



## Algunas dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del concepto función

Wilson Jairo **Pinzón** Casallas  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Colombia  
wjpinzonc@udistrital.edu.co  
Wilson **Gordillo** Thiriat  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Colombia  
wgordillot@udistrital.edu.co  
Edier Hernán **Bustos** Velazco  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Colombia  
ehbustosv@udistrital.edu.co

### Resumen

En el presente artículo se exponen los instrumentos que permiten realizar un análisis tanto macroscópico como microscópico en libros de texto de matemáticas, con el fin de identificar las dificultades que se pueden presentar en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto función. En los instrumentos se explicitan los criterios que se deben evaluar, para facilitar tanto el análisis así como la toma de decisiones curriculares y metodológicas, que permiten determinar la existencia de evidencias en relación con elementos que puedan ser considerados generadores de dificultades en la enseñanza y aprendizaje del concepto función.

*Palabras clave:* educación, matemática, didáctica, ciencias, enseñanza, aprendizaje.

### Introducción

El presente artículo pretende mostrar el resultado de una investigación centrada en el análisis de textos de matemáticas, en la que se obtuvieron y diseñaron cuatro instrumentos a través de los cuales se pretenden identificar las dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del concepto función. Los instrumentos permiten obtener una mirada desde dos niveles de análisis: uno macroscópico y otro microscópico, para que sea integral y se facilite la toma de decisiones curriculares y metodológicas dentro del aula.

### Fundamento teórico

Los cuatro instrumentos que se presentan, son el resultado de la investigación sobre análisis de textos de cálculo (Pinzón, 2006), a través de los cuales se pretenden identificar las dificultades presentes en los textos de matemáticas. La mirada que se busca hacer esta planteada desde dos niveles de análisis, uno macroscópico y otro microscópico.

#### Análisis macroscópico de libros de texto

El análisis macroscópico busca caracterizar el significado institucional del objeto que se quiere enseñar — función —, para esto se debe tener en cuenta el número de páginas, el número de unidades; su distribución por capítulos, secciones y unidades, la estructura de la unidad, la ubicación de las actividades, el uso de recursos informáticos y su mayor o menor aproximación al modelo constructivista.

Con el fin de lograr un análisis ordenado y efectivo, se deben construir mapas conceptuales a través de los cuales sea posible detectar errores de tipo conceptual y a su vez permitan visualizar la evolución del concepto a lo largo del tiempo. Este mismo instrumento permite de alguna manera determinar el nivel de conocimiento previo del autor de un texto, el cual interactúa con el conocimiento presentado en la instrucción formal, dando lugar muchas veces, a un conjunto diverso de aprendizajes no siempre deseados “*aprendizajes que originan errores y estos errores conceptuales se constituyen, a veces, en importantes obstáculos para el desarrollo del pensamiento creativo y crítico*” (González, Morón y Novak, 2001, citado en Pinzón, 2006, pg. 47).

#### Análisis microscópico de libros de texto

En lo correspondiente al análisis micro, que versa sobre la descripción e interpretación de las formas de conocer del autor sobre el concepto función como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, se diseñaron cuatro instrumentos que permiten hacer una mirada en detalle de aspectos tales como: la función como objeto matemático, como objeto de enseñanza y aprendizaje, el diseño y conformación de los ejercicios y la clasificación de los mismos según su tipología.

La evaluación de los resultados obtenidos con los instrumentos diseñados y que se mencionaron anteriormente se adelanto utilizando las diferentes interpretaciones propuesta para estos fines por Badillo y Font, resultado de investigaciones adelantadas por estos autores en relación con temáticas similares a la aquí propuesta.

El primer instrumento que se propone, indaga por la función como objeto matemático; para esto se tienen en cuenta:

- En lo *sintáctico*, la simbología, la definición, la manera como se introduce el concepto y las técnicas que se tratan para definir la función.
- En lo *semántico*, el enfoque utilizado, las situaciones a través de las cuales se introduce el concepto, el manejo que se da al concepto de función y sus significados: tabular, gráfico, analítico y conjuntista atribuidos, etc.
- En relación con la *definición*, los elementos característicos (convencionalidad, minimalidad). La definición introduce una noción que no “existía” antes, que puede abrir problemas nuevos, brindar nuevas perspectivas para pensar en problemas viejos o colaborar en la organización del sistema teórico que se inserta (Maiotti & Fischbein, 1997,

citado en Calvo 2001), por tal razón es necesario tener en cuenta que el concepto de función ha evolucionado desde hace 3700 años aproximadamente, enfrentándose a unas invariantes y diferentes representaciones, comenzando con los cálculos astronómicos babilónicos hasta nuestra época, esta evolución ha perfilado definiciones sucesivas hasta alcanzar el nivel de generalización de la definición moderna del tema. En el anexo se presenta una tabla con la evolución histórica del concepto, en donde se tiene en cuenta los siguientes aspectos: Época, quien trabajo en ella, definición empleada y por último el tipo de problema que se trabajaba en dicha época.

- En relación con la *representación*, fenomenología y contexto.

Tabla 1

Aspectos de la función como objeto matemático presentes en el texto

		SI	NO		
FORMA (SINTAXIS)	¿Utiliza variables?				
	¿Cómo define la función?	Relación entre variables			
		Cantidades variables dependientes e independientes			
		Movimiento			
		Geoméricamente			
		Magnitud			
	¿Cómo introduce el concepto?	Conjunto			
		Siguiendo la génesis histórica del concepto			
		Desde una definición			
		Desde un problema			
	¿Qué técnicas se tratan?	Desde una tabla			
		Desde un diagrama sagital			
		Técnica directa: definición de función			
Técnica indirecta de función					
DEFINICIÓN	¿Cuál es la característica de la definición?	Técnica de aproximación numérica			
		Técnica de aproximación gráfica			
		Convencionalidad	Estética		
			Operativa		
			Didáctica		
	Jerárquica				
	Minimalidad	Particional			
		Nominal			
		Condición suficiente			
		Condición necesaria			
¿Qué definición emplea?	p si y sólo si q				
	Babilonios				
	Griegos				
	Escuelas medievales de Oxford y París				
	Nicolás Oresme				
	Galileo				
	Descartes				
	Fermat				
Newton					

		Leibnitz			
		Bernoulli			
		Euler	1		
			2		
		Dirichlet			
Hausdorff					
CONTENIDO (SEMÁNTICA)	¿Qué enfoque utiliza?	Algebraico			
		Numérico			
		Formal			
		Infinitesimalista			
		Geométrico			
		Variacional			
		Computacional			
	¿Con qué situación introduce el concepto?	Aproximación			
		Variación			
		Transformación			
	¿Cómo maneja el concepto?	Aproximación			
		Variación			
		Transformación			
¿Qué significado trabaja del concepto?	Tabular				
	Gráfico				
	Analítico				
	Conjuntista				
REPRESENTACIONES	Fenomenología	Matemática			
		Física			
		Otra			
	Contexto	Tabular			
		Gráfico			
		Analítico			
		Conjuntista			

Fuente: Pinzón 2006, pág. 49

El segundo instrumento propuesto busca analizar aspectos de función como objeto de enseñanza y aprendizaje presentes en el texto, a través de una mirada sobre la forma – contenido del objeto (sintaxis/semántica) y sobre las traducciones y relaciones entre las representaciones que del objeto hace el texto.

Tabla 2

Aspectos de la función como objeto de enseñanza y aprendizaje presentes en el texto

FORMA / CONTENIDO SINTAXIS/SEMÁN TICA	¿Cuál es la secuencia de los contenidos?		
	¿A partir de qué se introduce el concepto?	Definición	
		Ejercicio tipo	
		Ejemplos	
		No ejemplos	
		Situación real	
	Historia de la ciencia		

	¿Qué tipo de actividades presenta?		
	¿Qué tipo de ejercicios y/o problemas presenta?	Aproximación	
		Variación	
		Transformación	
	¿Qué procesos cognitivos emergen de la actividad matemática?	Interiorización de acciones en procesos	
		Encapsulación de procesos en objetos	
		Desencapsulación de objetos en procesos	
		Generalización	
	¿Qué perspectivas del concepto se propician en las actividades?	Generalización de esquemas	
		Acción	
		Proceso	
		Objeto	
	¿Cuál es el uso que hace de la historia de la ciencia?	Esquema	
		Para introducir el concepto	
Manejo de los problemas históricos			
Aspectos fenomenológicos que dieron origen a la construcción del concepto			
TRADUCCIONES Y RELACIONES ENTRE REPRESENTACIONES	¿Qué papel se le otorga a las traducciones y relaciones entre representaciones en el planteamiento de tareas?		
	¿Qué traducciones entre representaciones semióticas se utilizan?		
	¿Qué relaciones entre representaciones semióticas se utilizan?		

Fuente: Pinzón 2006, pág. 50

Los ejercicios o problemas propuestos por el autor se clasifican en tres tipologías de problemas que usualmente son tratados en los libros de cálculo diferencial. Estas tipologías permiten simplificar el análisis de los ejercicios propuestos en cada sección del libro texto, facilitando el establecimiento de relaciones comparativas entre ellos y así, ayuda a mostrar los tópicos matemáticos ausentes y no evidentes que pueden convertirse en un obstáculo didáctico del concepto función, dichas tipologías son:

- De aproximación
- De variación
- De transformación

El análisis de cada una de los anteriores grupos se hace a través del instrumento número tres, que consta de siete categorías generales denominadas: fenomenología, enunciado, representación, técnicas, recursos tecnológicos y procesos cognitivos.

Tabla 3

Instrumento para el análisis de los ejercicios

			SI	NO
Fenomenología	Pura	Matemática		
		Física		
		Otra		
	Histórica	Matemática		
		Física		
		Otra		
Enunciado	Verbal			
	No verbal			
Contexto	Algebraico			
	Numérico			
	Verbal			
	Geométrico			
	Gráfico			
Técnica o procedimiento	Tendencial			
	Variación			
	Analiticidad			
Recursos (tecnología)				
Procesos cognitivos				

Fuente: Pinzón 2006, pág. 51

La primera categoría denominada fenomenología utiliza la clasificación propuesta por Puig (citado por Badillo, 2003, p.95), es decir diferencia a la *fenomenología pura*, entendida como las actividades que propone el autor con la matemática en su estado y uso actual, y la *fenomenología histórica*, entendida como las actividades propuestas por el autor a partir de los fenómenos que dieron origen al concepto matemático en cuestión y cómo se extienden a otros fenómenos en otras ciencias.

La segunda categoría, es decir en el enunciado, se visualizan las tareas que plantea el autor, facilitando la observación de las características comunes entre las situaciones problema, y ayuda a observar la frecuencia con la que cierto tipo de problemas aparecen en los ejercicios propuestos por el autor y, a su vez, las similitudes y diferencias entre los ejemplos planteados.

La tercera categoría identificada como contexto, busca la clasificación de los problemas o ejercicios matemáticos propuestos por el autor en el texto atendiendo a la característica predominante en su entorno: verbal, descriptivo, algebraico, numérico o geométrico.

La cuarta categoría tenida en cuenta es la técnica o procedimiento, utilizada para clasificar los ejercicios o problemas dependiendo de la forma para trabajar con funciones, es decir tendencial, variación o analiticidad.

En la quinta categoría o de recursos, se busca focalizar la atención en la utilización que hace el autor de las nuevas tecnologías como un elemento enriquecedor en la enseñanza de los conceptos matemáticos. La utilización de nuevas tecnologías en los libros de texto trae consigo una nueva gama de posibilidades para la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. La principal razón es que estos instrumentos pueden mostrar, de forma dinámica, conceptos que son muy difíciles de enseñar de la forma tradicional.

La última categoría, corresponde a los procesos cognitivos, en donde se debe retomar la descomposición didáctica realizada del concepto función.

### **Conclusiones**

Un análisis macroscópico permite determinar la estructura del texto, teniendo en cuenta su organización y demás aspectos generales.

El análisis microscópico intenta establecer de manera minuciosa y con la ayuda de los instrumentos propuestos en el presente artículo, la naturaleza y características que desde la perspectiva del autor se atribuye a los objetos matemáticos, a los objetos de enseñanza y aprendizaje y a los ejercicios contenidos en el capítulo estudiado.

Tanto el análisis macroscópico como el análisis microscópico buscan conjuntamente determinar la existencia de evidencias en relación con elementos que puedan ser considerados generadores de dificultades en la enseñanza y aprendizaje del concepto función.

Las elecciones didácticas establecidas en una situación de enseñanza de un concepto matemático pueden generar una dificultad, centrados en dos aspectos de la construcción del conocimiento: uno relacionado con el uso del lenguaje del cálculo, y otro con los contextos de ejemplificación y experimentación para la construcción del conocimiento.

### **Referencias y bibliografía**

- Pinzón Casallas, W. J., Sarmiento Barrera, H., (2006). *Algunos obstáculos didácticos presentes en el tratamiento del concepto de derivada en el texto de cálculo*. Tesis Maestría Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de matemáticas.
- Calvo Pesce, C., (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*, Tesis Doctoral Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de didáctica de las matemáticas y de las ciencias experimentales.
- Badillo Jiménez, E. R., (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*, Tesis Doctoral Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de didáctica de las matemáticas y de las ciencias experimentales.

## Apéndice A

### Definiciones de función a través de la historia

Época	Autor	Definición	Problemas
A.C.	Babilonios	No se tiene una definición de función, pero se usan tablas para la compilación de efemérides del sol, la luna y los planetas.	De variaciones continuas
A.C.	Griegos	Las curvas se consideraron como secciones o bien como la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones.	Estáticos, a excepción de los de astronomía
XIV	Escuelas medievales de Oxford y París	La primera idea de función como una relación entre variables y aparece la primera gráfica conocida.	Cambios de latitud de los planetas respecto de la longitud (Teoría de las latitudes)
XIV	Nicolás Oresme	Hace uso consciente de ideas generales acerca de las cantidades variables dependientes e independientes.	Interpretar de manera general, la latitud dependiente de su longitud, en una representación gráfica
XV y XVI	Galileo	Estudio del movimiento desde un punto de vista funcional utilizando palabras y proporciones.	Estudios de movimientos planetarios
	Descartes	Se realiza una introducción implícita del sistema de coordenadas que permite hallar la expresión algebraica de la curva y le lleva a definir claramente el objeto de la Geometría Analítica.	Se consideran curvas generadas por movimientos. Se preocupa más de la traducción de la gráfica a la expresión simbólica de lugares geométricos.
1637	Fermat	Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de cada una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva. Expone muy claramente la idea de que una ecuación con dos incógnitas es una expresión algebraica de las propiedades de la curva.	Se preocupa más de la expresión simbólica a la traducción de la gráfica
1736	Newton	Es una herramienta fundamental que se usa, pero que no es objeto de estudio en sí misma.	Dada una relación entre fluxiones, obtener una relación entre sus respectivas fluyentes y recíprocamente
	Leibnitz	Es una herramienta fundamental que se usa, pero que no es objeto de estudio en sí misma.	Considera la gráfica de una función como un agregado de segmentos infinitesimales más que como la trayectoria de un punto que se mueve
1718	Bernoulli	La primera definición explícita de función. Una función de una magnitud variable era una cantidad compuesta de cualquier manera con esta magnitud variable y de constantes.	De isoperímetros

1748	Euler	Expresión analítica formada de cualquier manera con esta cantidad variable, con números y con constantes.	Clasifica las funciones en algebraicas y transcendentales. Las funciones algebraicas, en irracionales y no-irracionales, y estas últimas, en polinómicas y racionales
1755	Euler	Si ciertas cantidades dependen de otras, de tal manera que si las otras cambian, estas cantidades cambian también, entonces se llama estas cantidades funciones de las últimas; esta denominación tiene la máxima amplitud y contiene, en ella misma, todas las maneras por las cuales una cantidad puede ser determinada por otras. Si, por consiguiente, $x$ designa una cantidad variable, entonces las otras cantidades que dependen de $x$ de cualquier manera, o que están determinadas por $x$ , se llaman funciones de $x$ .	La necesidad de considerar funciones mixtas en determinados problemas
1837	Dirichlet	Imaginemos que “ $a$ ” y “ $b$ ” son dos valores fijos y “ $x$ ” una cantidad variable que toma sucesivamente todos los valores comprendidos entre “ $a$ ” y “ $b$ ”. Corresponde entonces a cada valor “ $x$ ” una cantidad única, “ $y$ ”, finita; mientras “ $x$ ” recorre de modo continuo el intervalo de “ $a$ ” a “ $b$ ”, $y = f(x)$ varía asimismo, e “ $y$ ” representa una función para ese intervalo. No es, en absoluto, necesario que “ $y$ ” dependa de “ $x$ ” en todo ese intervalo de acuerdo con la misma regla, y no hay que pensar en una dependencia expresable en términos de fórmulas matemáticas. Representando de un modo gráfico, es decir, tomando a “ $x$ ” como abscisa y a “ $y$ ” como ordenada una función aparece como una curva a la que cada abscisa comprendida entre “ $a$ ” y “ $b$ ” le corresponde un solo punto. Esta definición no fija a las distintas partes de la curva ninguna regla común: se la puede uno imaginar compuesta de distintas partes o trazada de modo totalmente anárquico. De esto se desprende que una función sólo se puede contemplar como completamente precisada para un cierto intervalo ya si está dada gráficamente o si en las distintas partes del intervalo se dan de modo matemático las reglas vigentes. Mientras en una función sólo se tenga certeza de una parte del intervalo queda completamente en manos de la arbitrariedad el modo en que continuará el resto del intervalo.	La aritmetización del análisis realizada

1920	Hausdorff	Dados dos conjuntos arbitrarios $A$ y $B$ una función o aplicación de $A$ en $B$ es una ley que cada elemento $x$ de $A$ hace corresponder un solo elemento de $A$ y de $B$	La función se extendió a conjuntos cualesquiera y la gráfica de la función se consideró como el conjunto de puntos de coordenadas $(x, f(x))$
------	-----------	---	---

Fuente: Pinzón 2006, pág. 96