejemplo: recordar, reconocer y discriminar entre los conceptos

estadísticos. Igualmente éste puede ser entendido por la habilidad que el estudiante demuestra en el uso de conceptos estadísticos que emplea en la solución de problemas específicos. Ahora bien dentro de del razonamiento estadístico Chervany et al. (1977) establecen un modelo en el que se destacan tres etapas fundamentales las cuales son:

1. Comprensión: en la cual el reconocimiento del problema o tarea a realizar es una instancia de una categoría más general
2. Planificación y ejecución: es donde se da aplicación de estos métodos para el caso concreto que nos ocupa
3. Evaluación e interpretación: es donde se genera la evaluación de la validez de los resultados, como una manera de contrastar el problema inicial o pregunta con el resultado final.

Con base en las anteriores ideas y definiciones, se entiende por *razonamiento combinatorio* los procesos y procedimientos que son utilizados por las personas al momento de enfrentar situaciones de tipo combinatorio, en los cuales los procedimientos se enmarcan dentro de un árbol de ideas donde las personas toman decisiones frente al problema, basándose ya sea en un conjunto de intuiciones o heurísticas. Por otra parte, dicho razonamiento está enmarcado dentro de dos etapas fundamentales que son la comprensión de la situación, la cual implicara que se reconozcan las variables que intervienen dentro de la situación y la naturaleza de las mismas, lo cual, llevará al sujeto a planificar una estrategia de conteo que será llevada a cabo.

Ahora bien, el *Razonamiento Combinatorio* está vinculado a diferentes conceptos y procedimientos que se relacionan y que hacen su aparición a medida que el sujeto se enfrenta y realiza acciones respecto a la situación de tipo combinatorio.

Por tanto, el sujeto deberá definir o establecer los objetos y su característica frente a la situación, para lo cual utilizará un proceso de **etiquetación o enumeración**, el cual podemos entender como la utilización de la letra como un objeto ya que en este proceso según Socas, M (1996) las letras son vistas como objetos concretos como por ejemplo colores, nombres, sabores, etc. De manera que se elimina el significado abstracto de la letra y éste es remplazado por un aspecto mucho más concreto y real que ayudara al sujeto en el establecimiento de todas las configuraciones.

Por otra parte, una vez se han realizado el proceso de etiquetación o enumeración, el sujeto deberá identificar las características presentes dentro de la situación que tienen los objetos, dichas características harán referencia hacia la **distinción o indistinción** de los objetos o elementos. Cuando se habla de distinción de los elementos, se hace referencia a los objetos que a pesar de tener similitud en su naturaleza hay una cualidad que los distingue o diferencia de los demás elementos del conjunto; por otra parte la indistinción de los objetos o elementos nos indica que al menos un elemento del conjunto comparte la mismas características con otro elemento.

A partir de lo anterior, el sujeto empezara a construir todos los eventos aleatorios, dichos eventos según Canavos (1998), se encuentran en un espacio muestral y están formados por un grupo de resultados contenidos en éste.

Para la obtención del espacio muestral, el sujeto empezara la **construcción** de cada evento mediante la utilización de diferentes estrategias gráficas que se convertirán en un medio para la solución de la situación de tipo combinatorio y entre las cuales se encontraran las propuestas por Wilhelmi (2004), las cuales consisten en: *construcción de los objetos*, donde el sujeto trata

básicamente de realizar los dibujos de las representaciones de los elementos a combinar, ejemplo: los ejercicios con banderas y colores, en las que los estudiantes dibujan los elementos; por otra parte también puede utilizar la *simbolización de las configuraciones* la cual consiste en representar los elementos por medio de letras del alfabeto, ejemplo: (a, b, c) dicho procedimiento es el más común entre los estudiantes; por ultimo encontramos la utilización de *los diagramas de árbol* en donde se realizan los grupos posibles a través de la unión de flechas en forma de “árbol”, dicha estructura permite observar en forma ordenada los elementos de cada agrupación y las relaciones entre ellos a través de trazos que los unen.

A través de cualquier construcción grafica de los eventos, los sujetos se valen por **técnicas de conteo**, ya sean ordinales o multiplicativas: las técnicas ordinales de conteo para Sheldon (1994), establece que, en teoría muchos problemas pueden ser resueltos simplemente contando el número de diferentes maneras en que un evento pueda ocurrir, por lo tanto la matemática del conteo es formal y la llama análisis combinatorio; por otra parte las técnicas de conteo aritméticas son propuestas por Roa, Batanero y Godino (2003), las cuales se categorizan en tres reglas, la suma, el *producto* y el cociente para dar solución a problemas de tipo combinatorio en los cuales los sujetos no reconocen la operación combinatoria y se inclinan con alguna de las tres reglas. La regla de la suma está relacionada principalmente con el recuento y la enumeración de los eventos, es decir, es el mismo análisis combinatorio que se expuso anteriormente; el producto es la regla utilizada mediante la construcción de productos cartesianos en la resolución de problemas compuestos, con este método los sujetos pueden generar modelos combinatorios, en vez de emplear las formulas; por último la regla del cociente, la cual se refiere directamente con las relaciones de equivalencia que establecen los estudiantes al momento de desarrollar un modelo combinatorio entre operaciones combinatorias repetidas.

Metodología de investigación.

El propósito es determinar el nivel de razonamiento combinatorio que presentan estudiantes universitarios, en este caso de primer semestre del proyecto curricular de licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas (LEBEM), “los cuales no han tenido un curso previo de estadística o probabilidad”, se diseñó un instrumento cuya intención fue identificar las estrategias combinatorias, las herramientas algorítmicas y los elementos relacionados al razonamiento combinatorio que utilizan los estudiantes al momento de enfrentarse a situaciones de tipo combinatorio.

De esta manera, para dar respuesta al propósito planteado se utilizó un enfoque mixto donde se analizaron los datos, tanto cuantitativa como cualitativamente. Es por ello que se propuso a los estudiantes diferentes situaciones que involucraran la utilización de algunas de las operaciones combinatorias, dicho instrumento¹ consistió en situaciones propuestas en anteriores investigaciones como las realizadas por Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000).

Una vez aplicado el instrumento, los datos recolectados fueron clasificados usando una matriz de calificación, en la cual estableció con base en los datos recolectados, unos niveles de razonamiento que daban cuenta de los procesos realizados y las herramientas utilizadas por los estudiantes al momento de resolver situaciones de combinatorias. Dichos niveles hacen parte de

¹ Ver anexo #1.

la propuesta innovadora de este trabajo, a demás están referenciados desde el marco teórico, se representan en el siguiente cuadro:

Tabla 1.

Niveles de razonamiento combinatorio.

NIVEL 0. NO REALIZA EL PROCESO DEBIDO	CATEGORIA 1: No lo hace no responde.
	CATEGORIA 2: El sujeto busca dar solución a la situación por medio de un único objeto matemático, que no guarda relación con el objeto de estudio.
NIVEL 1. RECONOCIMIENTO DE VARIABLES DISTINGUIBLES E INDISTINGUIBLES	CATEGORIA 1: Asigna letras o números a los elementos que involucra la situación.
	CATEGORIA 2: Etiqueta cada elemento sin establecer los distinguibles o los indistinguibles.
	CATEGORIA 3: Asignación simbólica de cada elemento diferenciando los distinguibles y los indistinguibles.
NIVEL 2. CONTAR ORDENADAMENTE MEDIANTE SIMBOLOS Y GRAFICOS	CATEGORIA 1: Utiliza un procedimiento incompleto para construir los eventos o identifica un evento repetido como diferente.
	CATEGORIA 2: Construye todos los eventos del espacio muestral para identificarlos.
	CATEGORIA 3: Puede construir todos los eventos del espacio muestral identificando algunos de los eventos.
	CATEGORIA 4: Puede construir todos los eventos del espacio muestral identificando solo un evento.
NIVEL 3. PRINCIPIOS BASICOS DE SUMA Y PRODUCTO	CATEGORIA 1: Partiendo de las configuraciones elaboradas en el nivel 2 categoría 2, el sujeto cuenta cada evento e identifica el número total de eventos.
	CATEGORIA 2: Aunque utiliza procesos multiplicativos básicos no se expresan las configuraciones posibles.
	CATEGORIA 3: Utiliza procesos multiplicativos básicos y/o sumas reiteradas para expresar el total de posibles eventos.
NIVEL 4 GENERALIZACIÓN	CATEGORIA 1: Pese a que utiliza las anteriores categorías generaliza de manera inadecuada los procesos realizados.
	CATEGORIA 2: Mediante los anteriores procesos de multiplicación y/o suma reiterada llega a utilizar procesos multiplicativos más complejos, es decir expresa los resultados utilizando la expresión factorial o sumatoria.
	CATEGORIA 3: El sujeto expresa el resultado con un lenguaje matemático adecuado para el concepto.

Elaboración propia.

Resultados a la prueba aplicada.

A continuación serán presentados los resultados obtenidos en la aplicación del instrumento piloto que fue aplicado a una muestra de 24 estudiantes de primer semestre del proyecto de licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas.

Para la realización del análisis se proponen cinco categorías, cada una con dos y hasta cuatro niveles del avance conceptual y procedimental en la resolución de situaciones de tipo combinatorio, el nivel se denotara de la siguiente forma: la primera cifra indica el nivel y la segunda cifra indica la categoría. De esta manera se mostraran las posibles rutas que los estudiantes pueden llegar a utilizar en el proceso de solución de cada una de las situaciones.

Tabla 2

Rutas combinatorias encontradas.

CAMINOS	POSIBLES RUTAS COMBINATORIAS.				
A	1.1	1.3	2,2	3.1	
B	1.1	1.3	2.3	3.3	
C	1.1	1.3	2.4	3.3	
D	1.1	1.3	4.3		
E	1.1	1.2			
F	1.1	1.3	2.3	3.2	
G	1.1	1.3	2.3	3.3	4.1
H	1.1	1.3	2.1		
I	1.1	1.3	4.1		
J	0.1				
K	0.2				
L	1.1	1.3	2.2	3.2	
M	3.2				

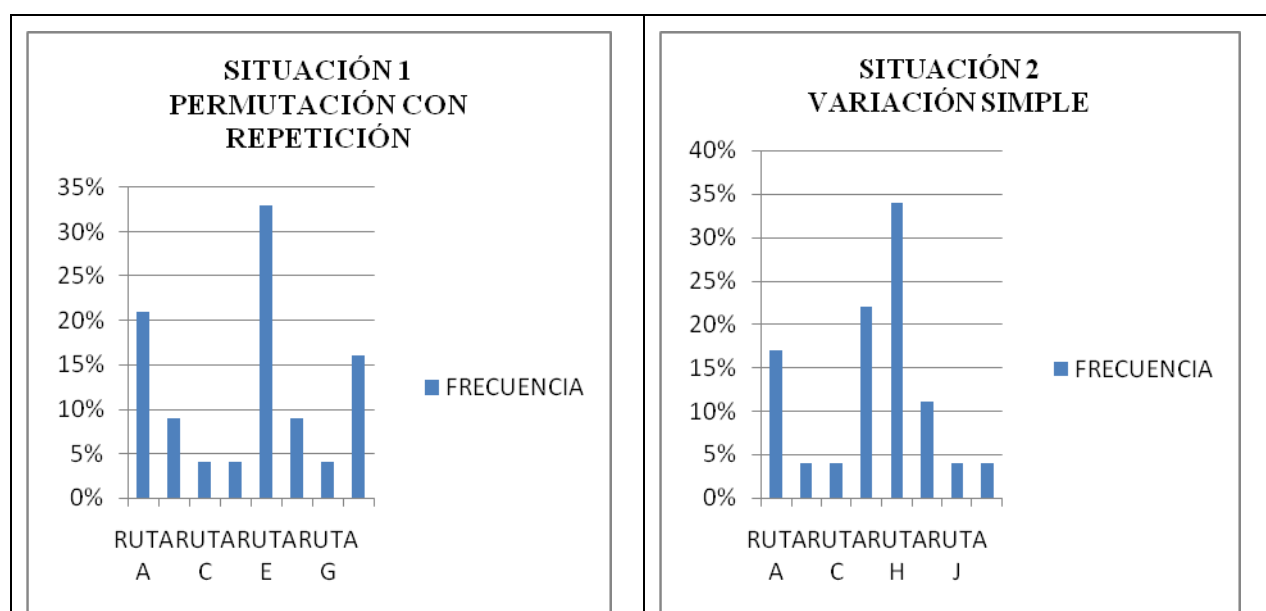
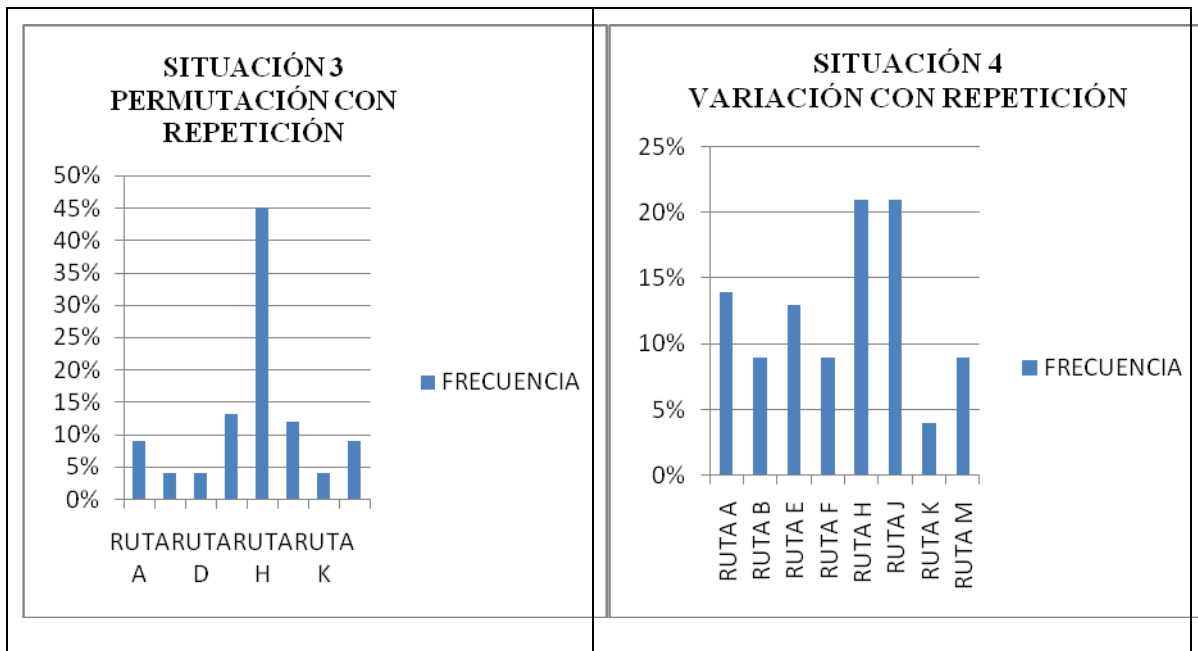


Figura 1. Frecuencias de las rutas usadas por los estudiantes.



Conclusiones

Se observa que en la permutaciones con repetición, los estudiantes tienden a construir todos los eventos, es decir, a partir de identificar los elementos indistinguibles (iguales), estos utilizan la reglas de la suma, en la que construyen, enumeran y recuentan todos los eventos, obteniendo de esta forma resultados positivos (ruta A: 21% situación 1; 9% situación 3).

También se observa que en las permutaciones donde hay menos elementos indistinguibles (iguales), los estudiantes tiende a cometer el error de la ruta E, en la cual estos no identifican dichos elementos, por tanto sobreestiman el espacio muestral, mientras que en las permutaciones donde los elementos indistinguibles (iguales) son varios, el error mas común se presenta en la ruta H, ya que a pesar que estos identifican los elementos indistinguibles, tienen dificultades al momento de construirlos, puesto que repiten eventos o dejan de considerar otros, obteniendo así un espacio muestral diferente al verdadero.

Se observa que en las variaciones sin repetición, las cuales corresponden al modelo de colocación, los estudiantes están mas inclinados por descomponer el problema en sub-problemas, lo cual los induce a construir todos los eventos, esto indica que utilizan la ruta combinatoria **A**; por su parte en las variaciones con repetición, las cuales correspondían al modelo de selección, los estudiantes se inclinan por utilizar los elementos pivote, para que, por medio de una relación multiplicativa puedan expresar el total de eventos, es decir, utilizan la ruta **B**, en síntesis en el desarrollo de las variaciones sin repetición la ruta combinatoria mas común es la **A**, mientras que en las variaciones con repetición la ruta mas utilizada es la **B**.

De acuerdo a lo observado en las situaciones, se puede establecer que para emplear un proceso de razonamiento combinatorio adecuado es necesario que la ruta combinatoria se parta del **nivel 1, categorías 1 y 3**, pues esto permitirá que los sujetos, por lo menos, etiqueten y

diferencien los elementos que se involucran en la situación, lo cual es la base para la construcción adecuada de los eventos en la situación.

Indicaciones del póster.

En la ultima hoja se presenta el póster, el cual esta compuesto de las características generales de este trabajo en forma de mapa conceptual, como los objetivos, las principales herramientas teóricas y metodológicas, las propuestas de los niveles y las categorías de razonamiento, las rutas de razonamiento halladas en los estudiantes, el fundamento teórico de cada cuadro y algunas conclusiones de la investigación.

Bibliografía.

- Batanero, C., Godino, JD, & Navarro-Pelayo, V. (1997). *Razonamiento combinatorio y su evaluación*. En JB Garfield y G. Burrill (Eds.), *La Evaluación Challenge in Statistics Educación* (pp. 239-252). Amsterdam: IOS Press, & International StatisticalInstitute.
- MEN (Ministerio de Educación Nacional) matemáticas. *Lineamientos curriculares*, Bogotá D.C (julio de 1998). Cooperativa editorial magisterio.
- MEN (Ministerio de Educación Nacional) matemáticas. *Estándares para la excelencia en la educación*, Bogotá D.C. (2006)
- Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Ross sheldon, (1994). *A First Course in probability*, 4ta edition Prentice Hall inc.New Jersey. University of California, 13 crkeley
- Sedlmeier, P. (s.f). Stastiscal reasoning: valid intuitions put to use. *Intuitivos in statisticalreasoning*. (pp. 389- 417).
- Socas. M, Camacho. M, Palarea. M & Hernández. J. (1996). *Iniciación al algebra*. Madrid: Síntesis.
- Wilhelmi, M. (2004). *Combinatoria y probabilidad*. Publicación: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Universidad de Granada.

Anexo# 1.**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR: LEBEM**

A continuación encontraras una serie de ejercicios a los cuales esperamos des solución mostrando el proceso de resolución, así como también las ideas y aspectos que no son claros en el enunciado y que te generan confusión al momento de enfrentarte a cada situación.

1. En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin volver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: Se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

2. Cuatro niños (Alicia, Berta, Carlos y Diana) van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (principal y la de huéspedes), donde poder colocar a los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los cuatro niños en las dos habitaciones?(Puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en laPrincipal y Diana en el de huéspedes.

3. Disponemos de cinco botellas gaseosas, cada una de ellas puede ser representada mediante una letra: A, B, C, C, C. lo cual indica que hay tres tipos de sabores ¿De Cuántas formas diferentes se pueden colocar las cinco gaseosas, una al lado de otra formando una hilera? Ejemplo: Pueden estar colocadas de la siguiente forma A C B C C.

4. En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola de la urna, anotamos su número y la devolvemos a la urna. Se elige una segunda bola, se anota su número y la devolvemos a la urna. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 2, 2, 7.

