



Los modos de pensamiento en que el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real es comprendido por estudiantes universitarios

Isabel **Maturana** Peña

Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile

isamatup@hotmail.com

Marcela **Parraguez** González

Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile

marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen

Nuestra investigación se sitúa en el estudio del concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito, que concierne al álgebra lineal, bajo un enfoque cognitivo donde se utilizan la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska como marco teórico y un diseño metodológico de estudio de caso, en la medida que son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad y en un período de tiempo, facilitando la identificación de los distintos procesos interactivos que conforman una realidad como marco metodológico. En la parte empírica de esta investigación se diseñó y aplicó un cuestionario a 25 estudiantes de Ingeniería Civil y Construcción Civil de una Universidad Latinoamericana, cuyo análisis dio información respecto al modo de pensar geoméricamente los vectores, así como también su escasa relación con las estructuras matemáticas que sustentan al concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real.

Palabras clave: modos de pensamiento, dimensión finita, espacio vectorial.

Introducción

La presente comunicación da cuenta de una investigación realizada a fines del 2010 en una Universidad Latinoamericana, la cual tiene por objetivo comprender y analizar, desde una postura cognitiva, el concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito desde la perspectiva de los *modos de pensamiento* (Sierpinska, 2000). Para tal efecto, se indagó en los

modos de pensamiento que configuran las distintas interpretaciones de la definición de dimensión de un espacio vectorial real: “Se dice que un espacio vectorial V tiene dimensión r si tiene una base de r vectores de V ”.

La formación matemática en tópicos de álgebra lineal en varias carreras de Ingeniería en Universidades Latinoamericanas es hoy, y ha sido por muchos años un pilar esencial para ellas. Por ende, la exigencia radica fundamentalmente en posicionar a los aprendices en una situación privilegiada para alcanzar el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Diversas investigaciones han indagado en cuestiones del álgebra lineal. Por ejemplo: Dorier y su equipo hablan acerca del *obstáculo del formalismo*. Estos autores concluyen que “para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal no es más que un catálogo de nociones muy abstractas que nunca pueden ellos imaginarse” (Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1997, p. 116). Así también, se ha reportado que el discurso matemático escolar del álgebra lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en desmedro de la comprensión conceptual de nociones básicas (Dorier y Sierpinska, 2001; Sierpinska et al., 2002). Otras investigaciones apuntan a las dificultades que los estudiantes tienen cuando están aprendiendo el concepto de espacio vectorial, y a la concepción esquema en sus tres niveles Intra, Inter y Trans, del concepto espacio vectorial (Parraguez & Oktaç, 2010).

Por otra parte Sierpinska (Sierpinska, 2000), sostiene que el desarrollo del álgebra lineal se inició como un proceso de pensar analíticamente acerca del espacio geométrico. Tomando una perspectiva muy general, se podrían distinguir en este desarrollo, dos grandes pasos referidos a dos procesos. Uno fue la *aritmización del espacio*, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en $\mathbb{R}^n$. El otro fue la *desaritmización del espacio* a su *estructuración*, con la que los vectores abandonan las coordenadas que los anclaban al dominio de los números, y se convierten en elementos abstractos cuyo comportamiento está definido por un sistema de propiedades o axiomas.

Si bien es cierto, existen variadas investigaciones en el tema de álgebra lineal, relacionadas con algunos de los conceptos que ella involucra, pero particularmente no hemos encontrado información explícita sobre investigaciones en Matemática Educativa que hablen del concepto de dimensión, y en qué forma es aprendido, estudiado, comprendido o aplicado.

Siendo la temática del álgebra lineal muy amplia, focalizaremos en esta comunicación la atención en el concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito. Nos posicionaremos desde la matemática involucrada en el tema, con una mirada desde lo formal, la cual se encuentra inmersa en una variedad de contenidos que la sustentan y que los sustenta.

Para adentrarnos en este estudio haremos uso de los modos de pensamiento, como marco teórico cognitivo en Matemática Educativa.

Planteamiento del problema

El concepto de dimensión lo entenderemos inmerso dentro de la temática del álgebra lineal, pero es un tema que va más allá de estas fronteras deslindando con los orígenes del pensamiento geométrico. Desde lo intuitivo, la dimensión de un sistema de ecuaciones lineales es el número de parámetros independientes y necesarios para describir un punto en dicho sistema, esta es una concepción próxima a la versión física del concepto. Por otra parte, un concepto matemático que modela de cerca esta idea ingenua es el de dimensión topológica de un

sistema, así un punto en el plano es descrito por dos parámetros independientes, y en este sentido el plano es de dos dimensiones.

Sin embargo, la dimensión topológica se comporta de maneras absolutamente inesperadas en ciertos sistemas altamente irregulares, por ejemplo: fractales. La dimensión de Hausdorff entrega otra forma de definir la dimensión, que toma lo métrico en consideración.

Entre los problemas relativos al aprendizaje del álgebra lineal, están las diferentes interpretaciones que puede tener un mismo objeto, lo cual no resulta claro para un estudiante que se trata del mismo. Por ejemplo, podemos pensar en el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo como un subespacio vectorial. Por otra parte ese mismo conjunto se puede presentar como el núcleo de una transformación lineal.

Basándonos en lo antes expuesto, proponemos precisamente una primera hipótesis de investigación: que los estudiantes no incorporan el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real en más de un modo de pensamiento.

Marco Teórico: Los modos de pensamiento

La investigación considera como marco teórico la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpiska. Ella identificó tres modos de pensamiento: el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico-estructural, que pueden verse como el resultado de una superación de dos obstáculos o dos posiciones dogmáticas opuestas: una, que rechaza los números dentro de la geometría, y la otra, que rechaza que la “intuición geométrica” pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético. Estos tres modos de pensamiento es preferible considerarlos como igualmente útiles, cada uno en su propio contexto, para propósitos específicos, y principalmente cuando están interactuando. La principal diferencia entre los modos “sintético” y “analítico” es que en el modo sintético, los objetos son dados directamente para ser descritos por la mente, de manera natural, mientras que en el modo analítico estos objetos son dados indirectamente. De hecho son contruidos solamente por la definición de las propiedades de los elementos (Sierpiska, 2000).

Cada uno de los tres modos de pensamiento en álgebra lineal utiliza un sistema específico de representaciones.

- El modo de pensamiento *sintético-geométrico* utiliza el lenguaje de las figuras geométricas, planos y líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas convencionales.
- En el modo *analítico-aritmético* las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de “n-uplas” de números que satisfacen ciertas condiciones que son escritas, por ejemplo, en la forma de sistemas de ecuaciones o desigualdades. En el modo analítico-aritmético, las componentes numéricas de los objetos geométricos, como puntos o vectores son importantes. Así, un sistema general de ecuaciones podría ser escrito usando todos sus coeficientes: $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

.....

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

- El pensamiento *analítico-estructural* va más allá de este tipo de análisis y sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales. Así, un sistema puede escribirse en una forma matricial, o en forma vectorial:

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = b.$$

Con respecto a los sistemas de ecuaciones hay otra diferencia entre los modos de pensamiento analítico-aritmético y analítico-estructural. Lo importante desde un punto de vista analítico-aritmético es encontrar métodos para resolver sistemas de ecuaciones.

En el modo de pensamiento estructural las cuestiones podrían referirse, por ejemplo, a las condiciones de la matriz A y el vector b para la existencia y unicidad de una solución. Las propiedades de la matriz podrían ser más importantes que la naturaleza de sus componentes numéricos (Sierpinska, 2000).

Objetivos de Investigación

Objetivo general:

1. Aportar conocimiento a la Matemática Educativa, a través de la comprensión de los modos de pensamiento en el concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito.

Objetivos específicos:

1. Identificar las estrategias cognitivas que utilizan los estudiantes universitarios para comprender el concepto de dimensión finita de un vectorial real.
2. Identificar los factores matemáticos asociados a la comprensión del concepto de dimensión finita de un vectorial.
3. Identificar recursos didácticos y experiencias previas que utilizan los estudiantes para comprender el concepto de dimensión finita de un vectorial.
4. Identificar otros factores que subyacen en la comprensión del concepto de dimensión finita de un vectorial real

Estos objetivos pretenden dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: *¿qué estrategias cognitivas operan en la comprensión del concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real, en estudiantes universitarios? Para ello, nos propusimos indagar desde una postura cognitiva acerca de los modos de pensamiento que configuran las distintas interpretaciones de la definición de dimensión de un espacio vectorial real, que se ha instalado en los aprendices del concepto en cuestión en carreras de Ingeniería de una Universidad Latinoamericana.*

Aspectos Metodológicos

Desde los objetivos de investigación, es pertinente utilizar un diseño metodológico de **estudio de caso múltiple**, en la medida que son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad, en un período de tiempo, facilitando la identificación de los distintos procesos interactivos que conforman una realidad (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992). Se refiere a caso “Múltiple” en la medida que: analiza en concreto realidades específicas y singulares, que adquieren su valor como indagaciones intensivas, y con profundidad en casos particulares; contrasta realidades específicas de las que pueden extraerse problemas comunes y matizaciones singulares, pero de ninguna manera explicaciones genéricas y definitivas sobre la realidad

estudiada. El tipo de conocimiento que de esta estrategia metodológica se deriva, es de un tipo de conocimiento conceptual, que sirve para comprender realidades concretas, dentro de un contexto global. Permite aproximarse a la complejidad de los múltiples y diferentes procesos que se desencadenan en el transcurso de una situación particular en estudio. Enfatiza tanto en aquellos elementos comunes de los casos, como en aquellos elementos diferenciadores que complejizan, diversifican y especifican cada una de las diferentes experiencias estudiadas.

“...Los estudios de casos son adecuados para un análisis intensivo y profundo de uno o pocos ejemplos de ciertos fenómenos;...” (Goetz y LeCompte, 1988, p. 69). Según Elliot (1994), las relaciones se iluminan mediante la descripción concreta de realidades sociales y personales, a través de leyes causales y de correlaciones estadísticas. Los estudios de casos proporcionan una teoría naturalista de la situación, que en esta investigación pretende aportar a nuestra comunidad en un tema tan relevante como lo es, el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real.

Los pasos seguidos requirieron en un **primer momento**, de una aproximación de carácter extensivo (de tipo cuantitativo) a través de la administración de cuestionarios-encuestas, orientados a obtener antecedentes respecto de la caracterización de las variables de conocimiento, valoración y expresión del concepto en estudio, en la configuración conceptual del álgebra lineal, de ejercicio en los actores de la unidad de Estudio.

En un **segundo momento**, acceso al campo de **carácter intensivo** o en profundidad a las 2 carreras –Ingeniería Civil y Construcción Civil–, que constituyen los dos casos de estudio de la investigación (Ver Tabla 1).

Tabla 1

Resumen de informantes y técnicas de recogida de información. .

Tipo de estudiante	Curso	Caso 1 Ingeniería Civil (15 estudiantes)	Caso 2 Construcción Civil (10 estudiantes)
Universitario	Álgebra lineal	Cuestionario Entrevista Registros de observación	Cuestionario Entrevista Registros de observación

Fuente: Diseño metodológico del proyecto. 2010.

Con el marco teórico y metodológico definido y muy pocos antecedentes sobre estudios del concepto de dimensión finita de espacios vectoriales reales, nos propusimos diseñar instrumentos, cuestionarios, entrevistas y registros de observación de los mismos, para la generación de antecedentes que den luces de lo que podría estar sucediendo con la comprensión del concepto en estudio.

Se trabajó con dos casos a nivel institucional: Ingeniería Civil y Construcción Civil. Los criterios de selección de estas unidades de estudios trabajadas como “casos”, se vinculan con las siguientes categorías e indicadores:

- **Estudiantes exitosos académicamente:** con buen rendimiento en el curso álgebra lineal y cálculo II. Este indicador permite ubicar a la unidad de estudio en contextos de habla

(procesos cognitivos) homogéneos del caso, permitiéndonos filtrar variables intervinientes que podrían afectar en los procesos cognitivos de la unidad de estudio.

- **Experiencias previas:** contienen en su malla curricular la asignatura de álgebra lineal, dibujo técnico y/o geometría. Este indicador también nos asegura un común denominador de “andamiaje” de sus procesos cognitivos.
- **Aplicación práctica de sus conocimientos:** buscar llevar los problemas al plano numérico con la dimensión y la medida, y con ello lograr la optimización, la eficiencia, la eliminación del desperdicio, y el funcionamiento ideal.
- **Ejercitan ampliamente en matemática:** Saben de teoría matemática y la ejercitan ampliamente. Material de trabajo dispuesto en el aula virtual.
- **Estudiantes voluntarios:** asisten voluntariamente a dar respuesta a los instrumentos. Lo que supone altos grados de motivación por la materia a indagar, otra variable interviniente importante de considerar en la intencionalidad de la unidad de estudio.

En lo que sigue, reportaremos lo acontecido con el cuestionario, ya que es el análisis que hemos finalizado hasta ahora.

Diseñamos un cuestionario de 10 preguntas, con la intención de verificar si los estudiantes poseen algún tipo de dificultad para comprender el concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito y aplicamos dicho instrumento el martes veinte y seis de octubre de año dos mil diez a 25 estudiantes. Realizamos un análisis *a priori* y uno *a posteriori* para cada una de las preguntas.

Análisis a priori del cuestionario

Hemos seleccionado dos preguntas del cuestionario, para darlas a conocer en esta comunicación, que a continuación serán analizadas. En dicho análisis a la luz de la teoría de los modos de pensamiento, presentamos las posibles respuestas que esperamos que los estudiantes den a los problemas planteados.

Pregunta 1: Calcular la dimensión de $V < \mathbb{R}^3$, si se sabe que: $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.

La pregunta por un parte persigue un primer objetivo, evidenciar la forma en que los estudiantes hacen el cálculo de la dimensión de un espacio vectorial, y por otro, identificar el modo de pensamiento puesto en juego. En otras palabras, mirar si los conceptos insertos en el álgebra lineal que anteceden al de dimensión, como dependencia lineal, base y espacio generado, impiden calcularla adecuadamente. Se plantea la pregunta, definiendo el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ a través de una ecuación lineal, en este caso esperamos que el estudiante encuentre una base para el espacio, comprobar que el conjunto propuesto es base, es decir el conjunto es linealmente independiente y genera el subespacio. Al tener el número de generadores tiene la dimensión del espacio.

A partir del modo de pensamiento analítico- aritmético entregamos la siguiente respuesta experta: una base para V es $B_V = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$, ya que es un conjunto linealmente independiente y que genera a V . En efecto $\langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle \subset V$ y también $V \subset \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$, pues si $(x, y, z) \in V$, entonces $x + y + z = 0$, de donde $x = -y - z$.

Luego $\{(-y-z, y, z)\} \in V$, entonces $\{(-y, y, 0) + (-z, 0, z)\} \in V$, lo que implica que está en el subespacio generado. De esta forma es posible concluir que la $\dim V = 2$.

Por otra parte, desde un modo de pensamiento sintético- geométrico, es posible asociar la ecuación del plano que describe al espacio vectorial V como un subespacio de dimensión dos, concluyendo desde la geometría la dimensión del plano, a través de dos vectores directores (generadores) que determinan a este plano.

Entre otras respuestas, esperamos de los estudiantes lo que sigue: (a) que determina la dimensión contando el número de ecuaciones que definen a V . En este caso particular es uno, (b) Determine una base para el subespacio, (c) Determine la dimensión a través del vector normal al plano y (d) Determine la dimensión de V restando al número de coordenadas, el número de ecuaciones.

Pregunta 2: Dados los subespacios de $\mathbb{R}^2$ tales que $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ y

$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$. (a) Calcular si es posible la $\dim(W + H)$, (b) Realice las graficas en el plano real de los subespacios anteriores, (c) ¿Qué puede usted comentar?

La pregunta propone, al igual que la anterior, evidenciar el modo de pensamiento puesto en juego por los estudiantes para calcular la dimensión de la suma de subespacios de $\mathbb{R}^2$. Es posible que el cálculo se realice en forma directa, o bien haciendo uso del teorema de la dimensión de la suma de subespacios vectoriales. Con este propósito se han definido dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ a través de una ecuación lineal, esperando que los estudiantes repitan el procedimiento de la pregunta anterior. Esta primera forma de respuesta adhiere al modo de pensamiento analítico- aritmético.

Una posible respuesta para esta pregunta, a la luz de los modos sintético y analítico, se sustenta en algunas consideraciones generales de la dimensión en el plano. La dimensión del espacio suma a lo más es dos, pero ambos subespacios están definidos por ecuaciones de rectas que son, perpendiculares entre si, por lo que sus vectores son linealmente independientes. Luego la dimensión es dos.

Haciendo uso del teorema de la dimensión de la suma de espacios vectoriales se sigue que: $\dim(W + H) = \dim W + \dim H - \dim(W \cap H)$ por lo que podemos concluir sabiendo que las $\dim W = 1$, $\dim H = 1$ y $\dim(W \cap H) = 0$, que $\dim(W + H) = 2$.

En relación al inciso (b), (c) de la pregunta 2 y el gráfico de la Figura 1, podemos por una parte ver los subespacios del plano $\mathbb{R}^2$, $W = \langle(1, -1)\rangle$ y $H = \langle(1, 1)\rangle$, así como también que la intersección de W y H es un único punto, el cual constituye el subespacio intersección que corresponde al espacio nulo. Por otra parte, el espacio suma corresponde al plano completo, pues ambos vectores, los que aporta el subespacio W y el H , son linealmente independiente, conformando una base ortogonal que separa el espacio en suma directa.

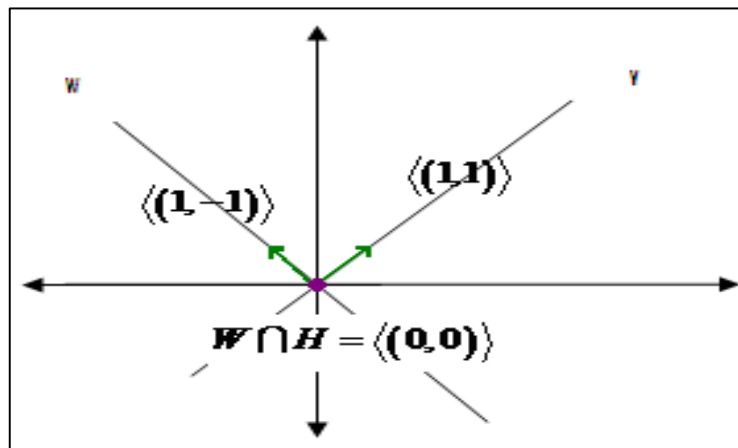


Figura 1: Gráficas de los subespacios de la pregunta 2.

La intención explícita de esta pregunta tiene por propósito sugerir al estudiante que por medio del uso de la geometría asociada a los subespacios del plano, visualice la relación entre los subespacios dados, y comprenda el concepto de dimensión para subespacios de $\mathbb{R}^2$, incorporando el modo de pensamiento sintético geométrico.

Observaciones sobre el desempeño de los estudiantes y Análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, a continuación presentamos una selección del trabajo realizado por los estudiantes universitarios en las preguntas antes descritas. En la pregunta 1 del cuestionario, la tendencia de los estudiantes es responder haciendo uso del recurso aritmético. Es interesante hacer notar que solo 5 de los 25 estudiantes tuvo respuesta incorrecta, al no encontrar los generadores – pero los buscaron–, lo que da muestras que sabían lo que hay que hacer y su único recurso es el aritmético.

En la pregunta 2, las dificultades que primero podemos reportar, dan cuenta de la falta de dominio en los temas que se encuentran rodeando nuestra problemática, como por ejemplo los conceptos de dependencia e independencia lineal, base, espacio generado, espacio suma, intersección de espacios, mezclados con alguna deficiencias de cálculo de sistemas de ecuaciones lineales. Veamos algunas de las respuestas de los estudiantes para la pregunta 2:

Estudiante 1 (Caso 1): El procedimiento utilizado es la búsqueda de los generadores de los subespacios W y H , el que es efectuado correctamente. De alguna forma que no es declarada, concluye que la dimensión del espacio suma es dos.

La respuesta ofrece dudas porque el fundamento de su cálculo es la dimensión del espacio suma el cuál no está justificado, pero sabe el procedimiento, y aplica los teoremas del tema, lo que evidencia estudio del tópico, y su modo de pensamiento puesto en acción para resolver el problema es analítico – aritmético. No realiza gráfico, ni comentario.

Estudiante 2 (Caso 1): Realiza cálculos en forma análoga al estudiante 1, concluyendo sus dimensiones en forma adecuada, sin embargo el estudiante no entiende lo que significa la suma de subespacios, o lo que significa la dimensión de esta. Nuevamente el modo de pensamiento usado es el analítico – aritmético.

En la figura 2, este estudiante realiza una gráfica como la de valor absoluto. Lo que evidencia la falta de asociación geométrica de los conceptos del álgebra lineal.

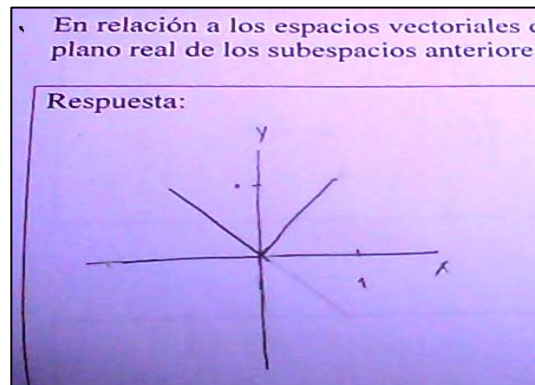


Figura 2. Gráfica que realiza estudiante 2, para la pregunta 2.

Estudiante 5 (Caso 1): El procedimiento de solución es la búsqueda de los generadores de los espacios W y H , encontrándolos. Escribe la pregunta sobre la dimensión de la suma tratando de relacionar con los generadores que obtuvo de sus cálculos y no logra ninguna conclusión. El estudiante recurre a los procedimientos aritméticos para determinar las respuestas. Realiza gráfica de zona, (ver Figura 3).

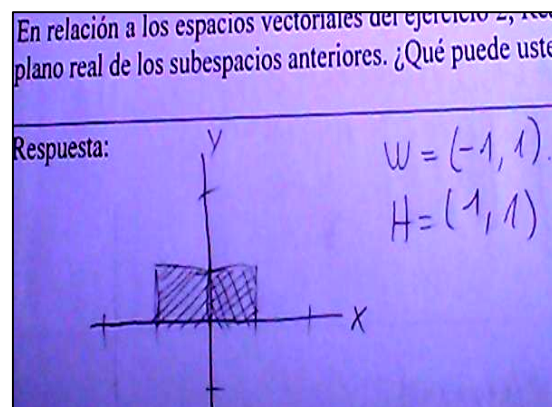


Figura 3. Gráfica que realiza estudiante 5, para la pregunta 2.

Estudiante 9 (Caso 1): Al igual que el estudiante 1, busca los generadores calculando las dimensiones de los subespacios, y utiliza el teorema de la dimensión para la suma de subespacios, añadiendo la siguiente justificación para sus cálculos: $W + H = \mathbb{R}^2$.

Este estudiante, al igual que en la primera pregunta, añade una componente que no es considerada por el resto, determinando la respuesta con otro elemento, mostrando evidencias sustanciales que su modo de pensamiento es estructural, pero hay que continuar observando, pues falta justificar de alguna forma que $W + H = \mathbb{R}^2$. Reaparece el tema del valor absoluto, (ver Figura 4).

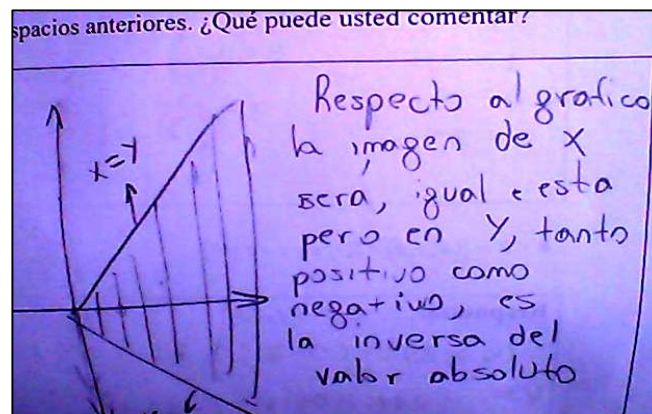


Figura 4. Gráfica que realiza estudiante 9, para la pregunta 2.

Estudiante 10 (Caso 2): Este estudiante también determina los espacios generados, pero en este caso describe un espacio generado total $\langle(-1,1),(1,1)\rangle$ al que le calcula la dimensión concluyendo que es dos, y escribe que $\dim(W \cap H) = 2$.

En este caso, se ve que el estudiante no entiende lo que significa la intersección, ni la suma de subespacios. Nuevamente el modo de pensamiento usado es el analítico – aritmético. Este es el único estudiante en hacer referencia a los planos reales y hablar de perpendicularidad, (ver Figura 5).

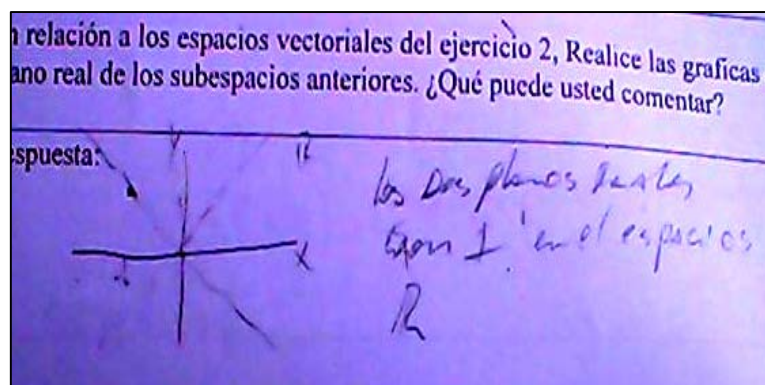


Figura 5. Gráfica que realiza estudiante 10, para la pregunta 2.

Estudiante 23 (Caso 2): Calcula los espacios generadores en forma muy desprolija, dando evidencias de mecanización algorítmica en el proceso de cálculos, pero el estudiante podría no entender lo que significa la suma de subespacios, o lo que significa la dimensión de este. Nuevamente el modo de pensamiento usado es el analítico – aritmético.

Este estudiante es capaz de graficar en el plano, pero no hace una asociación con los conceptos de álgebra lineal, (ver Figura 6).

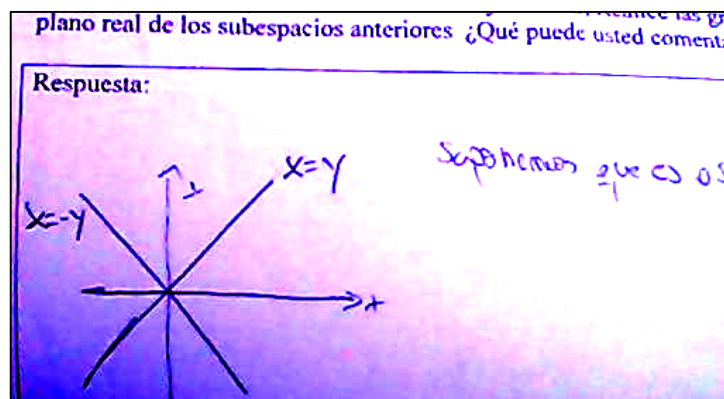


Figura 6. Gráfica que realiza estudiante 23, para la pregunta 2.

A modo de comentario podemos señalar que la falta de respuestas de los estudiantes, y los intentos de estas, dan muestras que no hay incorporado un modo de pensamiento sintético-geométrico asociado a los conceptos de dimensión, ni de espacio vectorial. Por otra parte, es sorprendente la asociación que realizan con la gráfica de la función valor absoluto en los números reales.

Discusión en base a las evidencias

Al comparar con detalle las distintas respuestas de los estudiantes en este análisis, no podemos sino referirnos a una de las cuestiones que nos llama mucho la atención, y es la falta de integración del modo de pensamiento geométrico que evidencian los estudiantes de los subespacios vectoriales en el plano real, y más aún, totalmente desconectada de la estructura de lo que es un espacio vectorial. Por ejemplo, el estudiante 2 (caso 1) al graficar los subespacios vectoriales W y H del plano real para la pregunta 2, obtiene la gráfica del valor absoluto. Una posible explicación a ese hecho es que el estudiante concibe los elementos de W y de H como puntos del plano real, y no como vectores u elementos de un espacio vectorial, y por supuesto al unir esos puntos se obtiene la figura 2, entre otras (figuras 4, 5 y 6) que se puede leer como la gráfica del valor absoluto. También el estudiante que realizó la figura 3, esta pensando en que W y H es un conjunto de puntos, tal vez infinitos puntos, que son los que se encuentran encerrados en el rectángulo de vértices $H(1,1)$, $W(-1,1)$, $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Otra explicación al mismo hecho es observar que en las figuras 2, 4, 5 y 6 se repite un modelo, en el cual se alude a una gráfica análoga al del valor absoluto, lo que evidencia una falta de comprensión de lo que significa que un subespacio este generado por dos vectores. En el fondo el concepto de combinación lineal se encuentra restringido a las combinaciones lineales positivas del vector generador; este fenómeno de dibujar vectores sólo con escalas positivas, esta reportado en la tesis de Chargoy (Chargoy, 2006), lo que unido a las figuras 2,4,5 y 6 nos lleva a decir que los estudiantes universitarios dieron respuestas gráficas distorsionadas de los subespacios y parecidas al valor absoluto.

A manera de Conclusión

De acuerdo al trabajo realizado por los estudiantes en el cuestionario, observamos que para este grupo de estudiantes, ya sean de Ingeniería Civil o de Construcción Civil, se verifica la hipótesis de investigación, es decir, que los estudiantes hacen uso solo de un modo de pensamiento para dar respuesta a las preguntas planteadas, siendo este el modo de pensamiento analítico-aritmético. Además pone en evidencia la necesidad que los estudiantes conozcan las

relaciones geométricas que originan los conceptos en el álgebra lineal, es decir, movilizar el modo de pensamiento sintético-geométrico a los otros dos –analítico-aritmético y analítico-estructural– con el propósito de reinterpretar el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real.

Además un resultado importante que arrojó esta investigación para los dos casos de estudio, independiente que en su currículo contengan más o menos cursos de geometría, es que no existe una conexión entre los distintos modos de pensamientos al abordar los problemas de dimensión finita de un espacio vectorial real. Observamos también que los estudiantes utilizan un modo de pensamiento y no recurren a los otros aún cuando la situación matemática lo requiera. Asimismo los participantes en la investigación, evidencian dificultades en el modo de pensamiento analítico-estructural pues no consideran, por ejemplo, las propiedades del subespacio vectorial y su ortogonal (pregunta 2).

Para finalizar, creemos fehacientemente que la falta de incorporación de otros modos de pensar en el trabajo referido al concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito, dejan a los estudiantes ciegos frente a realidades evidentes, como la visualización geométrica de los subespacios en el plano. Es por esta razón que recomendamos a los docentes que imparten el curso de álgebra lineal, que el concepto de dimensión finita de espacios vectoriales reales, debería ser presentado a los estudiantes en distintos modos de pensamiento.

Referencias y bibliografía

- Arnal, J.; Del Rincón, D.; Latorre, A. (1992). “La investigación colaborativa”. En J. Arnal; D. Del Rincón y A. Latorre: *Investigación Educativa. Fundamentos y Metodología*. Barcelona, Labor.
- Chargoy, R. (2006). *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial*. Tesis de Doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN.
- Dorier, J.-L.; Robert, A.; Robinet, R. y Rogalski, M. (1997). L’Algèbre Linéaire: L’obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed), *L’Enseignement de l’Algèbre Linéaire en Question* (pp. 105-147), Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Dorier, J. L.; Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers: Netherlands. pp. 255-273.
- Elliott, J. (1994). *La investigación-Acción en Educación*. Editorial Morata: España.
- Goetz, J.P.; Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Editorial Morata: España.
- Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2112-2124.
- Sierpinska A. (1996). Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra. Research Conference in Collegiate Mathematics Education, Central Michigan University.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 209-246.
- Sierpinska, A., Nnadozie A. y Oktaç A. (2002). *A Study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra*. Concordia University: Montreal.