Kleyton Vinicyus **Godoy**
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Campus Rio Claro
Brasil
kvgodoy@yahoo.com.br
Adriana Cesar de **Mattos**
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Campus Rio Claro
Brasil
mattosac@rc.unesp.br

Um breve estudo sobre invariantes de formas quadráticas binárias

Resumo

Este artigo apresenta um breve estudo sobre a Teoria dos Invariantes focando para as formas homogêneas quadráticas binárias. Apresentamos um sucinto estudo da Teoria dos Invariantes, baseados nos principais autores que fundamentam essa Teoria. Seu início foi em meados do século XIX e teve seu fim nas primeiras décadas do século XX (FISHER, 1996). Iremos também exemplificar os métodos de George Boole e Arthur Cayley a partir do cálculo de invariantes de formas quadráticas binárias.

Palavras-Chaves: *Formas Homogêneas, Arthur Cayley, Invariantes, Método de Boole, Quadrática Binária.*

Abstract

This article presents a brief study about the Theory of Invariants focusing to the binary quadratic homogeneous forms. We present a concise study of the Theory of Invariants, supported by main authors that gave the base this Theory. Its beginning was the about the mid-nineteenth century and your end were the firsts decades of twenty century (FISCHER, 1996). We will also to exemplify the George Boole and Arthur Cayley’s methods from the calculus of invariants of binary quadratics forms.

Keywords: *Homogeneous Forms, Arthur Cayley, Invariants, Boole's method, Binary Quadratic*.

Introdução

O início do estudo dos invariantes no cenário inglês foi em meados do século XIX (PARSHALL, 2006). O marco da teoria se deu através da publicação em 1841 de George Boole (1815-1864), por meio do artigo intitulado "*Exposition of the General Theory of Linear Transformations*".

De acordo com Olver (1999), a Teoria dos Invariantes se tornou moda em meados do século XIX, o tema esteve presente com grande frequência em inúmeras revistas de matemática desse período na Europa. A movimentação em torno do assunto envolveu vários matemáticos num propósito comum, saber sobre "*...the finitude of the number of fundamental invariants*" (OLVER, p.6).

Arthur Cayley (1821-1895) e James Joseph Sylvester (1814-1897) são dois matemáticos que certamente devem ser citados como os maiores contribuintes dessa teoria. Segundo Parshall (1998), estes matemáticos se tornaram grandes amigos e trocaram mais de 500 cartas abordando principalmente tópicos relacionados à Teoria dos Invariantes. Nessas correspondências, a autora ainda relata que, os dois matemáticos também trocaram informações sobre Teoria dos Números e Teoria dos Grupos. O fruto desta parceria resultou algumas publicações em revistas matemáticas da época. No ano de 1854, Cayley publicou "*An Introductory Memoir on Quantics*", que marcou o início de uma série de publicações referentes à Teoria dos Invariantes na *Philosophical Transaction of Royal Society of London.*

Finalmente, no inicio do século XX essa teoria chega ao seu fim. Fisher (1996) considerou que os matemáticos que deveriam articular o avanço da área não foram bem sucedidos e não criaram sucessores. Há naturalmente uma referência "interna" à matemática sobre o desfecho do desaparecimento dessa teoria. Segundo o mesmo autor, David Hilbert (1862-1943) foi também responsável sobre o seu fim "*...Hilbert's act took on a symbolic meaning in the passing of time* (...) *the rhetoric of modern mathematical method supplied an explanation for the changes that took place*" (p.159). Hilbert "*…proved that a finite system of independent invariants existed for quantics in any number of variables. Hilbert did not exhibit a procedure for finding the systems. He proved their existence abstractly*" (Fisher, 1996, p.145). Na realidade outro matemático que se dedicou à Teoria dos Invariantes, Gordan (Fisher, 1996) disse que "*…was shown Hibert's proof he was reported to have said, 'That is not mathematics, that is theology'".*

Invariantes

A Teoria Clássica dos Invariantes investigava propriedades relativas às formas homogêneas (George Boole, 1841) ou aos polinômios homogêneos (denominação atual) ou aos quânticos (Cayley, 1854) que não são alteradas por transformações lineares.

O cálculo de invariantes se refere apenas a formas homogêneas, que podemos entender como sendo polinômios que sempre mantêm o mesmo valor na soma dos expoentes das variáveis de cada um de seus termos. No primeiro exemplo podemos observar que em qualquer termo os expoentes das variáveis somadas resultam o valor dois, enquanto que no segundo, resultam três. Vejamos:

1º) $xy + 2y^2$ e $3x^2 - 5xz + 7xy + y^2 + 2yz + z^2$

2º) $x^3 + 3x^2y + 4xy^2 + y^3$ e $x^3 - 2xy^2$

Se uma forma homogênea estiver definida nas variáveis x e y, utilizando Cayley (1854), ela será denominada *quântico binário*. Caso haja três, ou seja, x, y e z, a denominação será *quântico ternário*, com quatro variáveis, *quântico quartenário*, e assim por diante. Se existirem q variáveis, podemos chamar essa forma de *quântico q-ária*. O grau (ou expoente) de um quântico nas variáveis x, y, z,..., é chamado de *ordem*. Quânticos de primeira, segunda, terceira, quarta, p ordens são chamados respectivamente de: linear, quadrático, cúbico, quártico,..., p-ico.

Cayley (1854) constrói o invariante de um quântico a partir da substituição das variáveis originais por transformações lineares obtendo o mesmo quântico em novas variáveis e coeficientes. Uma função f dos coeficientes do quântico original multiplicado por uma função ϕ dos coeficientes da transformação linear escolhida é igual mesma função f dos coeficientes do quântico obtido pela substituição, uma função f assim definida é um invariante do quântico. Tomemos a binária de ordem p, por exemplo:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)(x, y)^p$$

Aplicamos uma transformação linear do tipo:

$$x = lX + mY$$
$$y = l'X + m'Y$$

para tornar-se finalmente:

$$(A_0, A_1, A_2, \dots, A_p)(X, Y)^p$$

onde $A_0, A_1, A_2, \dots, A_p$ são funções de $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ e l, m, l', m'. Conforme Elliot (1895), $f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$ será invariante se manter a forma:

$$f(A_0, A_1, A_2, \dots, A_p) = \phi(\mathrm{l}, \mathrm{m}, \mathrm{l}', \mathrm{m}')\mathrm{f}(\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{p})$$

De acordo com Elliot (1895), podemos concluir que é possível trocarmos cada uma das variáveis de um quântico por uma soma de múltiplos das primeiras potências de um quântico de mesma ordem por meio de uma transformação linear.

É importante deixarmos claro que a notação a utilizada para definirmos o conceito de Invariantes é a versão simplificada formulada por Arthur Cayley (1854) para denotar uma forma homogênea binária, dada como: $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)(x, y)^p$.

Elliot (1895) não utiliza esta versão simplificada de Cayley para denotar uma forma homogênea, ele utiliza a versão estendida (notação padrão) de um binomial de ordem p:

$$a_0x^p + pa_1x^{p-1}y + \frac{p(p-1)}{1*2}a_2x^{p-2}y^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1*2*3}a_3x^{p-3}y^3 + \cdots + pa_{p-1}xy^{p-1} + a_py^p$$

Uma forma mais recente de escrever uma forma homogênea de ordem n, utilizando o mesmo princípio binomial de Elliot, é dada por Olver (1999) da seguinte maneira:

$$Q(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^i y^{n-i}$$

É fácil percebermos que Olver (1999) ao abordar o assunto, segue os princípios definidos por Elliot (1895) e Cayley (1854), a principal diferença no modo de tratar o tema está na forma de denotar os conceitos e aplicar simbologias. Para que isto fique bem claro, vejamos a definição de invariante também dada na forma binária por Olver (1999):

Um invariante da forma binária Q(x,y) de ordem n é uma função I(a) = I(a_0, ... , a_n) dependendo do valor dos coeficientes de a = (a_0, ... , a_n), que não se altera mesmo sofrendo uma transformação linear. O invariante fica portanto expresso:

$$I(a) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^k I(\bar{a})$$

Sendo, $(\bar{a}) = (\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n)$ os coeficientes do novo polinômio, $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{Q}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = Q(x, y)$ e k é uma constante, o peso do invariante.

Olver (1999) mantém a definição de invariante conforme estabelecida pelos matemáticos do século XIX, fazendo uso das notações atuais.

Método de Boole

O marco histórico do início da Teoria dos Invariantes, de acordo com Parshall (2006), foi o artigo de George Boole (1841) intitulado "*Exposition of the General Theory of Linear Transformations*". Ele apresenta um método para encontrar Invariantes de formas homogêneas.

O método de Boole (1841) considerava duas formas homogêneas Q e R.

$$Q = A_1 x_1^{\ n} + A_2 x_2^{\ n} + \cdots + A_m x_m^{\ n} + \Sigma A_\iota x_1^{\ \alpha} x_2^{\ \beta} \dots x_m^{\ \mu}$$

$$R = B_1 y_1^{\ n} + B_2 y_2^{\ n} + \cdots + B_m y_m^{\ n} + \Sigma B_\iota y_1^{\ \alpha} y_2^{\ \beta} \dots y_m^{\ \mu}$$

De modo a tomar Q = R com o objetivo de estabelecer relações entre os coeficientes das formas Q e R, Boole (1841) realizou um processo de derivações em relação às variáveis presentes nas formas Q e R.

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dx_1}\dfrac{dx_1}{dy_1} + \dfrac{dQ}{dx_2}\dfrac{dx_2}{dy_1} + \dots + \dfrac{dQ}{dx_m}\dfrac{dx_m}{dy_1} = \dfrac{dR}{dy_1} \\ \dfrac{dQ}{dx_1}\dfrac{dx_1}{dy_2} + \dfrac{dQ}{dx_2}\dfrac{dx_2}{dy_2} + \dots + \dfrac{dQ}{dx_m}\dfrac{dx_m}{dy_2} = \dfrac{dR}{dy_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dQ}{dx_1}\dfrac{dx_1}{dy_m} + \dfrac{dQ}{dx_2}\dfrac{dx_2}{dy_m} + \dots + \dfrac{dQ}{dx_m}\dfrac{dx_m}{dy_m} = \dfrac{dR}{dy_m} \end{cases} \qquad (1)$$

Considerando as relações lineares entre dois conjuntos de variáveis temos:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \dots + \lambda_m y_m \\ x_2 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 \dots + \mu_m y_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 \dots + \rho_m y_m \end{cases} \qquad (2)$$

Aplicando (1) em (2), temos:

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{dQ}{dx_1} + \mu_1 \frac{dQ}{dx_2} \dots + \rho_1 \frac{dQ}{dx_m} = \frac{dR}{dy_1} \\ \lambda_2 \frac{dQ}{dx_1} + \mu_2 \frac{dQ}{dx_2} \dots + \rho_2 \frac{dQ}{dx_m} = \frac{dR}{dy_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_m \frac{dQ}{dx_1} + \mu_m \frac{dQ}{dx_2} \dots + \rho_m \frac{dQ}{dx_m} = \frac{dR}{dy_m} \end{cases}$$

Boole (1841) assume em seu método $\frac{dQ}{dx_1} = 0, \frac{dQ}{dx_2} = 0, \dots, \frac{dQ}{dx_m} = 0$.

A diferenciação tem o intuito de diminuir o grau/ordem das formas homogêneas em (n – 1):

$$\begin{cases} nA_1 x_1^{\ n-1} + \Sigma A_\iota \alpha x_1^{\ \alpha-1} x_2^{\ \beta} \dots x_m^{\ \mu} = 0 \\ nA_2 x_2^{\ n-1} + \Sigma A_\iota \beta x_1^{\ \alpha} x_2^{\ \beta-1} \dots x_m^{\ \mu} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ nA_m x_m^{\ n-1} + \Sigma A_\iota \mu x_1^{\ \alpha} x_2^{\ \beta} \dots x_m^{\ \mu-1} = 0 \end{cases}$$

Posteriormente, as consequências deste processo são representadas em uma matriz, cujo resultado do determinante desta matriz será o Invariante da forma polinomial Q.

Ao iniciar este trabalho, nos propomos a estudar as formas quadráticas, portanto iremos aplicar o método de Boole (1841) em formas homogêneas deste tipo.

Vamos considerar um polinômio Q = $4Ax^2 + 8Bxy + 4Cy^2$

1º passo: Aplica-se uma derivada em relação à variável x e outra em relação a y, temos:

$$\frac{dQ}{dx} = 8Ax + 8By \quad \text{e} \quad \frac{dQ}{dy} = 8Bx + 8Cy$$

2º passo: Dividindo ambas equações por 8 e colocando-as num sistema linear homogêneo, iremos obter,

$$\begin{cases} Ax + By = 0 \\ Bx + Cy = 0 \end{cases}$$

3º passo: Calcula-se o determinante do sistema obtido que resultará em $AC - B^2$, este é o invariante desta forma quadrática.

Vamos considerar outro polinômio Q = $7Ax^2 + 6By + 3Cy^2$. Diferenciando teremos:

$$\frac{dQ}{dx} = 14Ax + 6By \quad \text{e} \quad \frac{dQ}{dy} = 6Bx + 6Cy$$

Fazendo as simplificações possíveis e posteriormente calculando o determinante das equações homogêneas, $\begin{cases} 7Ax + 3By = 0 \\ Bx + Cy = 0 \end{cases}$, encontramos $7AC - 3B^2$ como invariante deste polinômio.

O método de obtenção para estes invariantes de formas quadráticas utilizados até o momento foi a partir do Método de Boole, no próximo item calcularemos novamente o invariante desta forma, porém iremos levar em consideração o método de Cayley e Sylvester para a obtenção do invariante.

Invariantes de formas quadráticas

Em Elliott (1895) a notação para o quântico de ordem 2:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

Podemos denotar a versão simplificada denotada por Cayley (1854):

$$(a_0, a_1, a_2)(x, y)^2$$

Ou ainda, em Olver (1999, p.11) a notação é simplificada:

$$Q(x,y) = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} a_i x^i y^{2-i}$$

Iremos aplicar as definições descritas acima em um quântico que será uma função polinomial quadrática Q = $ax^2 + 2bxy + cy^2$, podemos observar também que este quântico tem ordem binária. Para calcular o seu invariante é necessário aplicar uma transformação linear cujos coeficientes podem ser dispostos em linhas e colunas, formando o que chamaremos de *módulo de substituição* ou *módulo da transformação*. Este módulo será simbolizado pela letra M.

Aplicaremos a transformação linear $\begin{cases} x = lX + mY \\ y = l'X + m'Y \end{cases}$, que também pode ser escrita da forma $M = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}$.

Iremos obter então:

$Q = a(lX + mY)^2 + 2b(lX+ mY)(l'X + m'Y) + c(l'X + m'Y)^2$

Desenvolvendo temos,

$Q = a(l^2x^2 + 2lmxy + m^2y^2) + 2b(ll'x^2 + lm'xy + l'mxy + mm'y^2) + c(l'^2x^2 + 2l'm'xy + m'^2y^2)$

Aplicamos a distributiva,

$Q = al^2x^2 + 2almxy + am^2y^2 + 2bll'x^2 + 2blm'xy + 2bl'mxy + 2bmm'y^2 + c\, l'^2x^2 + 2cl'm'xy + cm'^2y^2$

E finalmente agrupamos os coeficientes com suas variáveis correspondentes,

$Q = x^2(al^2 + 2bll' + cl'^2) + 2xy(alm + blm' + bl'm + cl'm') + y^2(am^2 + 2bmm' + cm'^2)$

Temos:

$A = al^2 + 2bll' + cl'^2$,

$B = alm + b(lm' + l'm) + cl'm'$,d

$C = am^2 + 2bmm' + cm'^2$.

Assim $ax^2 + 2bxy + cy^2$ se torna $AX^2 + 2BXY + CY^2$. Sabemos $f(a,b,c) = (ac – b^2)$ é um invariante, portanto, vale o seguinte:

$$AC – B^2 = (l^2m'^2 – 2ll'mm' + m^2l'^2)(ac – b^2) = M^2(ac – b^2).$$

Vamos tomar como exemplo outra função homogênea quadrática binária em que $ac' + a'c - 2bb'$ é um invariante das formas quadráticas $ax^2 + 2bxy + cy^2$, $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$.

Utilizaremos novamente a transformação linear:

$$\begin{cases} x = lX + mY \\ y = l'X + m'Y \end{cases}$$

A primeira forma chamaremos de u, sendo $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$, então:

$u = ax^2 + 2bxy + cy^2$

$u = a(lX + mY)^2 + 2b(lX + mY)(l'X + m'Y) + c(l'X + m'Y)^2$

$u = al^2X^2 + 2alXmY + am^2Y^2 + 2blX^2l' + 2blXm'Y + 2bmY^2m'+ cl'^2X^2 + 2cl'Xm'Y + cm'^2Y^2$

A segunda forma chamaremos de v, sendo $v = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$, então:

$v = a'(lX + mY)^2 + 2b'(lX + mY)(l'X + m'Y) + c'(l'X + m'Y)^2$

$v = a'l^2X^2 + 2^a{}'lXmY + a'm^2Y^2 + 2b'lX^2l' + 2b'lXm'Y + 2b'mYl'X + 2b'mY^2m' + c'l'^2X^2 + 2c'l'Xm'Y + c'm'^2Y^2$

Da transformação linear, temos:

$A = al^2 + 2bll' + cl'^2$

$B = alm + blm' + bml' + cl'm'$

$C = am^2 + 2bmm' + cm'^2$

$A' = a'l^2 + 2b'll' + c'l'^2$

$B' = a'lm + b'lm' + b'ml' + c'l'm'$

$C' = a'm^2 + 2b'mm' + c'm'^2$

Usaremos $\phi = AC' + A'C - 2BB'$, para verificar se isso é invariante:

$\phi = AC' + A'C - 2BB'$

$\phi = (al^2 + 2bll' + cl'^2)(a'm^2 + 2b'mm' + c'm'^2) + (a'l^2 + 2b'll' + c'l'^2)(am^2 + 2bmm' + cm'^2) - 2(alm + blm' + bml' + cl'm')(a'lm + b'lm' + b'ml' + c'l'm')$

$\phi = al^2c'm'^2 + cl'^2a'm^2 + 4bll'b'mm' + a'l^2cm'^2 + c'l'^2am^2 - 2bl^2m'^2b' - 2bm^2l'^2b' - 2almc'l'm' - 2cl'm'a'lm$

Assim:

$$\begin{aligned} AC' + A'C - 2Bb' \\ &= l^2m'^2(ac' + a'c - 2bb') + l'^2m^2(ac' + a'c - 2bb') \\ &- 2ll'mm'(ac' + a'c - 2bb') \\ &= \left(l^2m'^2 - 2ll'mm' + l'^2m^2\right)(ac' + a'c - 2bb') \\ &= (lm' - l'm)^2(ac' + a'c - 2bb') \end{aligned}$$

Considerações Finais

Os invariantes tomaram grande parte do tempo dos estudos pelos matemáticos europeus, no decorrer do século XIX e parte do século XX, na tentativa de encontrar uma solução para chegar à quantidade exata de invariantes dado um Quântico de ordem p. A busca por este resultado trouxe inúmeras contribuições matemáticas que serviram de base para a formulação e complementação de outras Teorias que já existiam ou que começaram a florescer por volta do século XX, como a Teoria dos Grupos e a Teoria da Representação. Para a História da Matemática e mesmo para a sociologia do conhecimento matemático a Teoria dos Invariantes mostra ser um tema singular.

Houve uma efervescência sobre o assunto na segunda metade do século XIX principalmente na Inglaterra e Alemanha. Boole (1841) é referido ao começo dessa Teoria. De acordo com Parshall (2006) e Crilly (2004) podemos considerar o matemático Arthur Cayley e James Joseph Sylvester os precursores da Teoria dos Invariantes. No início do século XX o assunto perdeu força e o seu fim é atribuído à David Hilbert.

O presente estudo não possui a ambição de analisar toda a obra relativa à Teoria dos Invariantes, trata-se apenas de uma introdução ao assunto que foi destacado na História da Matemática (MATTOS, 2008). Pretendemos em estudos posteriores avançar no estudo dessa teoria, principalmente em relação à influência inglesa sobre este assunto. O enfoque que pretendemos é relativo à sociologia do conhecimento matemático, considerando o curioso aspecto de que este tema teve muita força na segunda metade do século XIX, entretanto caiu no ostracismo no inicio do século XX. Concordamos com Olver (1999): "*As a result, the subject should hold a particular fascination, not only for the student and practitioner, but also for any mathematician with a desire to understand the culture, sociology and the history of mathematics*" (p. 6).

Bibliografia

CAJORI, F. (1894). *A History of Mathematics***.** Macmillan & Co.: New York & London.

CAYLEY, A. (1854b). "*An Introductory memoir on quantics", Philosophical Transaction of Royal Society of London.* London, 144, 244-258.

CRILLY, T. (2004). *Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age*. Baltimore, The John Hopkins University Press.

_______(1986). *The Rise of cayley's Invariant Theory* (1841-1862). Historia Mathematica**.** V.13, p. 241-254.

ELLIOT, E. B. (1895). *An Introduction to the Algebra of Quantics*, Oxford: At the Claredon Press.

FISHER, S.C. (1996). *The Death of a Mathematical theory: a Study in the Sociology of Knowledge*. Archive for the History of Exact Sciences, 3.

MATTOS, A.C. (2008). *The process of recognition in the history of mathematics*. In : Proceedings of 11th International Congress of Mathematics Education (ICME), Proceedings. http://tsg.icme11.org/document/get/626 . Monterrey. Mexico.

MATTOS, A.C. (2007). *The role of the referee in the History of Mathematics*. In : Proceedings of 5**th** European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education (EUS - 5), Proceedings. **http://www.pedf.cuni.cz/kmdm/esu5**, Praga, Republica Checa.

MATTOS, A.C. TANAAMI, S. (2006). *Reconhecimento na história da Matemática: O caso de Arthur Cayley*. In : 4ª Mostra Acadêmica da Universidade Metodista de Piracicaba, Procedido de **http://www.unimep.br/phpg/mostraacademica/anais/4mostra/pdfs/119.pdf**, Piracicaba, Brasil.

OLVER, P. J. (1999). *Classical Invariant Theory*. Cambridge: At the University Press.

PARSHALL, K. H. (1998). *James Joseph Sylvester: Life and Work in letters*. Oxford, Clarendon Press.

PARSHALL, K. H. (2006). *The British development of the theory of invariants* (1841-1895). *BSHM Bulletin*. **21**, 186-199.