Obstacles dans l’implémentation d’une ingénierie didactique sur la soustraction

Serge **Quilio**
UMR ADEF, Universidade de Provence
França
serge.quilio@gmail.com

Teresa **Assude**
UMR ADEF, Universidade de Provence
França
t.assude@aix-mrs.iufm.fr

Alain Mercier
UMR ADEF, Universidade de Provence
França
alain.mercier@inrp.fr

Résumé

L’objectif de cette communication est de montrer quelques obstacles à la reprise et à l’implémentation d’une ingénierie didactique conçu par Brousseau. Pour cela, nous montrerons d’bord les grandes étapes de l’ingénierie didactique sur la soustraction dans une classe de CE1 (élèves de 7 ans, seconde année du primaire), et ensuite nous analyserons une des leçons pour mettre en évidence trois obstacles à cette implémentation.

Mots-clé : ingénierie didactique ; théorie des situations didactiques ; soustraction ; obstacles

Introduction

Dans cette communication, nous présentons d’abord les grandes étapes d’une ingénierie didactique sur la soustraction à l’école primaire conçue par Guy Brousseau et mise en œuvre pendant quelques années dans l’école expérimentale du COREM (centre d’observation et de recherche sur l’enseignement des mathématiques) à Bordeaux. Cette ingénierie est connue, parce qu’elle fonde le travail de remédiation engagé par Brousseau auprès de Gaël (Brousseau, 1982 ;

Brousseau, 1998). Dans une deuxième partie, nous présentons le contexte et les enjeux de notre expérimentation concernant cette ingénierie. Il s'agit de reprendre une ingénierie didactique existante et de s'intéresser aux conditions de diffusion et d'implémentation dans des classes ordinaires de l'enseignement actuel de telle ingénierie (élèves de 7ans, classe de CE1). Ainsi dans un troisième temps de notre exposé, nous montrerons quelques obstacles à la prise en main de certaines phases de cette ingénierie didactique. Enfin, nous indiquerons quelques éléments de discussion et de débat, relatifs aux conditions sociales qui contraignent les décisions des professeurs.

1 – Présentation de l'ingénierie didactique sur la soustraction

L'ingénierie que nous étudions est un long processus de 26 leçons conçue et réalisée originellement au Centre pour l'Observation et la Recherche de l'Enseignement des mathématiques (COREM) de Talence par l'équipe de Guy Brousseau.

L'idée fondatrice de cette ingénierie est que l'enseignement doit reposer sur le savoir antérieur des élèves, c'est-à-dire, l'addition, pour construire les sens de la soustraction, repérer et résoudre les problèmes qui peuvent se résoudre avec une soustraction. On voit donc dans la genèse de l'apprentissage envisagé deux rôles assignés à la seule opération que les enfants connaissent en début de CE1 : un rôle dans la construction du sens de l'opération soustraction et un rôle dans la recherche d'un moyen économique, une technique.

La réalisation de ce processus est menée avec une boîte et l'étude conduite par les élèves sous la direction du professeur consistera à résoudre l'ensemble des problèmes qui peuvent être résolus au moyen de cette boîte.

Dans une première phase, cette boîte est utilisée individuellement pour simuler les situations proposées (changement d'état, partitionnement). Ils peuvent ainsi par comptage ou surcomptage de briques (mises à disposition par le professeur) sorties ou rentrées, chercher à résoudre les problèmes qui leur sont proposés.

Dans la deuxième phase (leçons 4 à 6)), le professeur propose de parier, au sens de s'engager pour gagner, sur le nombre de briques qui restent dans la boîte ou qu'il faut ajouter dans celle-ci selon le problème proposé, avant d'effectuer la manipulation matérielle et le comptage effectif des briques. A ce stade de l'apprentissage, c'est le moyen intellectuel qu'est le nombre qui est sollicité. Les élèvent passent progressivement de la manipulation matérielle à l'usage du nombre et de l'addition pour vérifier leurs résultats. La boîte pourra être utilisée ponctuellement si nécessaire.

Dans la troisième phase, la boîte est évoquée dans les situations où sont mêlés des problèmes d'addition et de soustraction et est introduit le signe - comme signe de l'opération. Dans ces leçons les calculs sont faciles et reposent sur les techniques de calcul mental et l'usage du répertoire additif. A ce stade le signe soustractif devient constitutif de l'écriture d'un nombre.

Dans la quatrième phase, il s'agit de *faire travailler la technique opératoire*. En effet jusqu'à présent les stratégies de calcul des élèves pour trouver le résultat dans un problème de soustraction peuvent être différentes alors que l'activité de vérification qui permet de savoir si leur réponse est la solution est commune à tous les élèves. Il s'agit maintenant de faire formuler, reconnaître, identifier par toutes ces stratégies pour trouver la réponse. Les élèves ou le professeur peuvent avoir recours oralement à la boîte pour identifier ou faire identifier un problème soustractif. Elle deviendra progressivement le modèle des situations de soustractions.

Dans la cinquième phase, il consistera à faire produire, formuler et optimiser des stratégies de calcul (essai par proposition d'un nombre par exemple et vérification par addition) jusqu'à la leçon 13 où grâce à l'analyse collective des stratégies de personnages fictifs, les schtroumpfs, la technique opératoire qui permet de trouver la réponse du premier coup. Il ne restera alors plus au professeur dans les leçons suivantes qu'à faire explorer, et roder les facettes de la nouvelle technique opératoire.

2 – Contexte de notre expérimentation et analyse a priori de la leçon 4

Dans notre communication, nous allons analyser la leçon 4 qui introduit la deuxième phase de l'ingénierie. Cette leçon a été réalisée en 2009-2010 dans une classe de CE1 (élèves de 7 ans, deuxième année de l'enseignement primaire) de l'école primaire Saint Charles de Marseille. La mise en œuvre de cette ingénierie est conduite dans le cadre d'une recherche conduite par l'IFE (Institut Français de l'Education, ex-INRP).

2.1 – Présentation générale

Nous présentons dans ce qui suit le déroulement de la leçon tel qu'il est proposé dans le texte de l'ingénierie et des éléments de son analyse a priori.

L'objectif de la deuxième étape de l'ingénierie est de faire passer les enfants de la vérification anticipée collective par une action sur les cubes sortis à une vérification individuelle sans les cubes à l'aide du nombre. Chaque élève va devoir éprouver sa réponse à sa place, sans toucher les cubes en explicitant les moyens qu'il a trouvés.

Plusieurs moyens personnels peuvent apparaître et sans doute l'addition, moyen plus élaboré que le surcomptage. Nous donnons ici quelques exemples :

- moyens proches de l'action de surcomptage :

- dessiner des cubes comptés un à un ou par barres de 10 à partir de la réponse

- utilisation des doigts (autant que de cubes sortis)

- suite des nombres écrits avec autant de nombres que de cubes sortis : 21, 22, 23,

- moyens proches de l'addition :

Exemple : il faut faire 51 - 23. (Le signe - n'est pas encore vu)

On teste 28 28 et 10 font 38, 38 et 10 font 48 et 3 font 49, 50 et 51 c'est juste

On teste 30 Non car 30 et 23 cela fait 53

Le matériel prévu est le suivant :

- Premier problème sur une feuille polycopié, les autres problèmes seront joués par le maître.

- Cubes organisés en paquets de 10 et unités

- Grandes feuilles de papier blanc feutres pour écrire ou dessiner

2.2 – Différentes étapes de la leçon 4

Nous indiquons ici les différentes étapes de la leçon 4 telle qu'elle est prévue dans le texte de l'ingénierie didactique. Ce n'est pas encore dans la réalisation en classe.

Etape 1 : Remise en scène du surcomptage collectif pour la vérification sans ouvrir la boîte

Cette phase est une révision de la leçon précédente pour assurer l'homogénéité de la classe. Tout le monde doit écrire une réponse, tout le monde doit savoir vérifier au bureau devant les autres sans ouvrir la boîte.

L'enseignant distribue le texte du premier problème et lecture individuelle des élèves :

Dans la boîte il y a 70 cubes. J'en prends 23. Combien y a-t- il maintenant de cubes dans la boîte ?

Quand tous les élèves ont écrit leur réponse le professeur fait rappeler combien il y avait de cubes dans la boite : 70, combien sont sortis ? 47. Il les sort puis il écrit les deux nombres au tableau dans des colonnes et il collecte les réponses.

Il demande à un premier élève ayant une réponse fausse de vérifier par surcomptage. Pari ? Non. Il demande alors à un deuxième élève ayant une réponse juste qui vérifie de même. Pari ? Oui ! On ouvre la boîte pour s'en assurer. L'enseignant écrit solution encadrée au tableau

Etape 2 : Sans ouvrir la boîte vérification individuelle et orale pour quelques-uns

L'enseignant propose le texte du deuxième problème en le jouant :

J'ai 42 cubes dans la boîte, j'en sors 17, Combien y en a-t-il dans la boîte ?

L'enseignant rappelle en écrivant les nombres au tableau qu'il y en avait 42 au départ et qu'il y en a 17 sur le plateau. Tous les enfants doivent proposer une réponse. Qui veut parier avec moi ?

Le maître fait venir un élève avec une réponse fausse. Au moment où l'élève s'approche de la boite le maître l'arrête : « Tu dis combien dans la boîte : 22 et dans le plateau combien y en a t- il ? » « 17 Bon je voudrais que tu vérifies ta réponse sans toucher les cubes, c'est à dire mettre les 22 avec les 17 en parlant seulement. » L'élève essaie. Quelqu'un d'autre peut vérifier de sa place toujours la réponse 22 ? Pari ? Non.

L'enseignant propose à un autre élève de vérifier oralement sa réponse (fausse) de sa place. Un autre peut essayer aussi la vérification de cette réponse.

L'enseignant propose à un troisième élève qui a une réponse juste. Pari ? Oui.

Vérification en ouvrant la boîte. « C'est gagné : 27 ». L'enseignant écrit la solution.

Etape 3 : Vérification individuelle écrite

Le maître distribue les grandes feuilles et les feutres en disant : « vous allez vous en servir pour vérifier ». Voici le problème (mimé) :

J’ai 41 cubes dans la boîte. J’en prends 23 que je pose sur le plateau. Combien y a-t-il de cubes maintenant dans la boîte ?

Préparer la feuille :

Nom : Date :

51 cubes dans la boîte	23 cubes enlevés	réponse :
		solution : ......

Voici la consigne envisagée :

« Vous écrivez votre réponse et vous avez toute la place dans la partie vide de la feuille pour vérifier comme vous voulez si votre réponse est juste ou non. »

Après un moment de recherche l’enseignant demandera s’il y a des élèves qui n’ont pas pu vérifier.

L’enseignant interroge les volontaires qui pensent avoir une méthode pour vérifier et affiche leurs feuilles si leur méthode s’y voit clairement :

- soustraction par raturage des cubes sur un dessin
- dessin des cubes de la réponse et à côté des cubes sortis et comptage
- suite de nombres à partir de la réponse
- addition

Etape 4 : synthèse

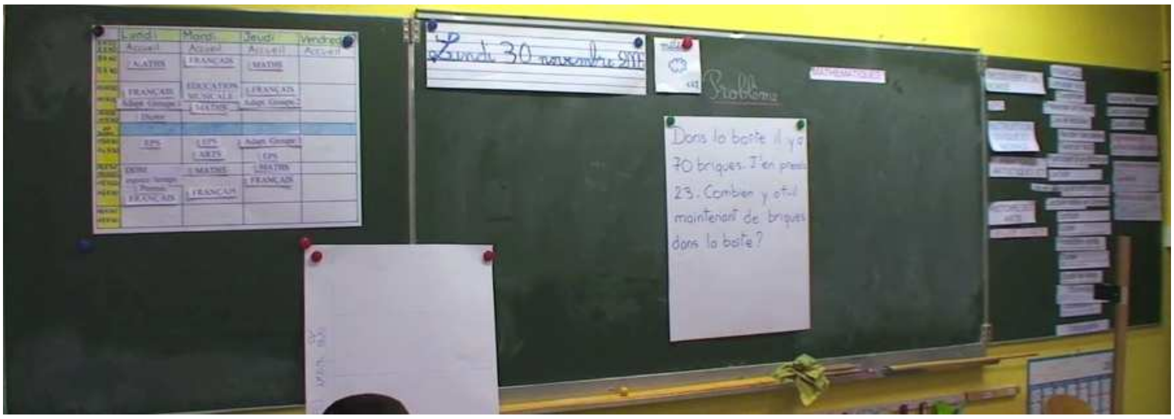
L’enseignant résume : sans se servir de la boîte, les moyens les plus rapides consistent à mettre ensemble le nombre de cubes qu’on pense être dans la boîte et le nombre de cubes sortis pour savoir si on retrouve ou non le nombre de cubes qu’on avait au départ. Maintenant on vérifiera toujours sa réponse. On n’a plus besoin d’ouvrir la boîte.

3 – Obstacles

Dans cette partie, nous allons analyser la leçon 4 en montrant certains obstacles à une implémentation idoine par rapport à l’ingénierie telle qu’elle a été conçue mais auparavant nous montrerons les étapes principales de cette leçon.

Voici un photogramme du tableau de la classe où l'enseignant a écrit le texte du problème proposé aux élèves.

Figure 1: Photo du tableau



3.1 – Présentation et synopsis de la leçon 4

Dans la leçon 4, les élèves doivent résoudre des problèmes du type : « Dans la boîte, il y a X briques. On en enlève Y. Combien y a-t-il maintenant de briques dans la boîte ? » Pour résoudre ce type de problème, les élèves doivent émettre des hypothèses sur le nombre restant de briques dans la boîte, et ensuite vérifier si leur hypothèse est bonne. La leçon 4 fait partie d'un groupe de trois leçons (4, 5 et 6) où les élèves doivent rencontrer l'addition comme moyen de preuve. Le but est d'arriver à une stratégie (ou technique) de vérification qui utilise l'addition ou le comptage sans appui du milieu matériel. Le synopsis de la leçon 4 est le suivant :

Temps	Problème	Commentaires
7min	« Dans la boîte, il y a 70 briques. J'en prends 23. Combien y a-t-il maintenant de briques dans la boîte ? »	Jusqu'à la 7ème minute les élèves copient l'énoncé du problème sur leur cahier. Les élèves doivent écrire une hypothèse sur leur ardoise ; ensuite l'enseignant agit avec la boîte (en mettant 70 briques et en enlevant 23) ; l'enseignant invalide l'hypothèse 49 et valide ensuite l'hypothèse 47, en ajoutant 23 ; puis il vérifie en comptant les briques restant dans la boîte ; fin de cette partie avec la conclusion de l'enseignant : « ceux qui en ont besoin/ de jouer avec la boîte maintenant sur le problème suivant ils vont aller au fond et ils vont jouer avec la boîte »
33min	« J'ai quarante-deux cubes dans la boîte. J'en sors dix-sept. Combien y en a-t-il dans la boîte ? »	La classe est divisée en deux groupes : ceux qui doivent résoudre le problème sans manipulation, et ceux qui manipulent la

		boîte
58min	Recréation	
59 min	Reprise de ce qui a été fait avant	
1h 05min	« Dans la boîte je mets quarante-et-une briques et j'en sors Vingt-trois. Combien de briques restera-t-il dans la boîte ? »	La classe est divisée à nouveau en deux groupes : ceux qui manipulent la boîte et ceux qui ne manipulent pas.
1h 35min(?)	Fin de la leçon	

Cette leçon dure 1 h 35 min avec une pause pour la recréation à la 58ème minute. Les élèves doivent résoudre trois problèmes du même type.

3.2 – L'obstacle de l'appréhension du statut de la « boîte »

La boîte a d'abord un statut du réel qui est celui indiqué par l'énoncé du problème. Le modèle mathématique – représenté par le nombre de briques restant dans la boîte – peut être confronté au réel. Ainsi, nous pouvons dire que dans une première phase la manipulation de la boîte est un moyen pour rentrer dans la compréhension du problème et un moyen pour valider le modèle mathématique indiqué par l'élève. Dans une deuxième phase, le statut de la boîte est celui d'un simulateur. Il s'agit en effet de simuler la vérification de l'hypothèse du problème comme si on manipulait la boîte. Ce statut de la boîte met l'accent sur la vérification et permet de faire évoluer les élèves d'une preuve empirique à une preuve intellectuelle (comptage ou calcul additif). Dans une troisième phase, la boîte n'est plus le réel mais elle est le modèle d'un type de problème. Par exemple, pour le problème « j'ai 45 voitures rouges et bleues. J'enlève les 17 voitures rouges. Combien restent-ils de voitures bleues dans la boîte? », la boîte n'est plus le réel mais devient un modèle du type de problème.

L'appréhension des différents statuts de la boîte (réel, simulateur et modèle) n'est pas forcément repérée, cette appréhension est surtout associée à la manipulation (pour comprendre le problème ou pour vérifier la solution en manipulant). Le professeur R l'indique plusieurs fois :

> *« la boîte avec laquelle on joue en classe c'est celle-ci [prends la caisse de briques et revient avec le tout] elle nous permet de faire certaines choses »*

et il precise plus loin :

> *« cette solution on va essayer de l'écrire/ de l'écrire sur nos ardoises/ bien/ mais ensuite/on va pouvoir la jouer aussi/on va vraiment la jouer/ ce qui se passe ici on va vraiment le jouer avec la boîte »*

et encore :

> *« on va parier/on va voir qui a gagné/qui a perdu/après on vérifie avec la boîte »*

Cette idée que la boîte c'est ce qui permet de « jouer vraiment » peut fonctionner comme un obstacle si l'enseignant ne repère aussi les autres statuts de la boîte comme simulateur et modèle, comme nous l'avons le voir dans le paragraphe suivant.

3.3 – L'obstacle du milieu matériel et des « barres cassées »

Dans le travail sur le premier problème, c'est le maître qui manipule et les élèves regardent ces manipulations et répondent aux questions posées par le maître. Ainsi, il dit :

> M : On va manipuler avec la boîte/prêts [ouvre la boîte] combien on en met dans la boîte déjà ?
> EE : soixante-dix

Ensuite le maître met des barres de dix briques et les élèves comptent au même temps jusqu'à soixante-dix. Et le jeu continue :

M. ensuite/on en enlève
E : vingt-trois
M : d'accord

Le problème étant ici d'enlever les 23 briques. Il s'agit d'enlever deux barres de dix et trois unités. Or comme il n'a que des barres de dix, l'enseignant demande :

M : attendez attendez/ est-ce que d'après vous j'ai des unités là [désigne la boîte] là qu(e) je peux prendre pour
EE: non
Lilian [lève le doigt]: non il faut
M: alors je fais comment/je fais comment Walid
Walid: tu prends un paquet un dix et tu fais attention [inaudible] donc tu en enlèves/tu enlèves des paquets et tu comptes si y en a bien vingt-trois
M: d'accord/bon alors je prends un paquet là/je casse un/je suis obligé de casser un paquet donc
EE: oui

L'enseignant « casse un paquet » en enlevant trois briques d'une barre de 10 et laisse ainsi une barre de 7 briques à l'intérieur de la boîte. Cette manipulation n'est pas du même type que de « casser un paquet » en défaisant toutes les 10 briques sans laisser de barres incomplètes. Le milieu matériel comporte ainsi des barres de 10, de briques isolées et de « barres incomplètes », le terme incomplet est relatif ici à la dizaine comme unité qu'on appelle « barre » ou « paquet ». Cette composition du milieu matériel n'est pas sans conséquence sur le travail de certains élèves comme nous pouvons le voir par la suite. Lorsque l'enseignant utilise la boîte pour vérifier le nombre de briques qui restent dans la boîte c'est encore lui qui manipule et c'est encore lui qui contrôle les barres incomplètes :

M: si on s'est pas trompé en complant/on vérifiant/on a fait semblant d(e) les remettre on doit être sûr de sa réponse/on peut être sûr de sa réponse/maint(e)nant on peut les vérifier/vraiment on peut les vérifier avec la boîte/bon d'être sûr de sa réponse [ouvre la boîte et en sort une barre de dix]
EE: dix
M: regarde Walid/on est en train d(e) vé/on est en train d(e) compter c(e) qu'il y a vraiment à l'intérieur maint(e)nant ça va/dix [pose la barre sur le couvercle, sort une autre barre]
EE: vingt
M: attendez
Inès: non on a cassé un p(e)tit/on a cassé celui-là
M: eh oui
E: voilà c'est c(e) que j'allais dire
M: alors j(e) vais compter ceux qu(e) j'ai pas cassé [sort une barre et la pose à côté]

Le maître rentre dans la logique du comptage de 10 en 10 sans faire attention au départ de la barre incomplète, et c'est en sortant cette barre incomplète qu'il se rend compte et dis « attendez », et Inès, en regardant cette manipulation, se rend compte que cette barre n'est pas une « vraie barre » mais un « petit paquet » : « non a cassé un petit/on a cassé celui-là ». Le maître reprend toutes les barres de 10 et à la fin la barre incomplète ou cassée :

EE: dix [sort une barre] vingt [pose la barre et en montre une autre] trente [pose la barre à côté]
M: trente [montre une barre] quarante [la pose à côté] j'ai pas d'autres paquets de dix/il me reste le paquet d(e) dix que j'avais cassé au début/à l'intérieur j'en avais dix et on en a enl(e)vé trois un deux trois quatre cinq six sept [compte les unités restant sur la barre cassée]

Il utilise encore l'expression « le paquet de dix que j'avais cassé au début » même si cette expression induit une ambiguïté à ce que représente la « barre »ou le « paquet » par rapport à la numération positionnelle. La barre est ici un modèle matériel d'un système d'écriture, et la

« barre cassée » est une rupture de la conformité du modèle matériel au système d'écriture. Cette rupture nous semble induire un obstacle pour certains élèves comme nous pouvons l'observer lors de la résolution du deuxième et du troisième problème où un groupe d'élèves manipule la boîte. L'extrait suivant correspond au début de la manipulation correspondant au deuxième problème :

> [Le maître circule entre les tables, puis se dirige vers le groupe du fond] alors pour l'instant vous a/qui a réussi à en mettre quarante-deux déjà dans sa boîte [un élève lève le doigt.]/quarante-deux/y en a pas quarante-deux là
> E: non
> M: non c'est pas bon/y en a pas quarante-deux/qui a mis quarante-deux dans sa boîte
> Rayan?: moi
> M: montre/hop stop tout l(e) monde vient voir ici s'il vous plait/tout l(e) monde vient voir/regardez/arrête arrête/là y a des moments où il faut réfléchir/venez voir [les élèves du groupe du fond se rassemblent autour du maître] le problème dit au départ il y a/quarante-deux/c'est la boîte de Rayan/ça va/euh lui il a choisi de faire des paquets de dix/il faudrait vérifier si tes paquets des dix ils sont bons/tu vois celui-ci je sais pas un deux trois quatre cinq six sept/y en a que sept [montre le paquet, sorti de la boîte de Rayan]/donc t'as pas fait quarante-deux d'accord/tu as essayé d(e) faire quatre paquets de dix/c'est ça/il faut vraiment vérifier si y en a bien quatre paquets de dix

La manipulation des barres cassées ne pose pas problème dans le topos de l'enseignant car il contrôle le nombre de briques par barre mais ce contrôle n'est pas forcément dans le topos de l'élève pour lequel une barre c'est une barre complète de 10 briques. C'est une règle du contrat didactique.

4 – Discussion

Nous sommes encore en train d'analyser l'implémentation de cette ingénierie mais nous commençons à identifier un certain nombre d'obstacles (qui ne sont pas forcément inhérents à tel enseignant). L'un de ces obstacles est celui de l'identification des différents statuts de la boîte. Le passage de l'un à l'autre de ces statuts indique des changements nécessaires dans le travail de l'élève et il apparaît comme fondamental ce repérage par l'enseignant pour qu'il puisse gérer la classe en fonction de tel ou tel statut.

Un deuxième obstacle est celui du choix du milieu matériel et des liens entre ce milieu et certaines règles du contrat didactique et des systèmes sémiotiques utilisés comme nous avons pu le voir dans le cas des « barres cassées ».

Un troisième obstacle est celui de l'enfermement dans la manipulation et le rapport au « concret ». L'enfermement dans la manipulation de la boîte comme moyen pour comprendre le problème semble être la conception principal du maître car il insiste, surtout avec les élèves qui sont en difficulté, sur le retour plusieurs fois à la manipulation comme si le problème était là. Or il nous semble que le problème ce n'est pas que les élèves n'ont compris le problème mais il est plutôt dans le passage de la preuve empirique à la preuve intellectuelle. Or insister autant sur la manipulation comme nous l'observons dans le troisième problème va sans doute inhiber ce passage.

L'identification de ces différents obstacles est une étape importante car elle nous permet de mettre en évidence un certain nombre de contraintes de la diffusion de cette ingénierie. C'est alors un outil pour l'appropriation par les enseignants de cette ingénierie et un outil pour la formation des enseignants.

Références

Brousseau G. (1982). Les objets de la didactique des mathématiques – Ingénierie didactique. *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques* (pp.10-60). Orléans : IREM d'Orléans.

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.