Teoremas-em-ação na compreensão do conceito de funções

Antônio Luiz de Oliveira **Barreto**
Instituto UFC Virtual - PROATIVA[1]
Brasil
alobarreto@yahoo.br

Juscileide Braga de **Castro**
Instituto UFC Virtual - PROATIVA
Brasil
juscileide@virtual.ufc.br

José Aires de **Castro Filho**
Instituto UFC Virtual - PROATIVA
Brasil
aires@virtual.ufc.br

Resumo

O presente estudo identificou, à luz da teoria de Vergnaud, os teoremas-em-ação que emergiram na resolução de problemas envolvendo o conceito de funções com ou sem a mediação do ambiente computacional *Winplot*. A pesquisa foi realizada em uma escola pública da rede estadual de Fortaleza com uma turma de 13 alunos do 1^0 ano do Ensino Médio. Os dados constaram de entrevistas e observações conduzidas durante a resolução de problemas mediados por um módulo de atividades. Foram identificados teoremas-em-ação relativos à função linear $f(x) = ax$ $(a \neq 0)$ e aos gráficos da função $f(x) = ax+b$. Os resultados obtidos indicaram que os alunos utilizam teoremas-em-ação que ajudam na compreensão do conceito de funções.

Palavras chave: Álgebra, conceito de funções, teorema-ação, *Winplot*.

[1] Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem – www.proativa.virtual.ufc.br

O estudo de função e as tecnologias digitais

A Álgebra é um tema que causa dificuldades aos alunos. Na passagem da Aritmética para a Álgebra, eles se deparam com um grande obstáculo epistemológico, ou seja, reconhecer que letras podem representar valores e que símbolos matemáticos podem ter diversos significados. Outras dificuldades são a compreensão dos conceitos de variável e função, a manipulação de letras e a noção de sistema (Vergnaud, 1988).

O conceito de função pode ser considerado um tema de grande relevância dentro da matemática, devido a sua grande abrangência em diversas áreas de conhecimento. Desde muito cedo a criança, ainda no ensino infantil, começa a estabelecer correspondência entre conjuntos de certos objetos, porém somente no ensino fundamental e médio, o assunto é abordado de forma mais sistematizada.

Os alunos costumam apresentar dificuldades na compreensão do conceito de função. De fato, eles têm dificuldade em entender variável, ficando muito preso ao conceito de incógnita, visto com maior profundidade a partir do sétimo ano do fundamental. No próprio conceito de função, por sua vez, trabalha-se com outros conceitos subjacentes, a saber, conjunto domínio, conjunto imagem, conjunto contradomínio, relação, par ordenado, dentre outros. Dessa maneira, o aprendiz se sente inseguro de fazer a interligação entre esses conceitos e de conectar as principais representações de funções (Sierpinska, 1992; Vinner, 1992; Rêgo, 2000).

O reconhecimento do valor da Informática no ensino de matemática vem sendo comprovado dia após dia. Uma das áreas em que o uso das tecnologias mais tem sido estudado é a álgebra. Pesquisas recentes apontam à relevância do computador como uma ferramenta para a aprendizagem de conceitos de funções, como observa Rêgo (2000, p.76):

> "As principais vantagens dos recursos tecnológicos, em particular o uso de computadores, para o desenvolvimento do conceito de funções seriam, além do impacto positivo na motivação dos alunos, sua eficiência como ferramenta de manipulação simbólica, no traçado de gráficos e como instrumento facilitador nas tarefas de resolução de problemas. A utilização de computadores no ensino provocaria, a médio e longo prazo, mudanças curriculares e de atitude profundas uma vez que, com o uso da tecnologia, os professores tenderiam a se concentrar mais nas idéias e conceitos e menos nos algoritmos".

Diversos estudos com ambientes computacionais discutem a manipulação simultânea de múltiplas representações de aspectos ligados à função, tais como tabelas, gráficos e equações (Confrey, 1992; Borba, 1999). Tais trabalhos abordam, por exemplo, a manipulação dinâmica de gráficos e como isso modifica a equação de uma função.

Utilizando duas adaptações do *DynaGraph*: *DynaGraph Paralelo* e *DynaGraph Cartesiano* e *Function Probe*, Ferreira (1998) realizou uma pesquisa com quatro pares de estudantes brasileiros da 2ª série do Ensino Médio. Para investigação de alguns subconceitos de função, foram selecionados: conjunto imagem, periodicidade, variação, vértice e simetria axial. A pesquisadora aponta que os *software* utilizados juntamente com as atividades elaboradas em torno deles encorajaram os alunos a desenvolverem percepções, generalizações e conexões com os subconceitos estudados.

Há trabalhos também que envolvem a relação entre representações algébricas de função e situações reais tais como velocidade, saldo bancário, usando software de simulação, sensores de movimento e outros aparatos tecnológicos (Castro-Filho & Confrey, 2001).

A utilização de recursos ligados ao computador favorece a ligação entre muitas representações de conceitos, ampliando o repertório de compreensão dos alunos. Baseado nessa perspectiva e na Teoria dos Campos Conceituais, elaborada pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud, um conceito para ser compreendido deve estar inserido numa variedade de situações e as situações, por sua vez, estão envolvidas por uma diversidade de conceitos. Dessa forma, o estudo de conceito envolve uma teia de conceitos e situações interligados. Além disso, Vergnaud postula que até chegar à solução de um problema, o professor precisa valorizar os caminhos percorridos pelo aluno. Diante de uma situação-problema, os aprendizes aplicam estratégias, mobilizam conceitos que se encontram no interior de um esquema cognitivo, chamados pelo pesquisador francês de teorema-em-ação (Magina *et al*, 2002).

Baseado nos estudos de Vergnaud e nos problemas de aprendizagem dos alunos, o objetivo dessa pesquisa é investigar os teorema-ação lançados por alunos do primeiro ano do ensino médio durante a resolução de um módulo de atividades envolvendo o conceito de função. O módulo de atividades contém questões com ou sem o auxílio do ambiente computacional Winplot. Apresentaremos na seção seguinte a fundamentação teórica, seguida da metodologia utilizada na pesquisa, resultados e discussões e por fim as considerações finais serão dispostas.

A Teoria dos campos Conceituais e os Teoremas-em-ação

Uma das teorias mais importantes da Educação Matemática contemporânea é a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida pelo professor e pesquisador Gerard Vergnaud. Há muito, suas idéias têm ajudado os pesquisadores a entender a formação dos conceitos matemáticos por parte dos alunos, a partir da observação de suas estratégias de ação. Em nosso país, muitas pesquisas são fundamentadas por essa teoria, sobretudo aquelas voltadas para o estudo dos Campos Conceituais da Álgebra. Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs- de Matemática (1997)foram influenciados por esta elaboração teórica.

A teoria dos campos conceituais é uma teoria pragmática, ou seja, que faz apelo à noção de situação e das ações dos sujeitos nestas situações. Para Vergnaud (1993), o conhecimento matemático emerge na resolução de problemas.

Em contextos de ensino-aprendizagem, e, especificamente diante de uma tarefa matemática, o aluno deverá enquadrá-la num conjunto de circunstâncias e condições conhecidas, podendo evocar implicitamente um pensamento relevante e perceber predicados que a caracterizem. Nesse sentido, terá a sua disposição um sistema de informações que possibilitará a sua execução. Por outro lado, poderá fazer analogias com os conhecimentos adquiridos em contextos extra-escolares. Todos esses conhecimentos disponíveis ao sujeito diante de uma situação são chamados Teorema-em-ação.

Esses conceitos e conhecimentos são implícitos e praticamente insuscetíveis de explicitação por uma criança nas fases iniciais da aprendizagem de competências e conceitos matemáticos. Entretanto, orientam o desenvolvimento da ação.

Além disso, em outros momentos, a criança, ao deparar-se com situações-problema, faz seu julgamento e escolhe uma operação ou uma seqüência de operações para resolver o problema. Ela percebe relações que, em geral, são usadas em domínio de contextos fáceis e valores numéricos simples. Elas aparecem de modo intuitivo nas ações dos alunos, sendo apresentados na maioria das vezes através da linguagem natural. Na teoria de Vergnaud, essas relações matemáticas são chamadas de Teorema-em-ação (Magina *et al*, 2002). A seguir apresentaremos a metodologia utilizada na pesquisa.

Procedimentos Metodológicos

A pesquisa teve um caráter qualitativo, buscando entender não somente o desempenho dos alunos, mas também as formas com as quais resolviam os desafios propostos.

O grupo pesquisado constituiu-se de 13 alunos do 1^0 ano do Ensino Médio de uma escola pública de Fortaleza. Durante o período da pesquisa, os alunos ainda não haviam sido introduzidos ao conceito formal de função, aspecto importante para não interferir com os resultados da pesquisa.

O material usado na pesquisa envolveu um módulo de atividades e um ambiente computacional chamado *Winplot* (©Parri). O módulo de atividades continha questões que eram resolvidas pelos alunos com ou sem a mediação do computador.

O *Winplot*[2] é um programa para gerar gráficos de segunda e terceira dimensões a partir de funções ou equações matemáticas. Apresenta uma quantidade grande de ferramentas para que o aluno trabalhe com funções em espaços bidimensionais (2D), com a possibilidade de encontrar raízes, realizar combinações entre funções.

Nesta pesquisa, uma das utilizações do *Winplot* foi trabalhar com os alunos a noção de rotação das retas. Para tanto, o aprendiz deveria variar o coeficiente “a” da reta y = ax e perceber os possíveis teoremas-em-ação (a relação entre o ângulo de inclinação com o coeficiente angular, interseções com os eixos, raízes ou zeros da função).

Foram realizadas atividades e contém questões com assuntos ligados a modelagem algébrica[3], as propriedades da função afim f(x) = ax+b e linear f(x) = ax. Os sujeitos trabalharam em duplas, cada par em um computador, e tiveram a mediação do pesquisador. Com o intuito de facilitar o trabalho didático, usou-se um diário de campo. Além disso, em cada sessão, uma dupla foi escolhida para ser gravada. Em seguida, realizou-se entrevistas com todos os sujeitos da pesquisa, para identificar quais os teoremas-em-ação que emergiram na resolução de problemas. Todas as entrevistas foram gravadas e em seguida transcritas para posterior análise.

Resultados e discussões

Nessa seção, estão descritas os teoremas-em-ação relativos à função do primeiro grau f(x) = ax+b. Na resolução das atividades relativas a funções do primeiro grau f(x) = ax+b, muitos teoremas-em-ação foram concebidos pelos alunos com ou sem o auxílio do ambiente computacional *Winplot*. Esta categoria de teoremas-em-ação está dividida em quatro itens: teoremas-em-ação chamados de diferença constante, teoremas-em-ação denominados de “o raciocínio algébrico para determinar o sinal do coeficiente a de uma função f(x) =ax+b”, teoremas-em-ação relativos à transformação linear de uma função linear f(x) = ax ($a \neq 0$)[4], teoremas-em-ação

---

[2] http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

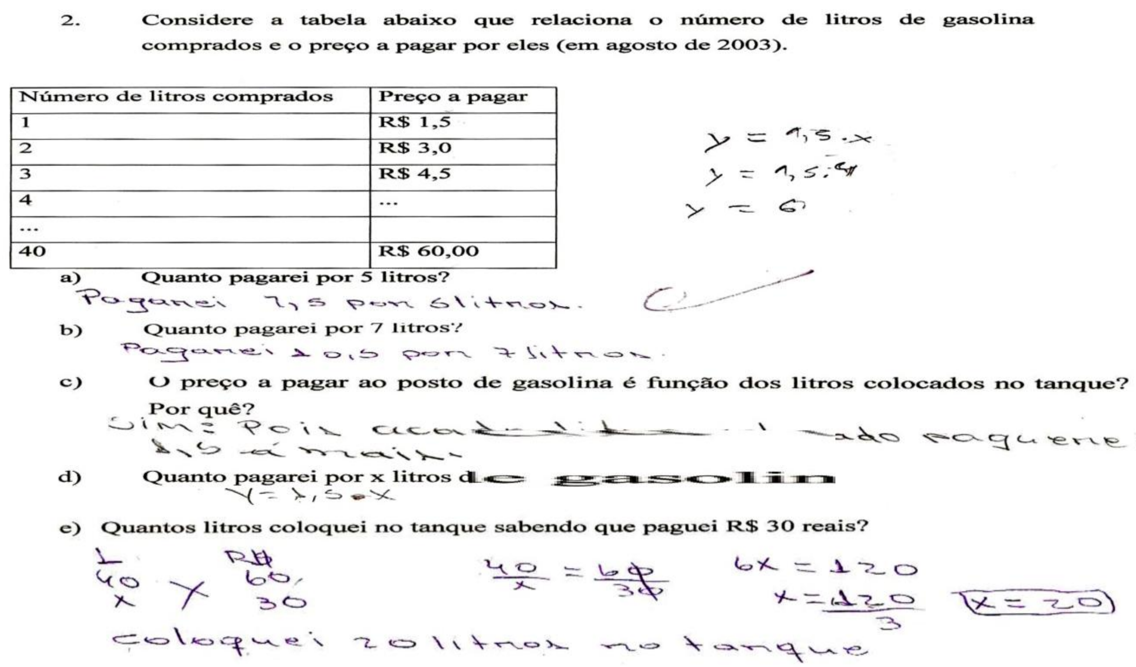
[3] Meira (1997) define modelagem algébrica como o processo de criar equações para representar e estudar fenômenos (físicos, sociais, econômicos etc.).

[4] A função linear f(x) = ax ($a \neq 0$ e $b = 0$) é um caso particular das funções do primeiro grau f(x) = ax+b

relativos aos gráficos da função f(x) = ax+b com o coeficiente b fixo, os quais estão descritos abaixo

A diferença constante

Na fase de modelagem algébrica, trabalhando com as funções do primeiro grau, os alunos, ao preencherem a tabela, podem perceber que os números que ficam à direita da tabela – coluna que consta os valores da variável dependente – apresentam uma diferença constante numa seqüência gerada a partir de uma função linear. O protocolo abaixo ilustra esse Teorema-em-ação lançado pelos alunos.



2. Considere a tabela abaixo que relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles (em agosto de 2003).

Número de litros comprados	Preço a pagar
1	R$ 1,5
2	R$ 3,0
3	R$ 4,5
4	...
...	
40	R$ 60,00

y = 1,5 . x
y = 1,5 . 4
y = 6

a) Quanto pagarei por 5 litros?
Pagarei 7,5 por 5 litros.

b) Quanto pagarei por 7 litros?
Pagarei 10,5 por 7 litros.

c) O preço a pagar ao posto de gasolina é função dos litros colocados no tanque? Por quê?
Sim: Pois a cada litro colocado pagarei 1,5 a mais.

d) Quanto pagarei por x litros de gasolin
y = 1,5 . x

e) Quantos litros coloquei no tanque sabendo que paguei R$ 30 reais?
1 — R$; 40 — 60; x — 30
$\frac{40}{x} = \frac{60}{30}$ 6x = 120 $x = \frac{120}{3}$ $\boxed{x = 20}$
Coloquei 20 litros no tanque

Figura 1 – Resolução da dupla Aprendiz 1 e Aprendiz 2 sobre questões relativas à noção intuitiva de funções. Fonte: Sala de aula

Entrevista:

1. Aprendiz 2: quanto pagarei por 5 litros?

2. Aprendiz 1: quatro, seis, sete e meio. Sete e meio! Quatro e meio com mais um e meio seis. Com mais um e meio sete e meio.

3. Pesquisador: [Observe que a aluna não usou a fórmula y = 1,5x; a resposta foi calculada com o seguinte cálculo: 6+1,5 = 7,5.]

Pela entrevista acima, constata-se que utilizaram um teorema-em-ação relativo à definição de uma P.A. (Progressão aritmética). De fato, observando a tabela, a dupla percebeu uma diferença constante de uma seqüência gerada a partir de uma função linear. Como se pode perceber, essa seqüência é uma progressão aritmética (P.A) de razão 1,5. Para calcular a quantia correspondente a 5 litros, a dupla fez o seguinte cálculo: 6+1,5 = 7,5(vide linha 1 a 3 da entrevista). Tem-se, então, um teorema-em-ação do assunto Progressão Aritmética: $a_5 = a_4 + 1,5$.

O raciocínio algébrico para determinar o sinal do coeficiente “a” de uma função f(x)=ax+b

Neste teorema-em-ação, diante de um gráfico de uma reta, o aluno substitui pontos na lei algébrica f(x) = ax+b para determinar o sinal do coeficiente “a”.

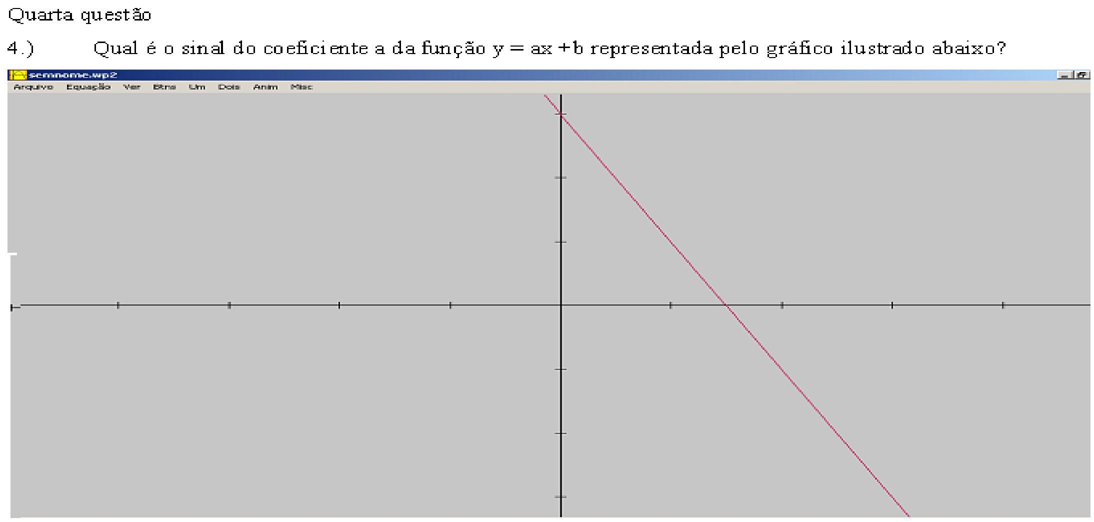


Figura 2 – Questão que visa do aluno a habilidade de lidar com o gráfico da função afim f(x) = ax +b. Fonte: Sala de Informática

Neste momento, o aluno respondeu corretamente que o sinal de “a” era negativo. Para tanto, ele substituiu os valores de f(x), x e b na função f(x) = ax+b, respectivamente, por 0; 1,5 e 3 obtendo a equação 0 = 1,5x+3, encontrando x = -2.

O aprendiz sabe que o gráfico da função é do primeiro grau [f(x) = ax+b] e que o coeficiente linear “b” é igual a 3. Veja que tem a noção geométrica do zero ou raiz da função porque substituiu a variável x por 1,5 e a variável y por zero. Assim, o aprendiz utilizou o instrumental da Álgebra para saber o sinal do coeficiente “a”.

Entrevista:

1. Pesquisador: Aprendiz, você acertou! Como foi que você fez aqui!
2. Aprendiz: Eu observei o gráfico onde o gráfico interceptava o eixo x seria x e onde interceptou o eixo y seria o b! E aí eu substituo. Aí achei o “a”.
3. Pesquisador: Por que você igualou a variável dependente y igual a zero?
4. Aprendiz: Porque toda vida que toca no x, o y é zero.

Teoremas-em-ação relativos à transformação linear

O aprendiz lança mão de Teoremas-em-ação baseados na definição e propriedades da função linear f(x) = ax, a≠0. A tabela mostra a distância d percorrida por um carro que viaja a uma constante de 75 km/h durante t horas. Se t = 6 h, quanto vale d?

Tabela 1. Tabela que expressa a distância em função do tempo

T(h)	**1**	**2**	**3**	**4**
D(km)	**75**	**150**	**225**	**300**

Fonte: Sala de aula.

Entrevista:

Aprendiz: 450 km.

Pesquisador: Como foi que chegou a esse resultado?

Aprendiz: 4 é 300 e 2 é 150 [pensando] 2 horas a mais ia ser mais 150. Total: 450 Km

A única função do primeiro grau que é uma T.L. é a função linear. De fato, $f(ka_1)=a(ka_1)=k(aa_1)=kf(a_1)$ e $f(a_1+b_1)=a(a_1+b_1)=aa_1+ab_1=f(a_1)+f(b_1)$. Observa-se que o aprendiz evocou um teorema-em-ação. Com efeito, como f(4) = 300 e f(2) = 150 então: f(6) =300+150=450 e f(6)=f(4+2)=f(4)+f(2). Teoremas-em-ação relativos ao gráfico da função do primeiro grau f(x) = ax+b.

Teoremas-em-ação relativos aos gráficos da função f(x) = ax+b com o coeficiente b fixo

Concebendo este teorema-em-ação, o aluno descobre invariantes relativos à família de retas y=ax+b, onde o coeficiente angular "a" varia e o coeficiente "b" é fixo.

A situação-problema é a mesma do item 4.2 (apresentando um gráfico de uma função do primeiro grau com coeficiente angular negativo, pede-se o sinal do coeficiente a). O aprendiz responde erradamente que o coeficiente angular é positivo. O pesquisador sugere que o aluno trabalhe com uma família de funções do tipo f(x) = ax+2 no ambiente computacional Winplot.

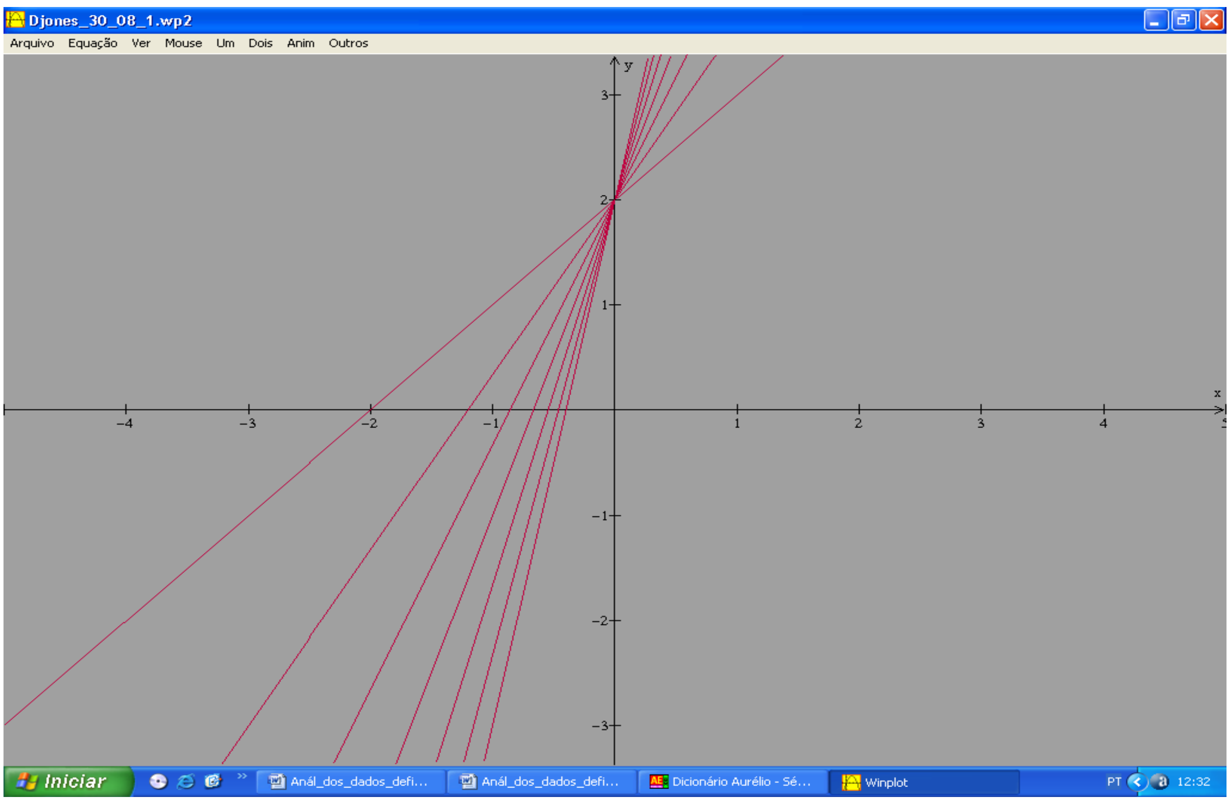


Figura 3 - Família de retas y=ax+2 com variação do "a" de 1 a 5. Fonte: Sala de Informática

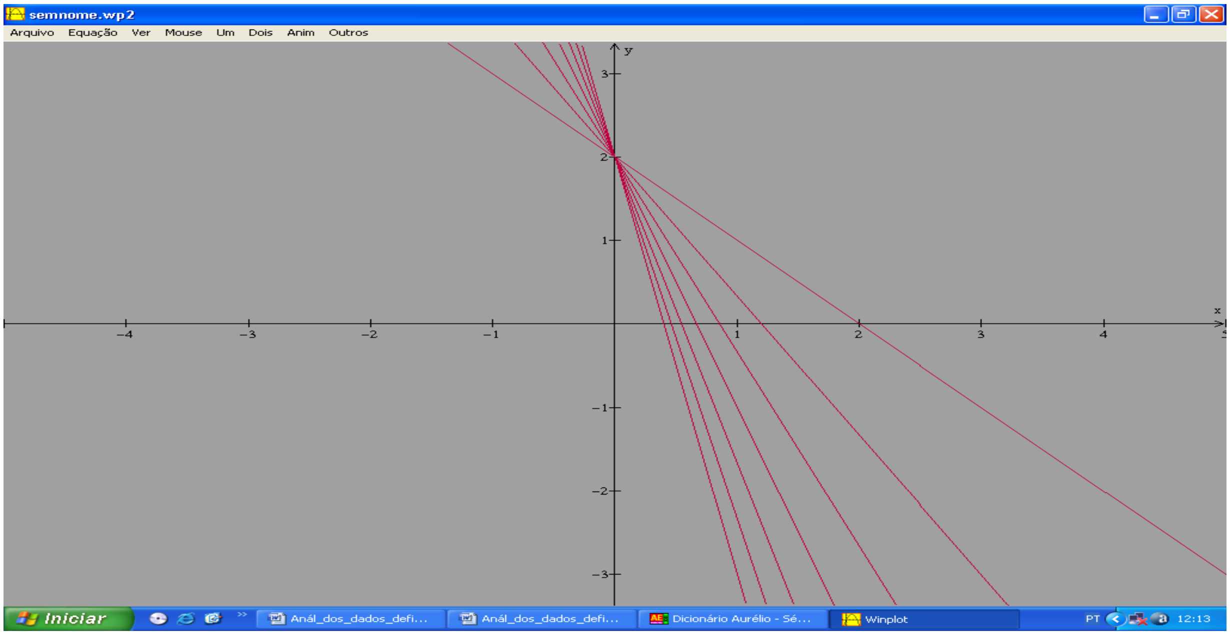


Figura 4 - Família de retas y=ax+2 com variação do "a" de -5 a -1. Fonte: Sala de informática

Neste momento, o Aprendiz, utilizando o comando "família" do ambiente computacional *Winplot*, faz várias simulações com a família de retas y=ax+2. Esse procedimento é dividido em dois momentos. No primeiro momento, ele varia o parâmetro "a" de 1 a 5 (*vide figura 3*). No segundo momento, por sua vez, varia o parâmetro "a" de -5 a -1 (*vide figura 4*).

Entrevista:

1. Entrevistador: Qual é a diferença dessa família para outra?

2. Aprendiz: Quando "a" é negativo vai interceptar pela direita! Quando a é positivo vai interceptar pela esquerda!

3. Entrevistador: E aí a sua resposta está correta ou errada?

4. Aprendiz: Errada, o a é negativo.

Sabe-se que o zero ou raiz real da função y=ax+b é $x = -\frac{b}{a}$. De fato, se y=0 temos 0=ax+b $\Rightarrow x = -\frac{b}{a}$. Para o teorema-em-ação lançado pelo aluno analisa-se dois casos.

Primeiro caso: Quando a>0 e b>0.

$$\text{Se a} > 0 \text{ e b} > 0 \Rightarrow \tfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow x = -\tfrac{b}{a} < 0.$$

Assim, quando o zero ou raiz da função afim é negativo e o valor do coeficiente linear "b" é positivo, a reta intercepta, respectivamente, no eixo horizontal x em uma abscissa negativa e eixo vertical y em uma ordenada positiva, "interceptando pela esquerda".

Segundo caso: Quando a<0 e b>0.

$$\text{Se a} < 0 \text{ e b} > 0 \Rightarrow \tfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow x = -\tfrac{b}{a} > 0.$$

Assim, quando o zero ou raiz da função é positivo e o valor do coeficiente linear “b” é positivo, a reta intercepta, respectivamente, o eixo horizontal “x” numa abscissa positiva e eixo vertical y numa ordenada positiva, “interceptando pela direita”. Portanto, o teorema-em-ação lançado pelo aluno está correto para b>0. Para o caso do coeficiente “b” negativo, a análise é análoga e foi feita e discutida com os alunos.

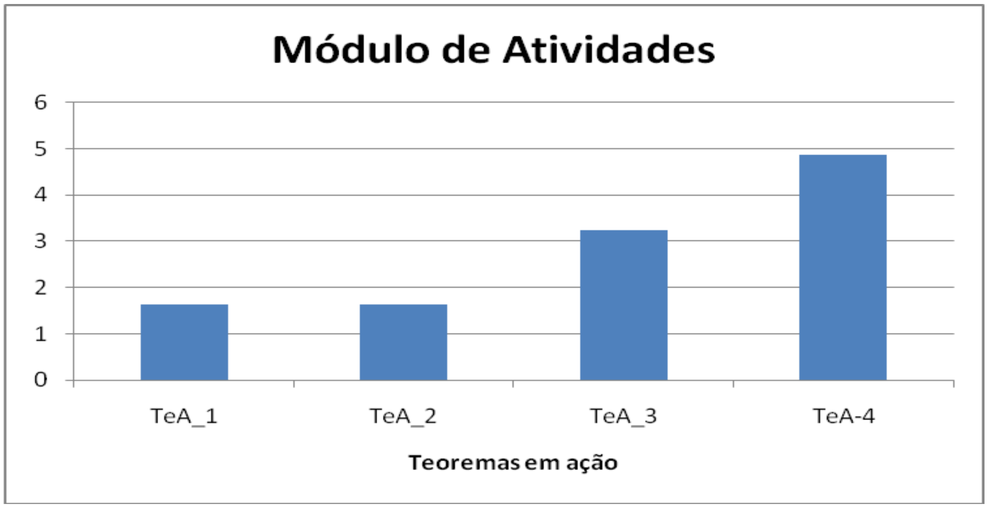


Figura 5. – Teorema-em-ação concebidos pelos alunos. Fonte: Sala de Informática

Por intermédio desse gráfico, observa-se que um dos Teoremas-em-ação menos utilizados foi aquele denominado “o raciocínio algébrico para determinar o sinal do coeficiente “a” de uma função do primeiro grau f(x) = ax+b” (TeA_2) uma vez que se baseia num esquema de raciocínio bastante sofisticado. De fato, ao invés de o aprendiz determinar o sinal do coeficiente através do crescimento e decrescimento da função ou analisar através do ângulo de inclinação e, por conseguinte pelo coeficiente angular, ele substitui um ponto conhecido (x_1, x_2) na função f(x) = ax+b e determina o sinal do coeficiente “a”. Este teorema em ação deve ser incentivado pelo professor em práticas pedagógicas destinados ao estudo do conceito de funções e Geometria Analítica.

Os teoremas-em-ação mais utilizados foram àqueles relacionados ao gráfico da função do primeiro grau f(x) = ax+b (TeA-4). Mas muitas dentre estas estratégias estão parcialmente corretas, uma vez que o aluno se fixa muito nos pontos de interseção do gráfico da função com os eixos horizontal e vertical e a partir daí começa a fazer inferências. Isto já tinha sido percebido nos estudos de Ferreira (1998).

Já o aparecimento do teoremas-em-ação baseado nas transformações lineares (TeA_3) é interessante, pois poderá ser trabalhados com os alunos já no primeiro ano do Ensino Médio. Deve-se salientar que esta abordagem deve ser trabalhada inicialmente a nível intuitivo e depois a nível formal com uma abordagem condizente ao nível de estrutura cognitiva do aluno.

Já o teorema-em-ação baseado nas diferenças constante (TeA_1) é uma indicação de que ao se trabalhar com as múltiplas representações, o ensino poderá ter bons resultados propiciando aos alunos um ambiente rico de investigações. Além disso, o conteúdo de progressão aritmética pode ser trabalhado concomitantemente com o estudo de funções. De fato, uma progressão aritmética é uma sequência que pode ser enquadrada como uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Outras considerações sobre a pesquisa realizada serão feitas a seguir.

Considerações Finais

Muitos conhecimentos apreendidos pelas crianças não são usados oportunamente na resolução de problemas (teoremas que não são teoremas-em-ação), e ao contrário, existem conhecimentos intuitivos da criança que nunca tomam a forma de verdadeiros enunciados (teoremas-em-ação que não se tornam teoremas). Assim, o professor tem uma tarefa importante de perceber essas nuances de pensamentos e favorecer a transformação dos teoremas-em-ação e vice-versa (Lessa, 1996).

Nesta pesquisa, mediados por um módulo de atividades que continha questões referentes ao conceito de funções, alguns teoremas-em-ação foram identificados. Identificar os teoremas-em-ação utilizados pelos alunos na resolução de problemas ajuda a entender como eles constroem o conhecimento. Além disso, essas diferentes formas de raciocínios devem ser compreendidas e levadas em conta pelo professor nas horas em que estão planejando as suas aulas, pois pode tornar a sua intervenção mais eficiente.

Através dos teoremas-em-ação, o professor assumirá o papel de pesquisador, diagnosticando os conhecimentos adquiridos por seus alunos, e outros que poderão ser desenvolvidos através de outras situações-problema ou até mesmo ampliando os já utilizados (Magina *et all*, 2001).

Muitas pesquisas apontam que a aprendizagem do conceito de funções pode ser auxiliada pelo computador. (Ferreira, 1998; Rêgo, 2000; Castro-Filho, 2001). Primeiramente, através de seu impacto visual, o aluno se sente mais motivado ao resolver uma determinada situação-problema com a utilização do computador. Por outro lado, utilizando os seus comandos, rapidamente podem ser traçados vários gráficos com suas tabelas correspondentes, evitando cálculos algébricos cansativos e desnecessários. Em segundo lugar, ao trabalhar com as múltiplas representações oferecidas pelo *software* educacional, o aprendiz tem mais possibilidades de produzir significados aos conteúdos ligados ao conceito de função, uma vez que ele pode interligar essas representações, ampliando o seu repertório de compreensão (Borba, 1999; Barreto; Castro-Filho, 2008).

Apesar de termos desenvolvidos um módulo de atividades para a compreensão do conceito de funções e, em particular, as funções do primeiro grau, nosso estudo se limitou a poucos alunos. Outras pesquisas devem ser desenvolvidas, objetivando ampliar as atividades para outros tipos de funções, a quantidade de alunos e que investiguem a questão da interação social entre os alunos na aprendizagem do conceito de função.

Bibliografia e Referências

Barreto, A. L. O.; Castro-Filho, J.A. (2008). *O estudo de funções mediado por um objeto de aprendizagem.* IN: Anais II Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT), Recife : Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, V. 1. P. 1-12.

Borba, M. C.(1999) *Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento*. IN: Bicudo, M. A. V. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP.

Castro-Filho, J. A.; Confrey, Jere .(2001) *Interactive diagrams: investigating java-applets for learning mathematics.* In: XXI Congresso da Sociedade Brasileira da Computação, Fortaleza.

Castro-Filho, J. A.(2001b) *Novas tecnologias e o ensino de função, taxa de variação e acumulação,* In: Anais do VII ENEM. Rio de Janeiro: ENEM.

Confrey, J. (1992). *Using computers to promote students' inventions on the function concept.* In S. Malcom , L. Roberts, and K. Sheingold (eds.). *The year in school science 1991*. (pp. 141-174). Washington , DC : American.

Ferreira, Verônica G. Gomes (1998). *Aproveitando o potencial dinâmico do computador no ensino de função matemática.*In: Anais do XXIII EPEN, Natal: UFRN, v. 19, p. 37-50.

Lessa, M.M.L. (1996). *Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à álgebra: um estudo comparativo*. Dissertação de Mestrado. UFPE. Recife, 1996.

Magina, S.; Campo, T.M.M.; Nunes, T. e Gitirana, V. (2001). *Repensando A Adição, Subtração: Contribuições da Teoria Dos Campos Conceituais.*3º Ed. São Paulo: Proem.

Meira, Luciano L. (1997). *Educação algébrica e resolução de problemas: significados e modelagem algébrica.* 1997. Acessado em 17 /fev 2008, disponível: http://www.tvebrasil.com.br/salto

Rêgo, Rogéria Gaudêncio.(2000). *Um estudo sobre a construção do conceito de função*. 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN.

Sierpinska, A. (1992). *On understanding the notion of function.* In: Dubinsky, E; Harel, G. (Ed.). The concept of function - aspects of function and pedagogy. Nova York: MAA Notes, v.25. p.195-213.

Vergnaud G. (1988). *Theorical framewooks and empirical facts in the psychology of mathematics education.* In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 6.,Budapest. Proceedings of the International Congress on Mathematical Education. Budapest: ICME, 1988. p. 39-41.

Vergnaud, G. (1993). *Teoria dos campos conceituais*. In: Nasser, L. (Ed.). SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: SIEM, 1993. p. 1-26.

Vinner, S. (1992). *The function concept as a prototype for problems in mathematics learning.* In: Dubinsky, E; Harel, G. (Ed.). The concept of function - aspects of function and pedagogy. Nova York: MAA Notes. v.25. p. 195-213.