



Álbuns de figurinhas: uma modelagem do problema do colecionador de cupons

Flávia **Freitas** Maia
Mestranda PPECM-CEFET/RJ
Brasil

flaviafreitasmaia@gmail.com

Rafael Garcia **Barbastefano**
PPECM-CEFET/RJ
Brasil

rgb@cefet-rj.br

Dayse Haime **Pastore**
PPECM-CEFET/RJ
Brasil

dpastore@cefet-rj.br

Resumo

Este trabalho visa levar aos alunos do Ensino Médio um tema avançado de Análise Combinatória, conhecido na teoria das Probabilidades como, o Problema do Colecionador de Cupons (Coupon Collection Problem). Nosso interesse neste tema vem de sua crescente valorização devido à possibilidade de adaptação em diversos campos de estudos. Entretanto, por não fazer parte do currículo escolar obrigatório, o adaptamos à brincadeira de colecionar figurinhas, típica de crianças, através da modelagem matemática, usando as ferramentas computacionais como a programação em Visual Basic for Application (VBA) e planilhas, gráficos e tabelas do Microsoft Excel®.

Palavras chave: Análise Combinatória, Excel e VBA, Ensino Médio, Problema do Colecionador de Cupons, Modelagem.

Introdução

O hábito de colecionar está presente na sociedade há muito tempo. Existem colecionadores dos mais diversos tipos de objetos e pelas mais variadas razões. Alguns chegam a atribuir um grande valor sentimental, tornando-se dependentes dos mesmos. Seja qual for o tipo de colecionador é difícil avaliar o quanto colecionar pode ser importante. Pense! Se informações não fossem guardadas como saberíamos de nosso passado?

O caso das coleções finitas despertou o interesse da Matemática, em um estudo que é conhecido na literatura como O Problema do Colecionador de Cupons. É um caso de combinatória bem conhecido na teoria das probabilidades (Feller, 1968) e seu objetivo é prever o custo de se completar alguma coleção, cujos itens têm a mesma probabilidade de aparecer. Ele já foi adaptado diversas vezes para a resolução de problemas específicos que requisitavam a alteração de dados como a probabilidade de retirada de cada elemento (Brown, Peköz e Ross, 2008), interação entre dois colecionadores (Myers e Wilf, 2006), mudanças da regra de reposição (Kobza, Jacobson e Vaughan, 2007).

Entre suas aplicações, temos os estudos de divulgação de produtos em marketing, as estimativas sobre exposição de uma certa população a uma doença contagiosa, a criação de provas a partir de um banco de questões e a validação de geradores de números aleatórios. Neste trabalho faremos uma aplicação à brincadeira de completar álbuns de figurinhas.

Através da modelagem matemática, tornamos o Colecionador de Figurinhas aplicável aos alunos do Ensino Médio como um tópico mais avançado do estudo de Análise Combinatória. Escolhemos trabalhar com reposição de figurinhas, possibilidade de troca entre colecionadores e compra das figurinhas tanto das bancas de jornal como da editora. Nossa base de cálculos está sendo feita sobre o Visual Basic for Applications (VBA) do Microsoft Excel por nos permitir a criação de casos aleatórios e funções, além, de uma apresentação simples e organizada (em formulário) para a inserção de dados.

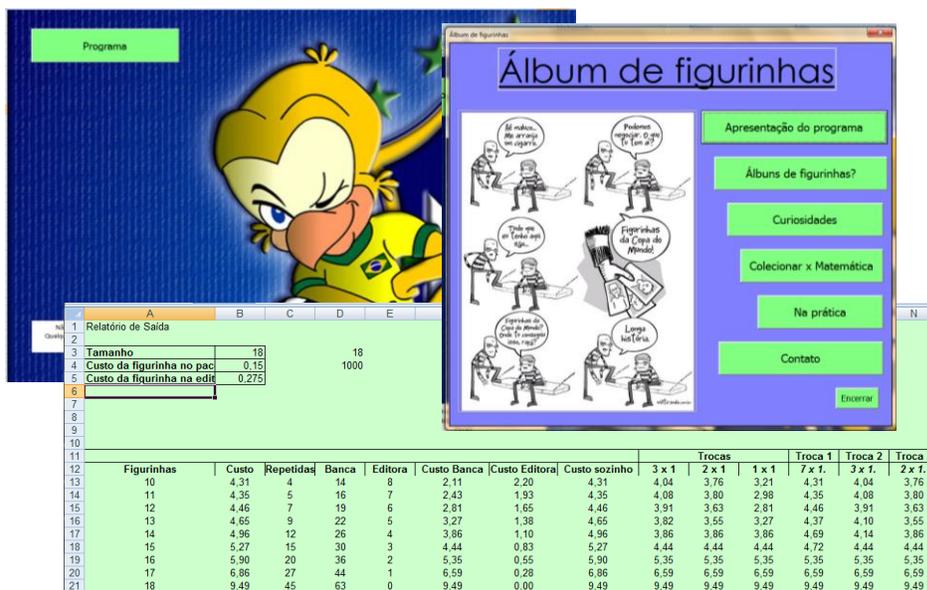


Figura 1. Telas do Programa: O Colecionador de Figurinhas

Neste artigo apresentamos uma síntese dos pontos principais do trabalho em desenvolvimento, no qual fornecemos ferramentas para que o professor entenda a problemática e o apresente aos seus alunos. Desta forma, apresentamos a Análise Combinatória por outro ângulo, mostrando que o desenvolvimento da combinatória não se restringiu aos problemas dos jogos de azar. Em seguida, apresentamos os pré-requisitos do programa: o Problema do Colecionador de Cupons e justificamos a escolha do Microsoft Excel com a programação em

VBA para a simulação do nosso caso. Feito isto, apresentamos o produto. Explicando sua estrutura, como foram realizados os cálculos e os resultados.

O planejamento

Para a criação do programa, necessitávamos de uma base matemática para apresentar o Problema do Colecionador de Cupons de uma forma simples para os alunos do Ensino Médio. Por isto, pesquisamos sobre Análise Combinatória e o próprio problema do colecionador. Precisávamos, também, de um programa para criarmos a simulação da brincadeira. Escolhemos o Excel por sua popularidade e acessibilidade no meio educacional para o trabalho de modelagem.

Apresentaremos então, um resumo de cada conceito utilizado no trabalho para um completo entendimento do material.

Análise Combinatória

Quando procuramos fatos sobre a história da Análise combinatória, frequentemente encontramos um trecho, extraído do livro “Análise Combinatória e Probabilidade” do professor Morgado e outros:

“Foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos de contagem”.

Os jogos de azar teriam sido o grande impulso para este estudo, entretanto, podemos citar aplicações em diversos campos como o misticismo pelo matemático chinês Won Wang na filosofia do Yin Yang; a astrologia pelo espanhol Abraham Ibn Ezra no estudo de conjunções de planetas, tomados dois a dois, três a três, n a n .; na poesia pelo hindu Bhaskara em sua obra Lilavati e a matemática, gerando as fórmulas de permutação e combinatória que conhecemos hoje. Veja a figura abaixo:

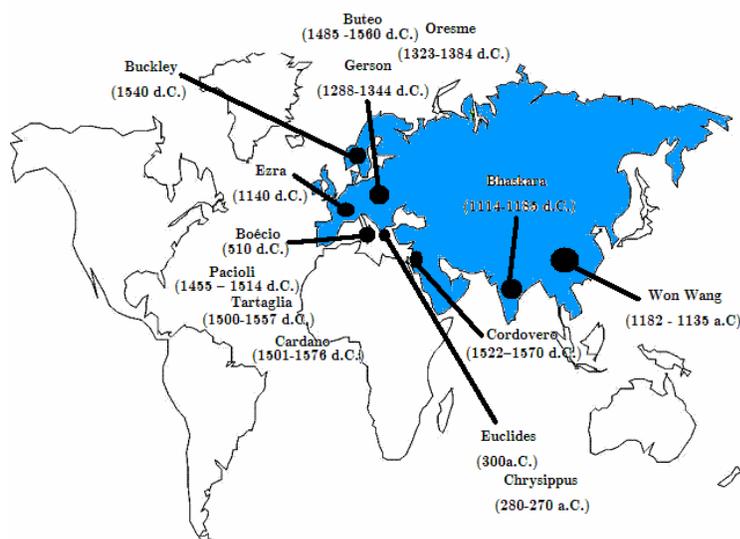


Figura 2. Desenvolvimento da Análise Combinatória até o século XVI: Europa e Ásia

Atualmente, a análise combinatória continua em desenvolvimento pela “importância de problemas de enumeração [...] devido a necessidades em teoria dos grafos, em análise de algoritmos etc”. (Morgado, 2004)

O Problema do Colecionador de Cupons (Coupon Collection Problem)

O Problema do Colecionador de Cupons é um problema conhecido na Teoria das Probabilidades (Feller, 1968). Seu objetivo é definir quantas unidades o colecionador deve adquirir até que possua uma coleção completa. Definindo informalmente: Existem n tipos de cupons e em cada rodada um cupom é escolhido aleatoriamente. Cada cupom tem a mesma probabilidade de ser extraído. O objetivo é estudar o número exato de rodadas antes de o colecionador obter todos os n cupons da coleção (Motwani e Raghavan, 1995).

Matematicamente, a resposta para este questionamento se dá por $E[W_{n,n}] = n(\ln(n) + \theta(n))$, onde n é o número total de itens da coleção. Para um aluno do Ensino Médio, cálculos com logaritmo não é algo claro e rápido de se entender, mas nosso objetivo é que o aluno desenvolva o raciocínio que o levará à fórmula, o que ele é capaz de fazer com seus conhecimentos de Análise Combinatória, dando continuidade à lógica que segue os materiais feitos para alunos do Ensino Médio. Estes procuram apresentar o conteúdo aumentando o nível de complexidade, começando com os simples exercícios de pinturas de listras, formação de Comissões, até chegar aos casos de brincadeiras de roda envolvendo cálculos de probabilidade.

O Problema do Colecionador de Cupons possibilita uma extensão do conteúdo, correspondência com o cotidiano e desejamos que instigue o interesse dos alunos. Com ele podemos ficar surpresos com os resultados obtidos por uma simples variação dos parâmetros, podemos nos questionar como as combinações podem ser feitas, quais as exceções em cada caso, qual seria a maneira mais apropriada de combinar etc.

Planilhas aplicadas à educação

O uso de planilhas na Educação não é uma experiência recente. Esta inserção se iniciou há mais de 30 anos com o VisiCalc, em 1979, sendo substituído pelo Lotus 1-2-3 (1982) e MS Excel (1985) (Houghton, 2009).

D’Souza e Wood (2001), que trabalham com o Ensino Médio, afirmam que o uso das planilhas tem muitas aplicações matemáticas e pode ser de grande benefício a todos os níveis. Como exemplos de aplicações, temos: Teoria dos Números, Combinatória, Análise Numérica, Estatística, Ciências Físicas, Ciência da Computação entre outras.

Em geral, os benefícios vistos por diversos autores são: o uso de planilhas facilita a aprendizagem em uma variedade de estilos (ex.: orientado para o problema, construtivista, investigação, descoberta orientada etc.); são interativas, dão uma resposta imediata para se alterar dados ou fórmulas; elas permitem que os dados, fórmulas e saídas gráficas estejam disponíveis na tela, o que dá aos alunos um grande controle e propriedade sobre a sua aprendizagem; os alunos podem resolver problemas complexos e lidar com grandes quantidades de dados sem necessidade de qualquer programação (Beare, 1993); permite uma ponte entre formas diferentes de se apresentar um mesmo conteúdo (ex.: álgebra e aritmética); permite que os estudantes busquem padrões, construam expressões algébricas, generalizem conceitos, justifiquem conjecturas, e estabeleçam a equivalência dos dois modelos como necessidades intrínsecas e significativas e não como requisitos arbitrários colocados pelo professor

(Friedlander, 1998).

Alguns pontos que antes poderiam ser um problema no uso de planilhas nas escolas, já vêm sendo superados. Os alunos estão mais familiarizados com as aplicações básicas da Tecnologia de Informação (TI), incluindo planilhas, uma ferramenta mais genérica; professores e alunos têm mais controle sobre modelos de planilha do que de outros softwares e, além disso, é um programa muito acessível e que dispensa tempo (Ruthven e Hennessy, 2002).

O programa

Aproveitando o clima da Copa do Mundo 2010 pudemos obter diversas informações sobre o processo de produção dos álbuns. Nosso programa, O Colecionador de Figurinhas, foi criado visando estas informações e nosso interesse é propor aos alunos um desenvolvimento do conteúdo de Análise Combinatória e análises críticas deste processo. Logo, mantivemos que todas as figurinhas possuem a mesma probabilidade de ocorrência, devido ao fato que os consumidores são protegidos por lei, e que sempre se achará um colecionador para a troca, uma vez que, em geral, cada cromo é produzido na proporção 140 estampas por álbum e a troca já se consolidou pelo mundo virtual.

A estrutura do programa

Visando um encadeamento de informações para o entendimento do aluno, o programa é composto de diversos itens que guiarão o trabalho de uma forma dinâmica, ora pesquisando/debatendo ora calculando/planejando. Estes itens são: curiosidades sobre coleções (produção de figurinhas, dados da Panini®...), um alerta sobre os efeitos em colecionadores (doenças psicológicas), a visão matemática da brincadeira, palpites sobre as quantidades de itens de coleções diversas, programas de cálculos e um completo guia de como usar o programa para professores e para alunos. As atividades estão dispostas nos tópicos de acordo com seu tema principal. Há também, um link para dúvidas, sugestões, comentários e elogios sobre o programa.



Figura 3. Tela principal do programa

O desenvolvimento matemático através da programação

A programação, de um modo geral, permite o armazenamento de dados em uma determinada seqüência (regras) que deve ser seguida por qualquer pessoa ou coisa, assim com o método da adição ou a fórmula de Bhaskara. O nome desta seqüência é Algoritmo e um bom algoritmo é aquele em que economizamos tempo para resolvê-lo. Pensando nisto, utilizamos vetores para o armazenamento de dados e a função Randomize para os cálculos.

Um Vetor é uma forma de armazenamento de dados que associa mais de um valor em 1 posição, nos permitindo usá-los posteriormente. Por exemplo: Na tabela abaixo, “Nome do aluno” representa um número de referência e “Nota” é o nome do conjunto. Assim podemos dizer que a 2ª nota é 8,8 ou representar [2] = 8,8. Se quisermos calcular, posteriormente, a média da turma ou fazer qualquer outro cálculo, basta recorrer a estes valores. A posição 2 sempre estará associada ao valor 8,8 e não precisamos digitar tudo outra vez.

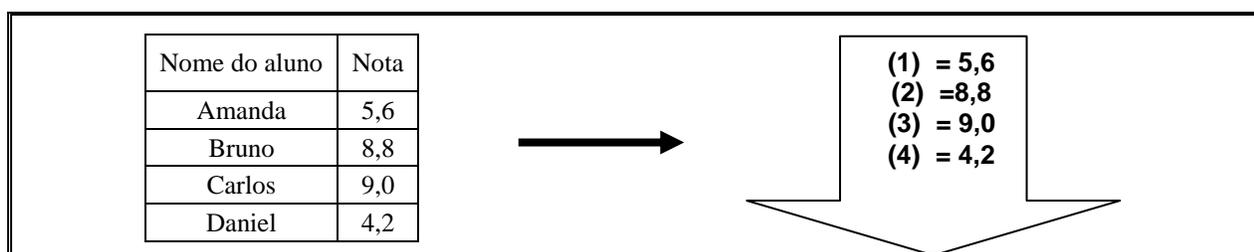


Figura 4. A idéia de um vetor.

A função *Randomize* (Rnd) foi utilizada para gerar a compra das figurinhas do álbum. Esta função, gera dentro de um vetor, o sorteio de números maiores ou igual a 0 (zero) e menores que 1 (um). O valor sorteado provoca um resultado diferente de acordo com o que foi estabelecido na programação.

Tabela 1

Função *Randomize*

Se o número é:	Rnd gera:
Menor que zero	Sempre o mesmo número, utilizando <i>número</i> como propagação.
Maior que zero	O número aleatório seguinte na seqüência.
Igual a zero	O número gerado mais recentemente.
Não fornecido	O número aleatório seguinte na seqüência.

Notas. Operações realizadas pela Função *Randomize*. Fonte: Ajuda online do Microsoft Access.

A função Rnd é descrita como $Int((upperbound - lowerbound + 1) * Rnd + lowerbound)$, na qual, *upperbound* ou limite superior é o número maior no intervalo (número total de figurinhas do álbum) e *lowerbound* (limite inferior) é o número menor no intervalo (tomamos o número 10, 10 figurinhas inéditas compradas na banca).

O tamanho do álbum e o número de corridas são os números de referência, para obtermos o número de figurinhas compradas, figurinhas inéditas e o número de figurinhas repetidas. Toda vez que o valor gerado é novo, é adicionada 1 unidade em figurinhas compradas e 1 unidade em figurinhas inéditas, caso contrário, é adicionada 1 unidade em figurinhas compradas e 1 unidade em figurinhas repetidas. Isto vai ocorrendo até bater o limite superior, ou seja, até o número de figurinhas inéditas ser igual ao número total de figurinhas do álbum.

No mesmo vetor calculamos o custo da compra na banca e da compra da editora. A soma dos dois será o custo total de se completar o álbum naquelas condições.

```

Do
Sorteio = Int((upperbound - lowerbound + 1) * Rnd + lowerbound)

If (Album(Sorteio) = 0) Then
    figurinhas = figurinhas + 1
    compradas = compradas + 1
    Album(Sorteio) = 1
Else
    compradas = compradas + 1
    repetidas = repetidas + 1
End If

Loop Until (figurinhas = tam)

soma = soma + compradas * custo_pacotinho / 1000 + (tamanho_do_album - tam) * custo_editora / 1000
soma2 = soma2 + repetidas

```

Figura 5. A modelagem: Programação em Visual Basic for Application

Após os cálculos feitos pelo programa, automaticamente é gerada uma planilha completa com os resultados e o gráfico relacionado, a partir dos quais podemos descobrir em que situação teremos o menor custo total do álbum.

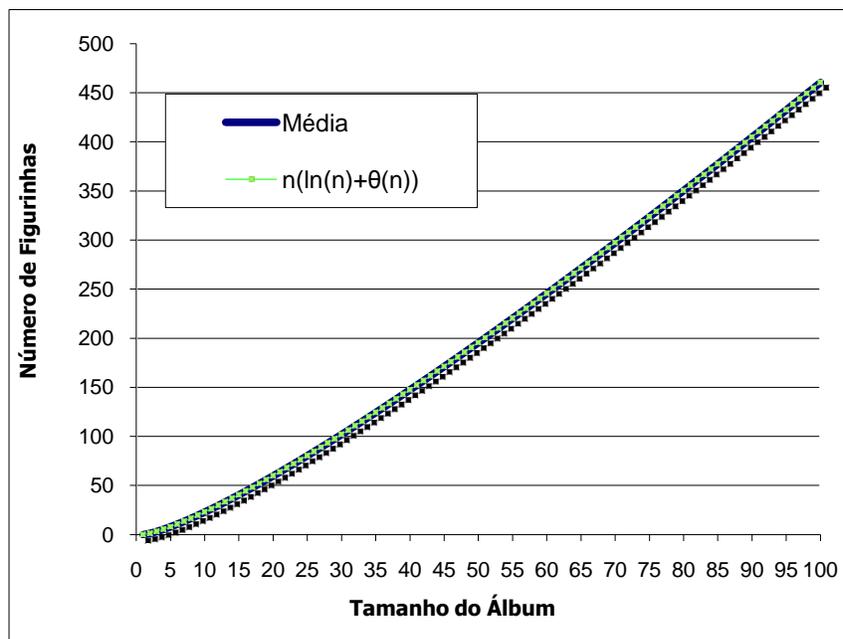


Figura 6. Comparando as compras: Simulação em VBA (Média) versus Matemática

Simulando o caso de troca de figurinhas

A troca de figurinhas é uma forma de reduzir o custo do seu álbum. Ela pode ser calculada a partir de vários fatores, como: a probabilidade de ocorrência do cromo, o número de colecionadores envolvidos em todo o processo, a quantidade de cromos disponíveis de cada colecionador etc.

O processo de troca simulado faz a troca de todas as figurinhas repetidas até que o álbum se complete, dando a possibilidade de escolhermos quantas figurinhas queremos trocar e quantas receberemos de volta. Automaticamente, é abatido do preço total o valor economizado com a troca.

Simulamos: a compra de figurinhas da banca de jornal e/ou direto da editora e casos de troca entre colecionadores. Lembramos que nesta simulação, consideramos que todas as figurinhas são produzidas igualmente, gerando uma mesma probabilidade de ocorrência. Nosso objetivo é descobrir qual será a combinação de compra mais vantajosa economicamente para o comprador.

O desenvolvimento matemático através da fórmula

A fórmula dada por: $E[W_{n,n}] = n(\ln(n) + \theta(n))$ é obtida a partir das seguintes etapas:

Para completarmos o nosso álbum precisamos de n figurinhas diferentes. A chance que temos de comprar a primeira figurinha e ela ser inédita é $Z = 1$, 100% de chance de ser inédita. Imagine como se fosse um álbum com apenas uma figurinha. $\frac{1}{1}$, significa álbum completo, ou seja, uma figurinha em um conjunto unitário. Generalizando, a probabilidade é de 1 em n ou $\frac{1}{n}$.

Para a segunda figurinha, já não podemos dizer que temos a mesma chance, pois ela pode ser igual à primeira. Então será: $Z = \frac{1}{2}$. Uma figurinha nova entre duas figurinhas possíveis. Assim, a probabilidade será $\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, 50% de chance.

Para a terceira, seguindo o mesmo raciocínio, teremos: $\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

Generalizando, $\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) = \frac{n-i+1}{n}$, onde i é o número de figurinhas compradas. Esta é a forma da equação escrita no início do texto, antes de se aplicar as propriedades de somatório e logaritmo. Chegar a este ponto é o nosso objetivo e é o suficiente para os alunos do Ensino Médio.

A dedução desta fórmula aparece no programa com o auxílio de uma história em quadrinhos.

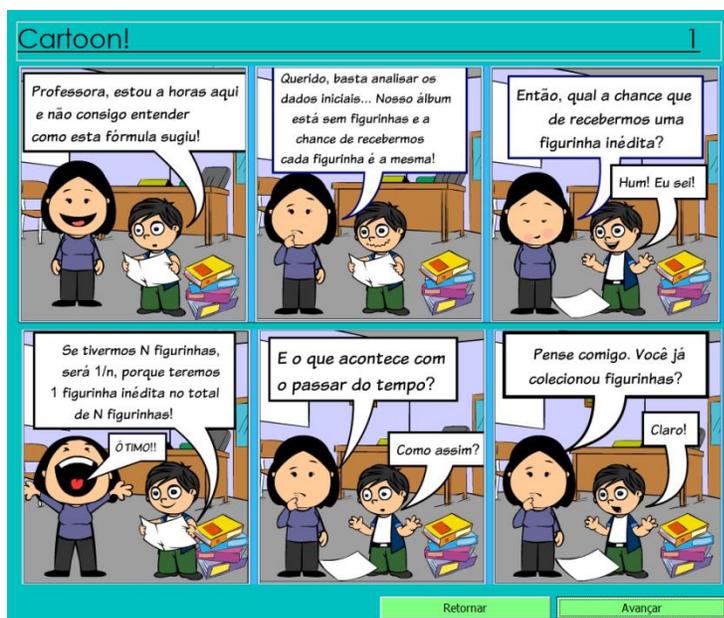


Figura 7. História em quadrinhos sobre a fórmula matemática.

Análise Crítica

O programa a medida do possível procura provocar uma visão crítica dos assuntos envolvidos na atividade de colecionar. Buscamos informações sobre o conceito, sobre doenças psicológicas que atingem colecionadores ou geram colecionadores, obstáculos /soluções para se completar um álbum, a política de preço adotada e uma criação do álbum economicamente favorável ao fabricante pelos alunos. Para isto, além de pesquisas e debates em sala de aula precisam da base matemática geradora de custos. O possível entrosamento com o (a) professor (a) de Educação Artística seria interessante neste momento.

Guias do Professor e Guia do Aluno

Ambos os guias foram criados para nortear o trabalho em sala e em casa para seu total aproveitamento. Eles contêm informações sobre como utilizar o programa, ordem das atividades, sugestões de leitura. O guia do professor conta também com as soluções das atividades e outras sugestões de leitura e debates.

Propomos diversas atividades durante o programa, sempre acompanhadas de textos para a orientação dos alunos.

Os resultados

Custos

Inicialmente tínhamos a informação de que a melhor forma de se completar um álbum, economicamente, era comprar as figurinhas na banca até se obter $\frac{1}{3}$ de seu preenchimento e

depois comprar as demais diretamente da editora. Após diversas simulações, vimos que o álbum da Copa 2010 tem o valor mínimo em torno de R\$ 154,05, considerando R\$ 59,45 da compra de 396 figurinhas na banca e R\$ 94,60 da compra das demais na editora. Logo, compramos na banca até completar 296 figurinhas no álbum, o que significa que compramos aproximadamente 45% do álbum na banca.

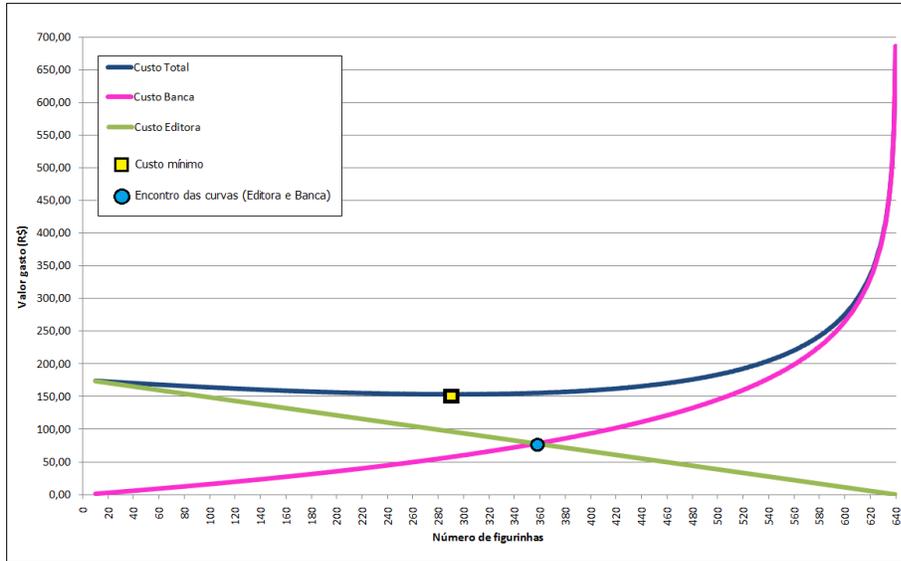


Figura 8. Custo do Álbum da Copa 2010

Troca de figurinhas

A troca de figurinhas gera uma economia de aproximadamente R\$ 57,97 no álbum, 38% de desconto. A troca mais vantajosa é a troca de 1 figurinha por 1 figurinha. A nossa nova simulação gerou um custo de R\$ 96,08 com a compra de cromos na banca até se obter 405 inéditos.

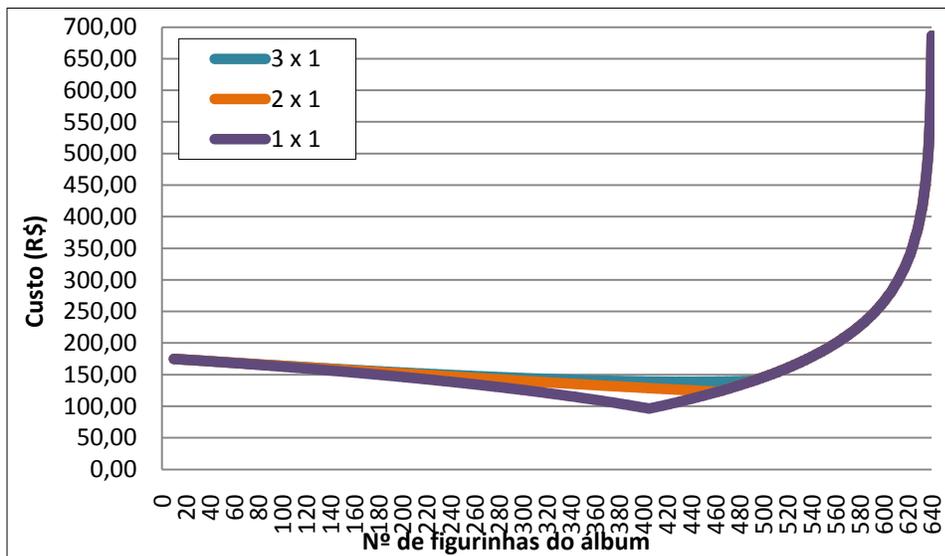


Figura 9. Trocas de figurinhas entre colecionadores

Após operações sucessivas, podemos afirmar que a troca de figurinhas de uma quantidade X de figurinhas por apenas 1 (uma) inédita torna-se vantajosa caso o colecionador tenha muitos cromos repetidos, ou seja, se o colecionador está quase completando o álbum e ainda tem muitas figurinhas repetidas não sugerimos que ele recuse a oferta de trocar umas 10 figurinhas por apenas 1 inédita.

Conclusão

Ao introduzirmos o caráter crítico neste processo, achamos interessante o número de pessoas que fazem coleções de álbuns e a variação etária e, nos intrigamos com o número de pessoas que sofrem de doenças psicológicas associadas às coleções. O alerta sobre estas doenças é fundamental, pois convivemos com estas pessoas e não nos damos conta de como elas sofrem por sua mania de guardar coisas e não conseguir se desfazer delas depois. O primeiro passo é tornar a pessoa consciente de que isto é uma doença e que pode ser curada.

Sobre as pesquisas matemáticas, descobrimos que nem sempre a Análise Combinatória foi usada para a resolução de problemas dos jogos de azar e que hoje, assim como o nosso programa vem sendo utilizada para fins de segurança, pesquisa, estudos estatísticos e problemas administrativos, através do Colecionador de Cupons, Grafos, Criptografia etc.

A simulação em VBA tornou o estudo acessível aos alunos, sem perda de tempo. Toda sua programação foi realizada pelos autores, entretanto, assim como a programação descrita nesse artigo, podemos afirmar que poderia ter sido feita pelos alunos e sugerimos isto para os professores que dispõem de mais tempo livre em suas turmas. A apresentação dos dados nas planilhas e gráficos tornou o trabalho limpo, ilustrativo e de fácil compreensão.

O estudo sobre coleções não é algo novo e nem acabado. É um estudo que desperta o interesse por suas diversas possibilidades de aplicação. Uma delas é a modelagem do Problema de Colecionador de Cupons, aplicado a Álbuns de Figurinhas.

Estabelecemos através da simulação discreta uma extensão do problema ao criarmos uma estratégia de aquisição de cromos que minimizasse os custos envolvidos. O Problema do Colecionador de Cupons pode ser facilmente adaptado para casos da área de saúde e pesquisa de mercado.

Com dados de entrada reais no modelo de simulação, foi verificado um resultado interessante do ponto de vista do colecionador. Foi encontrado um ponto ótimo esperado para uma combinação de compras em banca e diretamente da editora. Tal ponto de ótimo permite ao colecionador estabelecer um ponto a partir do qual ele deixa de adquirir figurinhas da banca e passa a comprar diretamente da editora. Também, encontramos a melhor solução para o caso de trocas de cromos entre colecionadores e o quanto pode ser economizado nesta dinâmica.

Desejamos que todos os alunos compreendam o desenvolvimento da Análise Combinatória e também desenvolvam sua criatividade e capacidade crítica para resolver os problemas propostos. Esperamos que o programa instigue os alunos e os mesmos sejam capazes de associar o caso das figurinhas às demais áreas científicas de acordo com o seu interesse.

Bibliografia e referências

- Beare, R. (1993). How spreadsheets can aid a variety of mathematical learning activities from primary to tertiary level. *Technology in Mathematics Teaching: A Bridge Between Teaching and Learning.*, B. Jaworski. Birmingham, Reino Unido: 117—124.
- Brown, M., Peköz, E. A., & Ross, S. M. (2008). Coupon Collecting. Probability In The Engineering And Informational Sciences. Estados Unidos.
- D'Souza, S., & Wood, L. N. (2001). Investigating the Effects of Using Spreadsheets in a Collaborative Learning Environment. *The Sixth Asian Technology Conference in Mathematics (ATCM2001)*. RMIT University, Melbourne, Australia, ATCM, Inc.
- Feller, W. (1968). An Introduction to Probability Theory and Its Applications. (3rd ed.), John Wiley.
- Friedlander, A. (1998). An EXCELlent bridge to algebra. *Mathematics Teacher* 91(50): 382—383.
- Kobza, J. E., Jacobson, S. H., & Vaughan, D. E. (2007). *A Survey of the Coupon Collector's Problem with Random Sample Sizes*. Estados Unidos: Storrs.
- Morgado, A. C., Carvalho, J. B., Carvalho, P. C., & Fernandez, P. (2004). *Análise Combinatória e Probabilidade* (6ª ed.). SBM.
- Motwani, m., & raghavan, p. (1995). *Randomized Algorithms*. Califórnia: Cambridge University Press.
- Myers, A. N., & Wilf, H. S. (1 de Agosto de 2003). *Some New Aspects of the Coupon Collector's Problem*. Recuperado el 14 de Janeiro de 2010, de Siam Journal on Discrete Mathematics: <http://www.siam.org/journals/sirev/48-3/65443.html>
- Ruthven, K., & Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. Em *Educational Studies in Mathematics*, 47—88.
- Houghton, R. S. (11 de Janeiro de 2009). *Spreadsheets*. Acesso em 14 de Maio de 2009, disponível em Western Carolina University: <http://www.ceap.wcu.edu/Houghton/EDELCompEduc/Themes/spreadsheets/spreadsheets.html>