

La justificación en libros de texto de matemáticas

Roberto **Vidal** Cortés
Universidad Alberto Hurtado
Universidad de Los Andes
Chile
profesorvidal@yahoo.es

Alexander **Maz** Machado
Universidad de Córdoba
España
ma1mamaa@uco.es

Alejandra **Besa** Undurraga
Universidad de Los Andes
Chile
abu@mi-mail.cl

Jorge **Neira** Silva
Universidad Alberto Hurtado
Chile
jneira@cide.cl

Nelson **Valenzuela** Valenzuela
Universidad Alberto Hurtado
Chile
nvalenzu@cide.cl

Resumen

Esta comunicación da cuenta de una investigación en curso de corte cualitativo con un diseño descriptivo y exploratorio, cuyo propósito es identificar y caracterizar las justificaciones (demostraciones, visualizaciones o de otro tipo) presentes en el desarrollo de propiedades y/o algoritmos de los ámbitos numérico y algebraico, que aparecen en los libros de texto chilenos durante la primera década del siglo XXI en los niveles de escolaridad de primaria y secundaria. Para tal efecto, se utilizará como técnica el análisis de contenido.

Al momento de la redacción de esta propuesta, se ha encontrado en esta primera etapa de identificación, la tendencia a omitir las justificaciones o bien, cuando son incluidas, éstas se basan en explicaciones insatisfactorias desde el punto de vista de la transposición didáctica.

Palabras Clave: libros de texto, algoritmos numéricos, algoritmos algebraicos, justificación, transposición didáctica, argumentación, propiedades numéricas, propiedades algebraicas.

Introducción

En este trabajo se presenta el diseño y los avances de un proyecto de investigación en el ámbito de la Didáctica de la Matemática y específicamente en el Análisis de Libros de Texto financiado por FONDECYT – CHILE, (Fondo de nacional de desarrollo científico y tecnológico), por un plazo de dos años (de octubre de 2010 a octubre de 2012). Esta es una línea de investigación que pretende fortalecerse como tal, por medio de este primer trabajo en el contexto chileno, en el que participan 4 académicos chilenos con la asesoría de un especialista internacional.

En el desarrollo de esta comunicación se expone el problema de investigación con su marco teórico, la metodología empleada hasta ahora y finalmente los resultados preliminares obtenidos durante los primeros 3 meses de ejecución.

El problema de investigación

La enseñanza de la matemática constituye un pilar fundamental en la aprehensión de métodos, estrategias, análisis, capacidad de reflexión, orden en el despliegue de instrucciones, desarrollo de la creatividad, razonamiento y argumentación, entre muchos otros elementos. Sin embargo, al observar al ciudadano común, se advierte una profunda carencia en esos términos, al no responder adecuadamente frente a muchas situaciones, por ejemplo, ante una publicidad engañosa o un simple problema de intercambio de dineros.

Este fenómeno, que requiere de un urgente cambio, claramente ofrece varios factores desde los cuáles puede ser abordado. El aspecto que nos proponemos explorar es el lugar que ocupa la justificación en ese acto de enseñanza de las matemáticas, puesto que es uno de los grandes ausentes en la formación matemática tanto de primaria como de secundaria, lo que se evidencia en los conocimientos más bien de rutinas que adquieren los estudiantes en el aula de matemáticas, tales como: más por más da más, tres elevado a cero da uno, cuando multiplicas por un número de dos cifras hay que saltarse un espacio, no se puede dividir entre cero, cuando se resuelve una ecuación con radicales hay que comprobar la solución obtenida, etc.

Observando esta realidad, es que se ha puesto el foco en estudiar las explicaciones del funcionamiento de propiedades y de algoritmos de la matemática escolar, ya que se presume que ahí existe un gran vacío que explorar. Se ha optado por realizar un estudio de las justificaciones localizadas en los libros de texto, como una forma de obtener información a partir de un dispositivo que deja registro de evidencias como lo es el manual escolar, del que existen varias investigaciones que concuerdan en el impacto que éste tiene en la determinación de las prácticas de los profesores y cómo entonces se concreta el acto de enseñanza. Para Villella (2001), los docentes suelen sustentar gran parte de sus prácticas en los libros escolares de Matemática que recomiendan usar a sus alumnos y que, algunas veces, ellos mismo usan, convirtiéndose así el texto en el vehículo que legitima los contenidos prescriptos y en una de las principales fuentes de actividades y tareas. García (2000) en tanto, muestra que los libros de texto no se adaptan en su mayoría a las nuevas exigencias post reforma de las matemáticas modernas en que se trabaja desde el paradigma del constructivismo y por otra parte, los autores de libros de texto, declaman su propia epistemología respecto del conocimiento matemático en acomodo a los requerimientos ministeriales, y por tanto, son una rica fuente de análisis que permite la categorización a priori de las prácticas de los docentes y alumnos (Font, 2004).

Por lo expuesto anteriormente, resulta de interés estudiar cuáles y cómo son las justificaciones que dan los libros de texto de hechos matemáticos tales como los algoritmos y las propiedades que aparecen en el saber a enseñar, y en este sentido, realizar una vigilancia epistemológica que permita detectar si se está en presencia de una ruptura entre el saber matemático de referencia y el saber transpuesto en el discurso escrito que provee el libro de texto. Se podrá así responder a las interrogantes:

- ¿Existen en los textos escolares justificaciones de los algoritmos y de las propiedades de contenidos referidos a números y a álgebra?. ¿Cómo y cuáles son estas justificaciones?.
- ¿Existen rupturas a nivel de transposición didáctica de los contenidos en su tratamiento numérico – algebraico?

Con estas preguntas se pretende averiguar en las organizaciones del saber matemático escolar, la validez de las demostraciones y campos de validez conceptual (Vidal, 2009),

Marco teórico

Para dotar de estatus científico y rigor a esta investigación, se ha optado por considerar la Teoría de la Transposición Didáctica de Y. Chevallard (1991), como soporte en cuanto a que el análisis de las justificaciones consiste en detectar rupturas o deformaciones de los conceptos matemáticos que puedan darse al momento de transformar el saber matemático de referencia para hacerlo enseñable, lo que conduce a examinar la organización de los contenidos en los libros de texto, sus profundizaciones y conexiones con otros conceptos, es decir, mirando el complejo entramado conceptual en el discurso escrito.

La noósfera (sistema social de enseñanza), da cuenta de todos los conocimientos existentes, aquellos que son pertinentes para la formación matemática de los jóvenes, lo que depende de varios factores tales como tipo de sociedad, nivel de desarrollo, tipo de sistema educativo, etc. El Ministerio de Educación es el agente que decide junto a su equipo de expertos cuáles son los objetos a enseñar. Una vez lista la selección de lo que se va a enseñar, se elabora “el texto del saber a enseñar”, el que debe integrarse en el currículo en secuencias de hipótesis de aprendizaje. Así se tendrá el manual del profesor, es decir, el Programa de estudio con indicaciones del tratamiento de los temas, jerarquía de los conocimientos, etc. Para hacer un texto de saber a enseñar, los expertos deben re-escribir las definiciones, propiedades y demostraciones para lograr una articulación lógica, coherente y accesible a los estudiantes. Generalmente los profesores prefieren preparar sus clases utilizando textos que ofrece el mercado o aquellos distribuidos por el ministerio de educación, en lugar de emplear los propios manuales (Villella, 2007). Las diversas editoriales presentan sus propuestas dando una organización del programa, aportando ilustraciones de los temas, ejercicios de entrenamiento y problemas. De los libros de texto se desprende un cierto saber que contribuye a la instalación de una cultura particular, integrada por todos aquellos contemporáneos de una misma época escolar. Es éste el acto de transposición que protagoniza la investigación que estamos desarrollando.

Formulación de las Hipótesis de trabajo

Para abordar las preguntas que permiten comprender el problema de investigación se han elaborado las siguientes hipótesis de trabajo:

H1: Los libros de texto no incorporan justificaciones de las propiedades y/o de los algoritmos que enuncian.

H2: Los libros que dan las justificaciones de propiedades y/o algoritmos caen en transposiciones didácticas insatisfactorias, producto de un saber matemático de referencia recortado o ignorado por los autores, es decir, existen rupturas epistemológicas entre el saber científico y el saber a enseñar.

Objetivos de la investigación.

El objetivo general de este estudio es identificar y Caracterizar los fenómenos de transposición didáctica de las Justificaciones que dan los libros de texto acerca de las propiedades y algoritmos del saber a enseñar propuesto.

Para alcanzarlo, se ha descompuesto en los siguientes objetivos específicos:

O1: Identificar si existen contenidos específicos en que la tendencia sea siempre dar una justificación.

O2: Identificar y caracterizar tipos de justificaciones (correctas e incorrectas) que dan los libros de texto respecto de las propiedades y los algoritmos que incorpora.

O3: Identificar y caracterizar rupturas epistemológicas en los contenidos de números y álgebra en los libros de texto en función de las justificaciones.

Cabe insistir que en la etapa temprana de este trabajo en que nos encontramos al momento de esta comunicación, se ha podido preliminarmente identificar algunos contenidos específicos de los cuales daremos cuenta respecto de las tendencias de sus justificaciones, como de otros que simplemente la omiten. En una segunda etapa, se realizará la caracterización formal en términos de criterios o indicadores para la categorización.

Metodología

Este proyecto se enmarca en el paradigma cualitativo de investigación, el que resulta apropiado para los fines descritos en la declaración de los objetivos, puesto que el foco de interés está en identificar y caracterizar los fenómenos de transposición didáctica de las justificaciones que dan los libros de texto al comunicar un algoritmo o una propiedad. Es así que la naturaleza de los datos que se obtendrán según Bisquerra (1989), justifica el paradigma cualitativo, pues los datos son filtrados por el investigador. El diseño es de tipo descriptivo, según los objetivos que se han planteado. En efecto, y tal como señalan Cohen y Manion (1990), la investigación descriptiva consiste en observar individuos, grupos, instituciones, métodos y materiales (especialmente éste último es el caso de este proyecto), con el fin de describir, comparar, clasificar, analizar e interpretar las entidades o acontecimientos que se refieren a los fenómenos de transposición didáctica de las justificaciones que los libros emiten sobre las propiedades o algoritmos y que han ocurrido previamente a la administración que de ésta hace el profesor.

Van Dalen y Meyer (1981), desarrollan su concepto de investigación descriptiva indicando que es aquella que trata de describir de modo exacto las actividades, objetos, procesos y personas de un determinado momento. Los mismos autores proponen una tipología de investigaciones con diseños descriptivos entre los que se encuentran los análisis documentales, del que trata este estudio, en relación a las unidades de análisis consideradas.

La técnica de investigación. El análisis de contenido (AC).

Entendemos por Análisis de Contenido (AC), una técnica de recopilación de datos, que adoptándola para el caso examinar las justificaciones que dan los libros de textos respecto de las propiedades y algoritmos, permitirá encontrar evidencias de rupturas epistemológicas con el saber científico - matemático. La elección de ésta técnica radica en lo que al respecto, Aróstegui (2001) define como el “Conjunto de técnicas de análisis de las comunicaciones”. Su sistematización requiere de la elaboración de codificaciones por categorías clasificatorias, para lo cual durante la ejecución del proyecto se elaborarán instrumentos para la recopilación y análisis de las justificaciones encontradas en función de las rupturas de transposición didáctica asociadas.

Para recopilar la información (las justificaciones), se ha realizado una selección de los libros de texto “representativos” del primer decenio del siglo XXI en matemáticas de primer año básico (primaria) a cuarto año medio (último año de secundaria en Chile). Para tal efecto, se consideró libros de texto que se adjudicaron alguna licitación en el período 2001 - 2010 y por tanto, que han sido distribuidos gratuitamente por el gobierno a establecimientos educacionales subvencionados y además aquellos de venta en el mercado particular de mayor uso. Este supuesto, se verificará mediante la facilidad de encontrar en el mercado, bibliotecas públicas como privadas la existencia de los manuales. Se espera así contar al menos uno o dos libros de texto de venta particular más uno licitado por nivel y por año. Esto significa recopilar una muestra de más de 200 libros de texto, de los que ya se han recopilado 154.

El plan para analizar las justificaciones contempla la aplicación de a siguiente matriz definidas por campos genéricos que organizan la información que se extrae de cada fuente para examinarla en relación con los objetivos planteados.

Tabla 1

Matriz para la recolección de la información

Texto: _____		Imagen extraída del libro de texto. (Sólo para casos que lo ameriten)
Nivel: _____ <input type="checkbox"/> Licitado <input type="checkbox"/> Particular		
Unidad o capítulo:		
<input type="checkbox"/> Propiedad <input type="checkbox"/> Algoritmo		
Enunciado		
Justificación		
<input type="checkbox"/> No Aplica	<input type="checkbox"/> Si Aplica	
	<input type="checkbox"/> Satisfactoria <input type="checkbox"/> No satisfactoria	
	<u>Explicación:</u>	

(En los casilleros se debe marcar con una x).

Posteriormente, la información recabada permitirá elaborar las caracterizaciones de los libros de texto en función de la existencia de las justificaciones y de cómo son: satisfactorias o no. Finalmente se pueden crear nuevas categorías de los libros de texto, al compararlos por ejemplo por ciclo (básica, media), por distribución (gratuita o licitado, particular) o bien según si las justificaciones se dan en algoritmos o en propiedades.

Finalmente, creadas las caracterizaciones se podrá responder a los objetivos del proyecto, las preguntas de investigación que ilustran el problema y se podrán aceptar o refutar las hipótesis planteadas.

Resultados encontrados a la fecha

En esta primera etapa de trabajo de tres meses se ha realizado una revisión preliminar de los libros de texto de cuya muestra total se tiene el 75%. Dicha revisión tiene como propósito acordar un primer listado de posibles contenidos que puedan ser examinados conforme al problema de la justificación. De este modo, se ha convenido en que las temáticas por nivel escolar, desde el primer año de primaria al cuarto (último) de secundaria en Chile, potencialmente candidatas (por algunos hallazgos a-priori) para ser sometidas al estudio son las que se indican en la siguiente tabla.

Tabla 2

Contenidos preliminares para el estudio de sus justificaciones según nivel escolar.

Nivel	Elementos (propiedades o algoritmos) posibles
1º Básico	<ul style="list-style-type: none"> • Algoritmos de Adición y Sustracción en \mathbb{N} y tratamiento de la igualdad
2º Básico	<ul style="list-style-type: none"> • Algoritmos de Adición y Sustracción en \mathbb{N} y tratamiento de la igualdad
3º Básico	<ul style="list-style-type: none"> • Algoritmos de Multiplicación en \mathbb{N} y tratamiento de la igualdad
4º Básico	<ul style="list-style-type: none"> • Algoritmos de la división en \mathbb{N} y tratamiento de la igualdad
5º Básico	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo del M.C.D. y del M.C.M. • Transformación del numeral mixto a fraccionario y vice-versa.
6º Básico	<ul style="list-style-type: none"> • Conversiones en el sistema métrico decimal • Algoritmo de la multiplicación de fracciones • Algoritmo de la división de fracciones
7º Básico	<ul style="list-style-type: none"> • Transformación decimal a fracción y fracción a decimal • Algoritmo de la multiplicación de decimales • Algoritmo de la división de decimales
8º Básico	<ul style="list-style-type: none"> • Multiplicación de números enteros • Potencias de exponente natural • Resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa
1º Medio	<ul style="list-style-type: none"> • Eliminación de paréntesis • Ecuaciones con coeficientes enteros. • Potencias de exponente entero. • Proporcionalidad compuesta
2º Medio	<ul style="list-style-type: none"> • Ecuaciones fraccionarias • Funciones lineales y afines. • Sistemas de ecuaciones
3º Medio	<ul style="list-style-type: none"> • Radicales • Potencias de exponente racional • Inecuaciones y valor absoluto • Ecuaciones cuadráticas
4º Medio	<ul style="list-style-type: none"> • Logaritmos. • Funciones: potencia, exponenciales, logarítmicas.

Este listado se ha enviado a consulta de expertos con algunas descripciones para refinarlo de forma de obtener un subconjunto en el que enfocar el análisis con mayor profundidad, dado el tiempo que se tiene para investigar (2 años) y la cantidad de unidades de análisis.

A continuación mostramos algunos de estos resultados preliminares, los que serán descritos como ejemplos.

Ejemplo 1

Una marcada tendencia en la enseñanza del mínimo común múltiplo está en dos métodos de cálculo: Uno de ellos consiste en elaborar un listado ordenado de menor a mayor de múltiplos de los números de los que se desea obtener su M.C.M, encerrar aquellos múltiplos comunes y de ahí seleccionar el menor. La justificación está implícita en el concepto de M.C.M. y se corresponde con una búsqueda caso a caso que permite explicar numéricamente en base a la multiplicación el procedimiento. Sin embargo, el segundo método que presenta una tabla y el conocimiento de los números primos, suele darse sin justificación.

Tabla 3

Cálculo del M.C.M. de 8, 12 y 15.

8	12	15	: 2
4	6	15	: 2
2	3	15	: 2
1	3	15	: 3
	1	5	: 5
		1	

En el proceso se indica las divisiones que se deben realizar y cuáles son los números primos que deben actuar como divisores en cada fila, pero no se especifica su vínculo con el árbol de factores ni se enfatiza la descomposición en factores primos de un número natural.

Ejemplo 2

Hay explicaciones que mutilan el saber matemático como la que hemos encontrado como caracterización de la proporcionalidad directa, en que se suele suponer que si una variable aumenta y la otra también, o si ambas disminuyen entonces son directamente proporcionales.

Ejemplo 3

Otra regla sin justificación es la que se da cuando se trabaja con la “eliminación de paréntesis”, que vale decir de paso, se ha encontrado que escasamente se trabaja su “inserción”. En la mayoría de los libros de texto se indica lo que se debe hacer cuando a un paréntesis precede un signo más o un signo menos, pero no se explica su razón de ser.

Ejemplo 4

Otra tendencia destacada la encontramos al tratar las propiedades de los radicales donde tal como se muestra en la figura 1, se exponen las propiedades de radicales de orden n . Se observa que se emplea la notación de potencias con exponente fraccionario, para comprobar que cumplen las propiedades de exponente entero, pero es evidente la falta de restricciones en estas propiedades enunciadas con este tipo de notación, pues en la práctica, no se suele enfatizar las restricciones o campos de validez. Las únicas restricciones son con respecto a evitar la división

entre cero, pero no las propias del objeto “radical”.

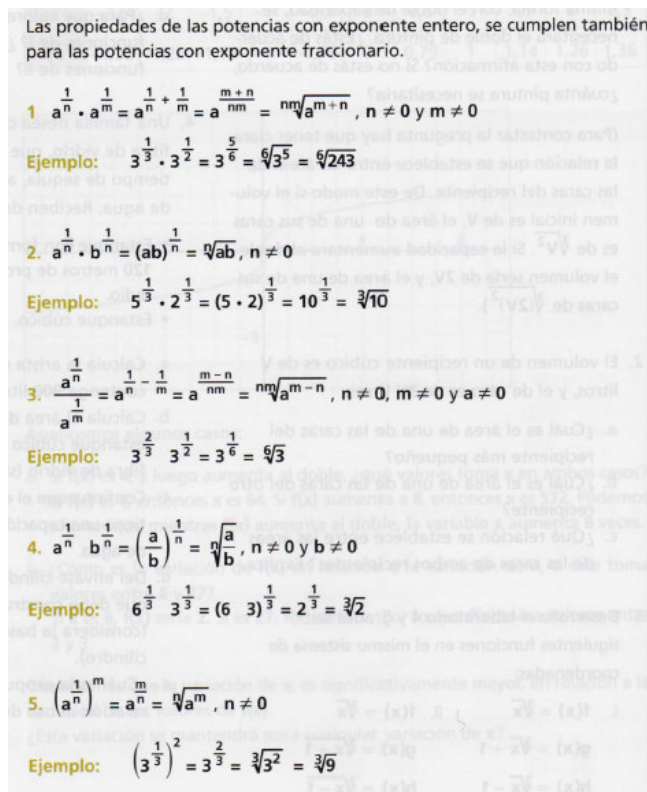


Figura 1. Tratamiento de un libro de texto¹ año 2005 de 3° año de secundaria. Chile.

Inclusive observando el tratamiento de tipo deductivo, se remite la justificación desde el inicio asumiendo que las propiedades de potencias de exponente racional son las mismas que las de exponente entero, lo que no aparece justificado en ninguna parte del texto.

Finalmente queremos insistir en que estos ejemplos son una primera reacción a la revisión preliminar de los manuales y que por tanto, pretenden iluminar el camino para el desarrollo de la investigación colocando mayor profundidad en los análisis. Lo que se ha hecho acá es sólo dar una primera idea de lo que se pretende hacer, estableciendo cuáles son los tipos de justificación cuando existen y si éstas conducen o favorecen el levantamiento de obstáculos didácticos en la enseñanza.

¹ Se ha optado por no incluir los datos específicos como autor y editorial pues podría mal utilizarse esta información.

Conclusiones

En esta primera etapa de trabajo, en que se ha realizado un análisis preliminar de los libros de texto y de algunos de los contenidos que llaman la atención por su tratamiento, se ha visto una marcada tendencia a la omisión de justificaciones por una parte y por otra a intentar dar explicaciones poco satisfactorias desde el punto de vista de la transposición que allí se realiza. Pocas han sido las temáticas que incluyen una demostración o bien un argumento coherente con el desarrollo matemático en los ámbitos de los ejes numérico y algebraico que incumben a este estudio. Se espera así levantar una colección de temáticas sobre las cuales se pueden hacer futuras investigaciones que generen y validen propuestas de enseñanza – aprendizaje que por una parte no desvirtúen el saber matemático y por otra que sean posibles de ser enseñadas en los niveles que corresponda, esto es, con un análisis de los conocimientos previos necesarios, en función de una transposición didáctica satisfactoria.

Más que los ejemplos preliminares que se han expuesto, deseamos mostrar en esta comunicación el diseño de investigación que en los meses siguientes permitirá desarrollar en profundidad el estudio de las justificaciones, cuyos resultados esperamos que impacten en la elaboración de todo tipo de unidades vía escrita (libros de texto, sitios web, apuntes y guías de los profesores para sus estudiantes, etc.).

Referencias y bibliografía

- Arostegui, J. (2001). *La investigación histórica: Teoría y método*. Crítica. España.
- Assude, T. (1992). *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie d'objet Racine Carrée et analyse du curriculum*. Tesis para optar al grado de Doctor en Didáctica de la Matemática de la Informática. Université Joseph Fourier. Grenoble I. Francia.
- Bisquerra R. (1989). *Metodología de la investigación educativa*. La Muralla. España.
- Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 7 (2), 33 -115.
- Bruno, A. & Cabrera, N. (2006). *La recta numérica en los libros de texto en España*. *Revista Educación Matemática*, Santillana. 18 (003), pp. 125 – 149.
- Chevallard, Y. & Johsua, M.A. (1991). *La Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné. La pensee sauvage*, editions. Francia.
- Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE-Horsori. Barcelona.
- Chevallard, Y. (1992). *Concepts Fondamentaux de la Didactique: Perspectives apportées par une approche Anthropologique*. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 12 (1), 73 -112.
- Cohen, L. & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla. España.
- Del Carmen, L. & Jimenez, M.P. (1997). *Los libros de texto: un recurso flexible*. *Revista Alambique*, número 11, año IV, pp. 7 - 14.
- Eyzaguirre, B., & Fontaine, L. (1997). *El futuro en riesgo: nuestros textos escolares*. Centro de Estudios Públicos CEP. 68. Chile.
- Font, V. (2002). *Una Organización de los Programas de Investigación en Didáctica de la Matemática*. *Revista EMA*, 7(2), 127 – 170.

- Font, V. (2004). Matemáticas y Cosas. Una mirada desde la Educación Matemática. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10 (2), 249 – 279.
- García, Y. (2000). Análisis de contenido del texto escolar de matemática según las exigencias educativas del nuevo milenio. <http://www.sav.us.es/pixelbit/pixelbit/articulos/n16/n16art/art162.htm>, consultado el 28 de noviembre de 2010.
- Goetz, J.P., & LeCompte, M.D.(1988). Etnografía y Diseño cualitativo en investigación educativa. Ediciones Morata, España.
- González, M.T. & Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. Revista Enseñanza de las Ciencias, 22(3), pp. 389 – 408. España.
- Gómez, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. En Antonio Martinón (Ed.). Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos. Nivola (pp. 77-80), España.
- Gómez, B. (2003). La investigación Histórica en Didáctica de la Matemática. En E. Castro, p. flores, T. Ortega, I. Rico y A. Vallecillos. Investigación en Educación Matemática. VII simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) Universidad de Granada. Septiembre (p. 79-85). España.
- Gómez, B. (2008). Pasado y presente de los manuales escolares. En Associação de Professores de Matemáticas - APM (Eds.), Actas do SIEM - 2007. XVIII SIEM. Seminário de Investigaçã em Educação Matemática. Painel: Avaliação de Manuais Escolares. 1-8.
- Gómez, B. (2009). El análisis de los manuales y la identificación de los problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. En Actas del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Cantabria, España.
- Inglada, N.; Font, V. (2004). Le rôle des livres de texte comme médiateurs d'activation de la connaissance mathématique commune. <http://www.webpersonal.net/vfont/IngladaFontCieaem54t.pdf>. Consultada el 30 de noviembre de 2010.
- Martinon, A., Pérez, A, Sauret, M., Vásquez, T. (1990). Nota sobre radicales y raíces. Revista Números 20, pp 25 – 35. España.
- Maz, A. (1999). Historia de las Matemáticas en clase: ¿Por qué?, ¿Para qué?. En Berenguer, I. Cardeñoso, D. y Torero, M. (eds). Investigación en el maula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad. Granada. Universidad de Granada y Sociedad Thales. España.
- Maz, A. (2000). Tratamiento dado a los números negativos en libros de texto publicados en España en los siglos XVIII y XIX. Granada. Universidad de Granada. España.
- Moreno, M. (2007). De la Matemática formal a la Matemática escolar. PNA. 1(3), 99 – 111.
- Novelli, A. (2005). Elementos de Matemáticas. Buenos Aires. Argentina.
- Ossenbach, G. (2000). La investigación sobre manuales escolares en América Latina: la contribución del Proyecto MANES. Revista Historia de la Educación. 19. pp. 195 – 203. Salamanca, España.
- Quintanilla, M. Adúriz-Bravo, A. (2006). Enseñar Ciencias en el nuevo milenio. Retos y propuestas. Ediciones Universidad Católica de Chile. Chile.
- Sánchez, C., Contreras A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: Una perspectiva desde la noción de obstáculo. Revista Enseñanza de las Ciencias, 1998, 16(1), pp. 73 – 84. España.
- Sandín, M. (2003). Investigación cualitativa en Educación. Mc Graw – Hill, España.

- Sierra, M., González, M.T., López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de Límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (C.O.U.): 1940 – 1995. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), pp.463 – 476. España.
- Sierra, M., González, M.T., López, C. (1999). El concepto de continuidad en los manuales españoles del siglo XX. *Educación Matemática*, 15(1), 21 – 51. España.
- Van Dalen, D. B. y Meyer, W. J. (1981). *Manual de técnicas de la investigación educacional*. Paidós, Barcelona.
- Vargas J. (2003). La Construcción de los irracionales de Dedekind como instrumento en un análisis de textos de octavo grado. *Revista Ciencia y Tecnología* N° 14. Colombia.
- Vidal, R. (2001). Estudio de algunos errores en la enseñanza de la Matemática. Tesis para optar al Título de Profesor de Matemática e Informática Educacional. Departamento de Matemática. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Santiago, Chile.
- Vidal, R. (2006). Concepciones de los profesores de educación media acerca del objeto de enseñanza Raíz Cuadrada, Una mirada desde la Transposición Didáctica. Tesis para optar al Grado de Magíster en Enseñanza de las Ciencias con Mención en Didáctica de la Matemática. Instituto de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
- Vidal, R. (2009). Las Raíces y Radicales en Libros de Texto en Chile (1969 -2009). Un Análisis de las rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las Matemáticas. Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias de la Educación. Facultad de Ciencias de la Educación. Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Villella J. (2001). Uno, dos tres...Geometría otra vez. De la intuición al conocimiento formal en EGB. Editorial Aique, Buenos Aires.
- Villella, J. (2007). Matemáticas escolares y libros de texto. Un estudio desde la Didáctica de las Matemáticas. San Martín, USAM, Argentina.
- Villella, J., Contreras, L. (2005). El conocimiento profesional de los docentes de matemáticas en relación con la selección y uso de libros de texto. *Revista de Educación* 340. pp. 973 – 992. Argentina.