



Uma Sequência de Ensino Probabilidade Geométrica com o uso do Geoplano

Eder Pereira **Neves**

Universidade Bandeirantes de São Paulo
Brasil

nevesded@ibest.com.br

Florindo **Contini** Neto

Universidade Bandeirantes de São Paulo
Brasil

nicontini@ig.com.br

Washington de **Mendonça**

Universidade Bandeirantes de São Paulo
Brasil

washington_de@uol.com.br

Resumo

Esta oficina tem como objetivo apresentar uma sequência de ensino para abordar conceitos geométricos e probabilísticos utilizando o geoplano. No desenvolvimento das atividades é utilizado o conceito de probabilidade geométrica para evidenciar a relação da probabilidade com a geometria, no caso o cálculo de área, por meio de figuras planas convexas e côncavas. Com esta sequência de ensino podem ser explorados diversos conceitos probabilísticos, tais como, eventos simples e compostos, probabilidade condicional e independência de eventos.

Palavras chave: Probabilidade geométrica, Geoplano, Ensino de Probabilidade, Sequência de Ensino, Ensino Médio.

Introdução

Atualmente a Probabilidade e a Estatística estão cada vez mais presentes no nosso cotidiano, mesmo que não nos demos conta; afinal, a maioria das informações sociais, econômicas, políticas que são repassadas na mídia contém algum tipo de informação. Dessa forma, esses tópicos tornam-se assim indispensáveis no dia a dia do cidadão, por conseguinte, na escola, o professor de Matemática passa a ter compromisso além de ensinar o domínio com os números, mas também os conceitos estatísticos básicos que possibilitem aos alunos organizar, tratar, ler e interpretar criticamente os dados, bem como os conceitos probabilísticos para calcular e interpretar previsões.

Tratando mais especificamente da Probabilidade, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais um dos objetivos do seu ensino é fazer com que o aluno,

“...compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles.”. (Brasil, 1998, p. 52).

Muitos autores de livros didáticos apresentam como forma de introduzir este conteúdo utilizando exemplos de jogos de azar, é apenas o conceito da probabilidade clássica ou ainda a axiomática. Apesar de considerarmos uma forma atrativa de motivar o ensino deste tópico, existem outros conceitos de probabilidade que podem e devem ser abordados também, como o frequentista, o subjetivo e o geométrico. De fato, no estudo de livros didáticos brasileiros destinados ao Fundamental II, Coutinho (2004) verificou não existir sugestões para o trabalho com enfoque experimental, que possam auxiliar no desenvolvimento do ponto de vista frequentista do conceito de probabilidade, nem tampouco se encontra referências ao conceito de probabilidade geométrica.

Oliveira (2006) pesquisou dez livros didáticos adotados ou indicados por boa parte dos professores de Matemática no ensino médio. Nessa avaliação foi verificado que os símbolos e as fórmulas empregados nos conteúdos relacionados com Probabilidade são variados e, muitas vezes, complexos para os alunos do ensino médio, uma vez que não apresentam uniformidade e podem ainda ser complicados pelos contextos utilizados, já que os exemplos apresentados não são significativos e poucos mostram sua importância em relação à interdisciplinaridade.

Refletindo sobre esses aspectos do ensino de Probabilidade, consideramos importante a proposição de sequências de ensino¹ que possam, por exemplo, abordar os conceitos de probabilidades frequentista e geométrica, associadas a outros conteúdos matemáticos, bem como com outras disciplinas. Além disso, para Vygotsky (1998), a aprendizagem é um fenômeno que ocorre nas interações sociais, no entanto propor atividades que desenvolvam a capacidade dos alunos de interpretar e resolver situações problemas vai ao encontro do que ele chamou de zona de desenvolvimento proximal:

“ é a distância entre o nível de desenvolvimento real que se costuma determinar através da solução independente de problemas e o nível potencial, determinado através da solução de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes” (VYGOTSKY, 1998, p. 113)

Diante desse contexto, o objetivo desta oficina é apresentar uma sequência de ensino para abordar conceitos geométricos e probabilísticos com a utilização do geoplano. No desenvolvimento das atividades será utilizado o conceito de probabilidade geométrica para evidenciar a relação da probabilidade com a geometria, no caso o cálculo de área, por meio de figuras planas convexas e côncavas.

Geoplano e Probabilidade Geométrica

O geoplano foi utilizado por Caleb Gattegno em 1961, com sendo mais um recurso didático para se trabalhar com conceitos geométricos em sala de aula.

¹ De acordo com Cazorla e Santana (2010) uma sequência de ensino (SE) é “caracterizada pelo tipo de atividade em que o professor conduz todas as etapas proposta em conjunto com os alunos”.

Leivas (2010) descrevem os geoplanos como sendo tabuleiros de varias formas, sejam quadrados, retangulares ou circulares que levam pregos em determinada distribuição para que se possam prender as ligas (elásticos), podendo ser confeccionados em madeira natural ou pintados (figura 1). A palavra geoplano vem do inglês “geoboards” ou do francês “geoplans” aonde “geo” vem de geometria e plano, tábua ou tabuleiro ou superfície plana dando a origem da palavra.

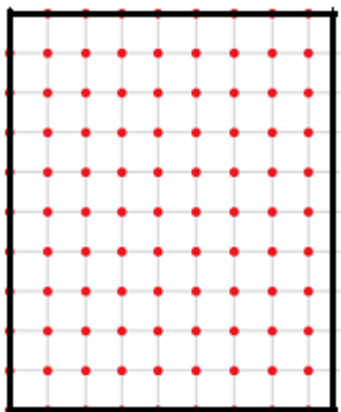


Figura 1. Modelo de um geoplano

Com o geoplano é possível trabalhar com a probabilidade geométrica, já que de acordo com Tunala (1995) esta é a concepção de probabilidade, em que os espaços amostrais são descritos por figuras geométricas, sendo não-enumeráveis, podendo ser finitos, como no caso da região delimitada por um quadrado ou um cubo; ou infinitos como a região delimitada por duas retas. Como exemplo, se X e Y são pontos de um segmento de reta de extremos A e B (Figura 2), a probabilidade de selecionar um ponto do segmento AB e que pertença ao segmento XY , é dada pela razão entre os comprimentos, ou seja, é proporcional ao comprimento de XY e não depende da posição dos pontos X e Y sobre AB : $P = \frac{\text{comprimento de } XY}{\text{comprimento de } AB}$.

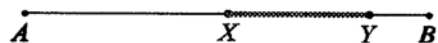


Figura 2. Pontos de um segmento de reta AB

O geoplano pode ser representado através de uma malha geométrica (figura 3). Nesta situação, a distância entre os pontos corresponde é de 1 unidade de medida (u.m.), cada geoplano é composto por 5 pontos na horizontal 5 na vertical. Construa uma figura geométrica e calcule a probabilidade de um objeto estar dentro da figura?

Para construir uma figura geométrica qualquer, ligue os pontos até formar uma figura geométrica plana e fechada e pinte a região interna, como nos exemplos a seguir da figura 3, neste caso a construção é de um triângulo (a) e de um quadrilátero (b), lembrando que foi construído dois geoplanos:

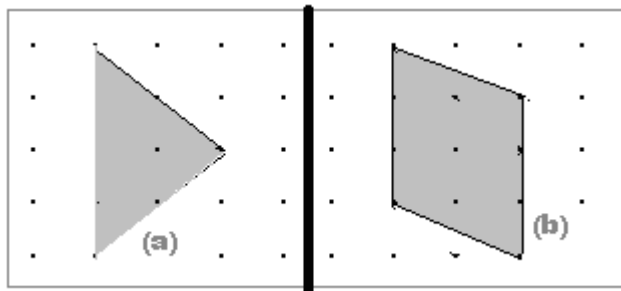


Figura 3 – Malha geométrica

Para se determinar a área total, conte quantas unidades que tem na horizontal e na vertical, nesta situação temos 5 pontos, logo temos 4 unidades entre eles e fazer o produto deles, isto envolve toda a área então aí teremos o espaço amostral:

$$A = 4 * 4 = 16 \text{ u.m.}^2$$

Ou ainda, cada quadrado pequeno tem 1 u.m.² tem-se neste geoplano 16 u.m.².

Enquanto, na área pintada da figura 3 (a) temos um triângulo, uma das formas é verificar quantos são quadrados de 1 u.m.². são formados, neste caso são formados 4 quadrados, isto é, 4 u.m.².

No caso da figura 3 (b), temos um quadrilátero, especificamente um trapézio, neste caso, pode-se verificar a quantidade de quadrados de 1 u.m.². são formados, totalizando 6 u.m.².

Para o cálculo da probabilidade das áreas pintadas, poderíamos colocar como eventos serão de :

$P(a) = \frac{n(a)}{n(A)} \Rightarrow P(a) = \frac{4}{16} \Rightarrow P(a) = \frac{1}{4}$, isto é, a probabilidade de estar dentro da área pintada é 1 em 4.

$P(b) = \frac{n(b)}{n(A)} \Rightarrow P(b) = \frac{6}{16} \Rightarrow P(b) = \frac{3}{8}$, isto é, a probabilidade de estar dentro da área pintada é de 3 em 8.

Vale salientar que na proposta curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 2009), há recomendação para a abordagem da Probabilidade Geométrica, apresenta a situação de aprendizagem que explora a probabilidade em conexão com a geometria no Caderno 4 do 8ª série (9º ano) do ensino fundamental, desenvolvendo duas situações com “O π e a agulha de Buffon”, que trata da razão entre eventos. Este tipo de estudo não tinha aplicações práticas, só veio a ser desenvolvido depois no início do século XIX juntamente com os fenômenos eletromagnéticos, no caso o aparelho de tomografia computadorizada.

Apresentação da Sequência de Ensino

Essa sequência de ensino (SE) foi adaptada da proposta apresentada por Silva, Campos e Itacarambi (2008), sendo que foram acrescentadas mais três atividades para a exploração dos conceitos de evento certo e de probabilidade condicional. Tem como objetivos:

- explorar os conceitos de figuras geométricas planas convexas e côncavas e suas respectivas áreas;

- trabalhar diversos conceitos probabilísticos, como, por exemplo, eventos simples e compostos, probabilidade condicional, independência de eventos;
- utilizar as representações simbólicas da probabilidade.

A SE pode ser desenvolvida em sala de aula num tempo estimado de 2 horas/aula, sendo que o geoplano pode ser construído na disciplina de Artes, trabalhando as diversas formas geométricas planas.

Os materiais necessários são: geoplano com medida de 1 u.m., elásticos coloridos, régua, lápis de cor e malha pontilhada. O geoplano construído com 25 pregos espaço suficiente para trabalhar com ligas elásticas coloridas, com espaço entre ele conforme pode ser observado na figura 4. O Professor pode utilizar um geoplano maior para uma melhor visualização do aluno.

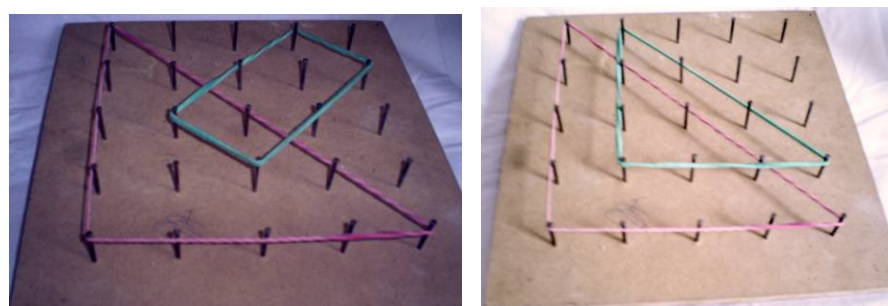


Figura 4. Exemplos de Geoplano

Para o desenvolvimento dessa SE é interessante dividi-la em 10 atividades, em que para cada etapa são apresentados os objetivos e exemplos de questões para explorar os conceitos probabilísticos envolvidos.

Atividades

Atividade 01.

Nesta atividade o professor deve propor ao aluno construir diversos modelos de figuras geométricas no geoplano, os quais deverão determinar as suas áreas antes de desmontar (Figura 5). Tem como objetivo: conceituar polígono e sua área e a probabilidade geométrica.

Construa no geoplano um polígono qualquer com um elástico e, em seguida, desenhe-o na malha pontilhada e pinte a região interna da figura. Agora, considere um paraquedista descendo de uma forma aleatória em um campo, como o representado no geoplano, e tente responder as seguintes questões.

Qual é a probabilidade do paraquedista pousar na região pintada?

Qual é a probabilidade do paraquedista pousar fora da região pintada?

Considerações no caso do paraquedista:

- a) cair com um pé dentro e outro fora da área, vamos considerar que ele atingiu a área interna.
- b) se cair com um sobre a linha da área e outro interno ou externo serão considerados que ele atingiu a área interna.
- c) sempre levará em conta região onde ele pisar primeiro.

Figura 5. Descrição da atividade 1

Atividade 02.

Objetivos: 1) Conceituar polígonos desconexos. 2) Conceituar conjuntos disjuntos. 3) Conceituar eventos mutuamente excludentes. 4) Conceituar evento impossível. 5) Explorar a Representação Simbólica: $P(A \cap B)$.

Construa no geoplano dois polígonos desconexos, ou seja, separados (não há intersecção entre suas áreas). Em seguida, desenhe na malha pontilhada e pinte as regiões internas das figuras. Chame a primeira região de A e a segunda de B. Agora, considere um paraquedista descendo de uma forma aleatória em um campo, como o representado no geoplano, e tente responder as seguintes questões:

- 1) Qual é a probabilidade do paraquedista pousar nas regiões A e B?
- 2) Explique como você chegou a essa resposta.
- 3) É possível representar a sua resposta simbolicamente? Como?

Considerações no caso do paraquedista:

- a) cair com um pé dentro e outro fora da área, vamos considerar que ele atingiu a área interna.
- b) se cair com um sobre a linha da área e outro interno ou externo serão considerados que ele atingiu a área interna.
- c) c) sempre levará em conta região onde ele pisar primeiro.

Figura 6. Descrição da atividade 2

Atividade 03.

Objetivos: 1) Conceituar evento certo. 2) Explorar a Representação Simbólica: $P(A \cup B)$.

Construa no geoplano dois polígonos de modo que não tenham áreas comuns e a soma de suas áreas sejam igual a área total do geoplano. Em seguida, desenhe na malha pontilhada e pinte as regiões internas das figuras. Chame a primeira região de A e a segunda de B. Agora, considere um paraquedista descendo de uma forma aleatória em um campo, como o representado no geoplano, e tente responder as seguintes questões:

- 1) Qual é a probabilidade do paraquedista pousar nas regiões A ou B?
- 2) Explique como você chegou a essa resposta.
- 3) É possível representar a sua resposta simbolicamente? Como?

Considerações no caso do paraquedista:

- a) cair com um pé dentro e outro fora da área, vamos considerar que ele atingiu a área interna.
- b) se cair com um sobre a linha da área e outro interno ou externo serão considerados que ele atingiu a área interna.
- c) c) sempre levará em conta região onde ele pisar primeiro.

Figura 7. Descrição da atividade 3

Atividade 04.

Objetivos: 1) Resgatar os valores das probabilidades da atividade 2 e 3. 2) Calcular a probabilidade da interseção. 3) Mostrar que a probabilidade é um número que pertence ao intervalo $[0;1]$. 4) Explorar a Representação Simbólica: $P(A \cap B)$.

Construa no geoplano dois polígonos de modo que haja interseção entre eles. Em seguida, desenhe na malha pontilhada e pinte as regiões internas das figuras. Chame a primeira região de A e a segunda de B. Agora, considere um paraquedista descendo de uma forma aleatória em um campo, como o representado no geoplano, e tente responder as seguintes questões:

- 1) Qual é a probabilidade do paraquedista pousar nas duas regiões?
- 2) Explique como você chegou a essa resposta.
- 3) Quais os valores das probabilidades das atividades 2 e 3?
- 3) É possível representar a sua resposta simbolicamente? Como?

Considerações no caso do paraquedista:

- a) cair com um pé dentro e outro fora da área, vamos considerar que ele atingiu a área interna.
- b) se cair com um sobre a linha da área e outro interno ou externo serão considerados que ele atingiu a área interna.
- c) sempre levará em conta região onde ele pisar primeiro.

Figura 8. Descrição da atividade 4

Atividade 05.

Objetivos: 1) Calcular a probabilidade da interseção, quando um conjunto está contido no outro. 2) Explorar a Representação Simbólica: $P(A \cap B) = P(B)$.

Construa no geoplano dois polígonos de modo que um esteja contido no outro. Em seguida, desenhe na malha pontilhada e pinte as regiões internas das figuras. Chame a primeira região de A (área maior) e a segunda de B (área menor). Agora, considere um paraquedista descendo de uma forma aleatória em um campo, como o representado no geoplano, e tente responder as seguintes questões:

- 1) Qual é a probabilidade do paraquedista pousar nas duas regiões?
- 2) Explique como você chegou a essa resposta.
- 3) É possível representar a sua resposta simbolicamente? Como?

Considerações no caso do paraquedista:

- a) cair com um pé dentro e outro fora da área, vamos considerar que ele atingiu a área interna.
- b) se cair com um sobre a linha da área e outro interno ou externo serão considerados que ele atingiu a área interna.
- c) sempre levará em conta região onde ele pisar primeiro.

Figura 9. Descrição da atividade 5

Atividade 06.

Objetivos: 1) Calcular a probabilidade da união, quando não há interseção. 2) Conceituar eventos mutuamente excludentes. 3) Explorar a Representação Simbólica: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Construa no geoplano dois polígonos desconexos. Em seguida, desenhe na malha pontilhada e pinte as regiões internas das figuras. Chame a primeira região de A e a segunda de B. Agora, considere um paraquedista descendo de uma forma aleatória em um campo, como o representado no geoplano, e tente responder as seguintes questões:

- 1) Qual é a probabilidade do paraquedista pousar na região A ou na região B?
- 2) Explique como você chegou a essa resposta.
- 3) É possível representar a sua resposta simbolicamente? Como?

Considerações no caso do paraquedista:

- a) cair com um pé dentro e outro fora da área, vamos considerar que ele atingiu a área interna.
- b) se cair com um sobre a linha da área e outro interno ou externo serão considerados que ele atingiu a área interna.
- c) sempre levará em conta região onde ele pisar primeiro.

Figura 10. Descrição da atividade 6

Atividade 07.

Objetivos: 1) Calcular a probabilidade da união quando há interseção. 2) Explorar a Representação Simbólica: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Construa no geoplano dois polígonos de modo que haja interseção entre eles. Em seguida, desenhe na malha pontilhada e pinte as regiões internas das figuras. Chame a primeira região de A e a segunda de B. Agora, considere um paraquedista descendo de uma forma aleatória em um campo, como o representado no geoplano, e tente responder as seguintes questões:

- 1) Qual é a probabilidade do paraquedista pousar em uma região ou na outra?
- 2) Explique como você chegou a essa resposta.
- 3) É possível representar a sua resposta simbolicamente? Como?

Considerações no caso do paraquedista:

- a) cair com um pé dentro e outro fora da área, vamos considerar que ele atingiu a área interna.
- b) se cair com um sobre a linha da área e outro interno ou externo serão considerados que ele atingiu a área interna.
- c) sempre levará em conta região onde ele pisar primeiro.

Figura 11. Descrição da atividade 7

Atividade 08.

Objetivos: 1) Cálculo da probabilidade condicional. 2) Explorar a Representação Simbólica: $P(B|A)$ e mostrar que $A \cap B = B$.

Construa no geoplano dois polígonos de modo que um esteja contido no outro (B está contido em A). Em seguida, desenhe-os na malha pontilhada e pinte as regiões internas das figuras. Chame a primeira região de A (área maior) e a segunda de B (área menor). Suponha agora que o paraquedista desça em direção ao plano e perceba que irá pousar dentro da região A. Dada esta informação, tente responder as seguintes questões:

- 1) Qual é a probabilidade do paraquedista pousar dentro da região B?
- 2) Explique como você chegou a essa resposta.
- 3) É possível representar a sua resposta simbolicamente? Como?

Considerações no caso do paraquedista:

- a) cair com um pé dentro e outro fora da área, vamos considerar que ele atingiu a área interna.
- b) se cair com um sobre a linha da área e outro interno ou externo serão considerados que ele atingiu a área interna.
- c) sempre levará em conta região onde ele pisar primeiro.

Figura 12. Descrição da atividade 8

Atividade 09.

Objetivos: 1) Cálculo da probabilidade condicional de um evento. 2) Explorar a Representação Simbólica: $P(A|B)$, mostrar que $A \cap B = A$ e diferenciar $P(B|A)$ de $P(A|B)$.

Construa no geoplano dois polígonos de modo que um esteja contido no outro (A está contido em B). Em seguida, desenhe-os na malha pontilhada e pinte as regiões internas das figuras. Chame a primeira região de A (área menor) e a segunda de B (área maior). Suponha agora que o paraquedista desça em direção ao plano e perceba que irá pousar dentro da região A. Dada esta informação, tente responder as seguintes questões:

- 1) Qual é a probabilidade do paraquedista pousar dentro da região B?
- 2) Explique como você chegou a essa resposta.
- 3) É possível representar a sua resposta simbolicamente? Como?

Considerações no caso do paraquedista:

- a) cair com um pé dentro e outro fora da área, vamos considerar que ele atingiu a área interna.
- b) se cair com um sobre a linha da área e outro interno ou externo serão considerados que ele atingiu a área interna.
- c) sempre levará em conta região onde ele pisar primeiro.

Figura 13. Descrição da atividade 9

Atividade 10.

Objetivos: 1) Cálculo da probabilidade condicional de um evento (situação em que os eventos são mutuamente excludentes). 2) Explorar a Representação Simbólica: $P(A|B)$ generalizando a fórmula.

Construa no geoplano dois polígonos A e B, de modo que não exista intersecção entre A e B. Suponha agora que o paraquedista desça em direção ao plano e perceba que irá pousar dentro da região B. Dada esta informação, tente responder as seguintes questões:

- 1) Qual é a probabilidade do paraquedista pousar dentro da região A?
- 2) Explique como você chegou a resposta.
- 3) É possível representar a sua resposta simbolicamente? Como?

Considerações no caso do paraquedista:

- a) cair com um pé dentro e outro fora da área, vamos considerar que ele atingiu a área interna.
- b) se cair com um sobre a linha da área e outro interno ou externo serão considerados que ele atingiu a área interna.
- c) sempre levará em conta região onde ele pisar primeiro.

Figura 14. Descrição da atividade 10

Bibliografia e referências

- Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.
- Carzola, I; Santana, E. (Org) *Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico*; Itabuna; Via Litterarum, 2010.
- Coutinho, C. Q. S. *Estatística e Probabilidade no Currículo da Escola Básica*. In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004.
- Leivas, J. C. P. *Geoplano*. Fundação Universidade Federal do Rio Grande (FURG). Disponível em: <<http://mathematikos.psico.ufrgs.br/textos/geoplan.pdf>> Acesso em: 27 mai. 2010.
- Oliveira, P. I. F. (2006). *A Estatística e a Probabilidade nos livros didáticos de matemática do ensino médio*. PUC- Rio Grande do Sul. 100p (Dissertação).
- São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do professor: matemática, ensino fundamental – 8ª série, volume 4*. SEE-SP, 2009 (Situação de Aprendizagem 4: Probabilidade e Geometria, pág. 40-46).
- Tunala, N. Determinação de probabilidades por métodos geométricos. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 20, p. 16.22, 1995.
- Silva, V. A; DE Campos, T. A; Itacarambi, R. R, *Probabilidade e Geometria: Uma investigação com Alunos Universitários*. II SHIAM/UNICAMP, 2008.
- Vygotsky, Lev S.; *A formação social da mente*. Livraria Martins Fontes,. 1998.

Anexo

- A Informação geral sobre na oficina

Título da oficina	Uma Sequência de Ensino Probabilidade Geométrica com o uso do Geoplano
Nome dos autores	Eder Pereira Neves, nevesded@ibest.com.br Florindo Contini Neto, nicontini@ig.com.br Washington de Mendonça, washington_de@uol.com.br
Instituições dos autores	Uniban - Universidade Bandeirantes de São Paulo
País	Brasil
Número de horas mais convenientes	2 tempos de 50 minutos
Nível de escolarização	Ensino Fundamental e Ensino Médio.
Número máximo de pessoas	20
Equipamentos audiovisuais	Data-show