



Comprensión de la sintaxis del álgebra en las tangentes de las cónicas

Samantha **Delfín** Azuara
CINVESTAV, IPN
México
sdelfin@cinvestav.mx

Resumen

Este póster es parte de una investigación realizada en un programa de Maestría en México. En ésta se pretende averiguar si el uso de la geometría analítica permite una mejor comprensión de la sintaxis del álgebra en el bachillerato; lo cual se lleva a cabo con el desarrollo de tres componentes de los Modelos Teóricos Locales (MTL) de Filloy (2008): modelo de enseñanza, modelo para los procesos cognitivos y modelo de competencia formal. El modelo de enseñanza se diseñó a partir de libros de texto de geometría analítica pero sobre todo a partir de los textos originales de Fermat y Descartes respecto a las tangentes a las cónicas. El modelo de procesos cognitivos es el análisis de las tendencias cognitivas de los estudiantes antes y después de la impartición del modelo de enseñanza.

Palabras clave: geometría analítica, álgebra, comprensión, modelos teóricos locales, tangentes de cónicas.

El contenido de este póster forma parte de una investigación que realiza la autora en una Maestría en México. En ésta se pretende averiguar si el uso de la geometría analítica mejora la comprensión de la sintaxis algebraica de estudiantes de bachillerato de México. En particular aquellos que pertenecen al sistema del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

La investigación se centra en la impartición del tema de tangentes a las cónicas. La elección de este tema se debió a que el estudio de las tangentes a las cónicas no sólo requiere un amplio conocimiento de geometría euclidiana y analítica sino también exige un manejo avanzado de la sintaxis algebraica. Esto nos permitirá averiguar si el uso de la geometría analítica mejora o no la comprensión de la sintaxis del álgebra.

Para responder a esta hipótesis se utilizan los Modelos Teóricos Locales (MTL) de Filloy (2008) mediante el diseño de un modelo de enseñanza controlada basada en el modelo de competencias formales y el análisis de las tendencias cognitivas de los alumnos antes y después

de estudiar este modelo de enseñanza. Las tendencias cognitivas nos permitirán comprender que es lo que entienden, los estudiantes, de la sintaxis algebraica y poder comparar esto con otros estudios realizados previamente.

Antecedentes

Podemos encontrar que no es nuevo el uso de otras disciplinas de la matemática, en especial el de la geometría euclidiana, para mejorar la comprensión del álgebra. Sin embargo, existen pocos textos que vinculen la utilización de la geometría analítica con un mejor entendimiento del lenguaje algebraico.

Filloy y Rojano han realizado investigaciones en el área del álgebra educativa por más de 20 años, lo cual fundamenta la utilización de los Modelos Teóricos Locales. Además en 2010, Neira hizo una investigación respecto a la sintaxis del álgebra en la enseñanza de la geometría analítica con el uso de tangentes a las cónicas. A diferencia del presente estudio, el anterior fue realizado con profesores. Al igual que en esta investigación, Neira también analizó las tendencias cognitivas presentadas por los maestros cuando se enfrentaban a tangentes de las cónicas. Y concluyó que el uso de la geometría analítica mejoraba la comprensión de la sintaxis algebraica.

Fundamentación teórica

Como se mencionó al principio, esta investigación se encuadra bajo los MTL de Filloy (2008). Estos constan de cuatro componentes: modelos de enseñanza, modelos para procesos cognitivos, modelos de competencias formal y modelos de comunicación. Esta investigación se limitará al uso de las primeras tres componentes antes mencionadas debido a la duración de la maestría.

Metodología

Se emplea la metodología propuesta por Filloy (2008) bajo el contexto de los MTL. El proceso de investigación consta de cinco etapas:

1. Evaluación de los alumnos antes de recibir las clases correspondientes a tangentes a las cónicas para poder determinar qué comprensión de la sintaxis del álgebra tienen.
2. Enseñar el tema con un modelo de enseñanza controlada diseñado por el investigador.
3. Aplicar un cuestionario para determinar las características de la comprensión de la sintaxis del álgebra en el tema y la comprensión del mismo.
4. Hacer entrevistas semi-estructuradas a tres tipos de alumnos: de alto, regular y bajo desempeño y así encontrar tendencias cognitivas.
5. Obtener conclusiones basadas en los resultados.

Modelo de competencia formal

En esta investigación el modelo de competencia formal corresponde al análisis de los libros de geometría analítica utilizados en la licenciatura de matemáticas en la UNAM. Además también se utilizan textos originales de Fermat y Descartes correspondientes al tema de tangentes a las cónicas.

Modelo de enseñanza

Este modelo corresponde a la creación de las clases que se imparten respecto al tema de tangentes a las cónicas. Este modelo está basado en los métodos de Descartes y Fermat para

encontrar tangentes a las cónicas. Los textos usados fueron las obras *Ad locos planos et isagoge* de Fermat y *La géometrie* de Descartes.

Modelo de procesos cognitivos

El modelo de procesos cognitivos se utiliza en el análisis de cuestionarios exploratorios respecto a la comprensión de la sintaxis del álgebra. Se buscan que tendencias cognitivas presentaron los alumnos antes y después de recibir las clases correspondientes al tema de tangentes a las cónicas. Las tendencias cognitivas que se buscan, son las descritas por Filloy (2008).

Diseño

El diseño del experimento parte del establecimiento del problema: la sintaxis algebraica no es entendida por alumnos de bachillerato. A partir de los textos de Filloy y Rojano se concluye que es porque su enseñanza es demasiado abstracta, es decir, no hay una conexión de ésta con la realidad de los estudiantes. Tanto Filloy como Rojano han demostrado en diversos artículos que el uso de contextos concretos permite una mejor comprensión de la sintaxis. Esto llevo a la elaboración de la siguiente hipótesis: la enseñanza de la geometría analítica permite una mejor comprensión de la sintaxis del álgebra. Por lo cual se llegó a la formulación de las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué dificultades presentan los estudiantes de bachillerato con la sintaxis del álgebra antes y después de estudiar el tema de tangentes a las cónicas?
2. ¿Puede el estudio de la geometría analítica mejorar la comprensión de la sintaxis?

El contenido del primer cuestionario fue sobre álgebra y algunas propiedades geométricas, correspondientes a lo propuesto en la currícula de matemáticas de secundaria. El segundo y tercer cuestionarios son sobre tangentes a las cónicas respecto a los métodos de Descartes y Fermat respectivamente, haciendo énfasis en el uso de la sintaxis algebraica. El análisis de los resultados de los cuestionarios se hará respecto a las tendencias cognitivas que tengan los alumnos.

Escenario y sujetos.

La investigación se realiza en un colegio privado de la Ciudad de México que es un CCH incorporado a la UNAM. Este colegio además de utilizar el sistema Universitario, emplea el sistema de Cambridge, con miras a presentar los exámenes para obtener un bachillerato reconocido internacionalmente: International General Certificate of Secondary English (IGCSE) y Cambridge International A and AS levels.

El grupo con el que se trabaja consta de nueve alumnos con edades entre 16 y 18 años.

Limitaciones del estudio

Las características del colegio donde se realiza la investigación son poco frecuentes en México; el tamaño de los grupos nunca es mayor a 15, lo cual no ocurre en la mayoría de los bachilleratos de México. En México sólo un 12.9% de los estudiantes van a una escuela privada. Tampoco es frecuente que los alumnos estudien más de un sistema de bachillerato al mismo tiempo.

Sin embargo, el uso de modelos teóricos locales nos permite poder hacer la investigación con una población tan pequeña. Y aunque ésta parezca ser tan ajena a la realidad de México si

nos puede dar una idea bastante cercana a cómo piensan los estudiantes de bachillerato respecto a la sintaxis del álgebra ya que los estudiantes presentaron errores similares a los presentados por los estudiantes de bachilleratos públicos de México.

Resultados

El desempeño de los estudiantes en el primer cuestionario fue muy bajo. Respecto a la sintaxis del álgebra encontramos que operan con sus propias reglas y que a veces éstas corresponden a un mal entendimiento de las reales, pero sobre todo generalizaciones de la aritmética incorrectas.

Encontramos que en el caso de operaciones de potencias lo que hacían algunos estudiantes era que si veían una multiplicación de literales con potencias diferentes, también multiplicaban las potencias ($p^2 \times p^3 = p^6$ ya que $2 \times 3 = 6$) e hicieron lo mismo con la división ($q^3 \div q^{-4} = q^{-12}$). La mayoría fue capaz de realizar un desarrollo y simplificación de una expresión ($3(3x + y) - 2(x - 3y)$) pero no pudieron resolver un sistema de ecuaciones lineales.

1. Simplifica

(a) $p^2 \times p^3$

$$2 \times 3 = 6$$

Respuesta: ⁶

Figura 1. Multiplicación de monomios. Se trata de una multiplicación de monomios en la cual se multiplican las literales en lugar de sumarlas.

Un semestre después del primer cuestionario y que los estudiantes llevaran el curso correspondiente a geometría analítica, se inició la impartición de las clases de tangentes a las cónicas. La primera clase correspondió a un repaso de las características y propiedades algebraicas y geométricas de las cónicas y las ecuaciones lineales. En la segunda clase se estudió el método de Descartes para encontrar las tangentes de las cónicas. Esto se logró con el método de las raíces iguales que se deriva del método original que utilizó Descartes. En la siguiente clase se hizo un cuestionario respecto a este método. Los resultados aunque no fueron del todo favorables mostraron un importante mejoría en la comprensión de la sintaxis del álgebra en cuatro estudiantes. Estos cuatro fueron los únicos en llegar a la parte de encontrar la tangente algebraicamente, sin embargo ninguno de ellos pudo encontrar la tangente de la parábola.

Una de las tendencias que más se presentó fue "la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse antes" ya que tres de los individuos que llegaron a la parte algebraica pudieron elevar un binomio al cuadrado cuando al menos un término no tenía signo negativo. Sin embargo ninguno pudo hacerlo cuando ambos términos tenían el signo negativo.

Encontramos que en el primer cuestionario algunos sujetos no entendían la idea de agrupar y para el segundo cuestionario no sólo fueron capaces de factorizar, sino también lo hicieron cuando los coeficientes no eran únicamente numéricos.

2. (a) Factoriza completamente.

$$3p^2 - 12p - 9p$$

$$12 - 3 = 9$$

$$p^2 - p = p$$

$$3p^2 - 12p \quad 4p$$

Respuesta: -9p.

Figura 2. Agrupación. Correspondiente al primer cuestionario.

$$x^2 - 10x - 4mx + 20m + 9 = 0$$

$$x^2 + x(-10 - 4m) + 20m + 9 = 0$$

Figura 3. Agrupación. Correspondiente al segundo cuestionario.

Además en el primer cuestionario la mayoría no fue capaz de resolver un sistema de ecuaciones, y aunque en el segundo tampoco pudieron, la idea de lo que significa un sistema de ecuaciones simultáneas quedó mucho más clara.

3. Resuelve las ecuaciones simultáneas.

$$\begin{aligned} 9 - 13 &= 4 \\ x - y &= 4 \\ 3x + 2y &= 17 \end{aligned}$$

$$y = 4 + x$$

$$y = \frac{17 - 3x}{2}$$

$$y = 4 - x$$
~~$$3x + 2(4 + x) = 17$$~~

$$3x + 2(1 - x) = 17$$

$$3x + 8 - 2x = 17$$

$$x + 8 = 17$$

$$x = 17 - 8 \quad \boxed{x = 9}$$

$$x - y = 4$$

$$9 - y = 4$$

$$y = 9 - 4$$

$$\boxed{y = 13}$$

Respuesta $x = \underline{9}$
 $y = \underline{13}$

Figura 4. Ecuaciones simultáneas. Correspondiente al primer cuestionario.

$$y - 4 = m(x - 5)$$

$$(x - 5)^2 = m(y - 4)$$

$$4 \left(\frac{x^2 - 10x + 25}{4} - 4 \right) = m(x - 5)$$

$$y = \frac{x^2 - 10x + 25}{4}$$

$$x^2 - 10x + 25 - 16 = 4mx - 20m$$

Figura 5. Ecuaciones simultáneas. Correspondiente al segundo cuestionario. Aunque el sujeto confunde el uso correcto de la ecuación punto-pendiente. Utiliza el método de sustitución para resolver ecuaciones simultáneas de forma correcta.

Conclusiones

La forma en la que se enseña álgebra a nivel secundaria no permite que los estudiantes comprendan la sintaxis del álgebra. Los estudiantes no comprenden la sintaxis correcta y en

muchas ocasiones inventan sus propias reglas como una combinación de lo que recuerdan y de lo que les parece conocido.

El estudio de la geometría analítica permite un mejor uso de la sintaxis del álgebra, aunque se conservan muchos de los problemas que existían antes del estudio de ésta, como el empleo de negativos o la expansión de binomios al cuadrado. Utilizar conocimiento concreto permite el entendimiento de conocimiento abstracto. Mismo que no pudo entenderse cuando se estudió por sí solo.

Referencias y bibliografía

- Descartes, R. (1954). *The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition*. (Smith D.E. y Latham M.L., Traducido) Nueva York, NY: Dover. (Trabajo original publicado en 1637)
- Fermat, P. (1679). *Varia opera mathematica*. Francia.
- Filloy, Y.E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Filloy, Y.E., Rojano T. y Puig L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Estados Unidos de América: Springer
- Neira, J.V. (2010). Sintaxis del álgebra en la enseñanza de la geometría analítica. (Tesis de maestría sin publicar). CINVESTAV, México.
- Secretaría de Educación Pública. (2006). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006*. México: Educación básica, SEP.
- Universidad de Cambridge (2010). *Cambridge International A & AS Level Mathematics Syllabus code 9709. For examination in June and November 2012*. Reino Unido: University of Cambridge.
- Universidad de Cambridge (2010). *Syllabus. Cambridge IGCSE Mathematics. Syllabus code 0580. Cambridge IGCSE Mathematics (with Coursework). Syllabus code 0581. For examination in June and November 2011*. Reino Unido: University of Cambridge.
- Universidad Nacional Autónoma de México (1996). *Programa de estudio Matemáticas. Semestres I al IV*. Educación Media Superior. México: CCH, UNAM.
- Universidad Nacional Autónoma de México (1996). *Programa de estudio de Cálculo Diferencial e Integral I y II*. Educación Media Superior. México: CCH, UNAM.