A utilização de processos geométricos no ensino de equações quadráticas

Graciana Ferreira Alves **Dias**
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte-UERN
Brasil
graciana05@gmail.com

Resumo: O presente trabalho relata uma pesquisa cujo objetivo principal foi analisar a possibilidade de compreensão, por parte de alunos do 9º ano, sobre a obtenção das soluções de uma equação do 2° grau, utilizando processos geométricos A pesquisa consistiu em uma intervenção metodológica, tendo como sujeitos alunos de uma escola pública no município de Mossoró. A intervenção foi dividida em três etapas: aplicação de uma avaliação inicial e final, e desenvolvimento de um módulo de ensino. Neste trabalho, fizemos um breve relato das atividades que faziam parte do módulo de ensino, em seguida analisamos os resultados obtidos na avaliação final fazendo uma comparação com os resultados da avaliação inicial. Os resultados da avaliação final foram analisados sob o ponto de vista qualitativo. Os resultados gerais mostraram um avanço com relação à compreensão dos alunos acerca das temáticas das atividades, sobretudo da resolução de equações quadráticas utilizando como recurso a geometria.

Palavras- Chave: Equações do 2º grau – Ensino de Álgebra – Geometria - Ensino Fundamental – Compreensão relacional.

Introdução

O currículo de matemática para o Ensino Fundamental, que data de meados do século XX, foi reestruturado sob a influência da matemática moderna, e dividido em aritmética, álgebra e geometria. O desenvolvimento dos conhecimentos algébrico, aritmético e geométrico é de fundamental importância na estruturação do pensamento matemático do aluno, pois lhe permite realizar abstrações e generalizações, compreender o significado das operações e desenvolver as capacidades de abstração e representação do espaço.

A álgebra vem fazendo parte da vida escolar do aluno a partir das séries inicias do Ensino Fundamental. Pode-se encontrar desde o 3º ano, mesmo que de forma muito discreta, atividades que objetivam desenvolver o raciocínio algébrico do aluno, através da generalização de padrões geométricos e do trato com as operações inversas, a fim de encontrar valores desconhecidos, como podemos ver em Imenes, Jakubo & Lellis (2001, p. 79) e ainda em Smole, Diniz & Marin (2008, p.18).

Porém, mesmo tendo contato com a álgebra desde cedo, pesquisas na área de Educação Matemática apontam as enormes dificuldades apresentadas em seu ensino e aprendizagem. E é principalmente no 7º ano que os problemas começam a surgir, em razão do início do trabalho com as incógnitas, variáveis e tantos outros conceitos que, para a maior parte dos alunos, parecem não ter sentido algum, transformando a álgebra em um simples "jogo de sinais", regras e símbolos. As atividades requeridas pelo professor são realizadas, sem que lhes sejam atribuídas qualquer significado.

Diversas pesquisas em Educação Matemática revelam este quadro, no qual o ensino-aprendizagem de álgebra tem se mostrado diante de sérios obstáculos. Dentre elas, podemos destacar duas pesquisas realizadas sobre a aprendizagem de álgebra, Baraldi (1999), que traz o resultado de uma prova específica em Matemática, na qual o índice de acerto dos conteúdos de equações e sistemas de equações é de apenas 12,5%. E uma pesquisa feita por Da Rocha Falcão (1996), com 481 adolescentes brasileiros de 13 a 17 anos de idade, submetidos a 20 problemas de álgebra elementar. Este estudo mostrou que os estudantes apresentam dificuldades em gerar uma equação para uma situação-problema, como também importantes dificuldades em resolver uma equação proposta. Em situações em que era necessário apresentar um sistema de equações com duas incógnitas, em média, 70% dos alunos apresentaram respostas incorretas.

No relatório do Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, realizado em 2001, consta que os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental “demonstram nível de dificuldade com o uso da linguagem simbólica ou algébrica na resolução de problemas” (BRASIL, 2002). A análise de questões que envolviam a habilidade do aluno na representação algébrica de dados do enunciado de um problema aponta para um índice de acerto de cerca de 25%.

Os conteúdos de álgebra são organizados nos livros didáticos para 7º, 8º e 9º anos, nos quais se trabalham as equações de 1º e 2º graus, fatorações, operações com expressões algébricas. No 9º ano, os problemas de aprendizagem em álgebra já são bem mais acentuados, visto que, além das equações de 1º grau, o aluno agora terá que trabalhar com as equações quadráticas, que requerem uma boa habilidade no tratamento das mesmas.

Nos livros didáticos mais recentes do 9º ano do Ensino Fundamental, percebemos uma preocupação maior com o entendimento do processo matemático, não havendo preocupação apenas com memorizações. É o que vemos em Dante (2006) e Guelli (2005), para quem as soluções de equações do 2º grau são introduzidas através da História da Matemática, trabalhando-se com área de quadrados, onde o lado do quadrado é uma das soluções da equação. Já em Name (2005), a história é contada, mostrando-se um exemplo da História da Matemática, mas o método de solução continua desvinculado e sempre recorrente à fórmula de Bhaskara[1].

Como podemos perceber, muitos livros já abordam a questão das soluções de equações quadráticas, voltando-se agora para a História da Matemática para que o aluno perceba as construções e possa fazê-las de forma a entender o processo, e não memorizando apenas o produto de alguém que “pensou por ele”.

Pensando nas dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem da álgebra e na possibilidade de uma nova abordagem para o seu ensino, desenvolvemos uma pesquisa na qual pudéssemos avaliar a possibilidade de compreensão do processo de determinação das soluções de uma equação do 2º grau, por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental por meio de processos geométricos concebidos com base na História da Matemática.

Desejávamos, com nosso trabalho, trazer elementos que ajudassem a responder às seguintes perguntas: como os alunos estão aprendendo equações do 2º grau? Se há dificuldades reais para a aprendizagem de equações no 7º ano, como se encontram os alunos do 9º ano: eles superaram possíveis dificuldades?

O presente trabalho tem como objetivo fazer um relato da referida pesquisa, que foi desenvolvido com fases de avaliação e intervenção metodológica, observando as seguintes etapas: aplicação da avaliação diagnóstica; elaboração e aplicação do conjunto de atividades, que compõem o módulo de ensino; aplicação e análise de uma avaliação final semelhante à avaliação diagnóstica, acrescida de algumas questões pertinentes à pesquisa. Faremos aqui neste artigo um relato desta pesquisa, mostrando sobre o que tratavam as atividades do módulo de ensino com seus respectivos objetivos e os resultados comparativos das avaliações

[1] A denominação fórmula de Bhaskara, para a fórmula resolutiva de equações do segundo grau, parece ser exclusiva do Brasil conforme Machado (2003, apud CARVALHO, 2004)

inicial e final, o desenvolvimento das atividades pode ser visto com mais detalhes em Dias (2009).

Para análise das respostas da avaliação final, levamos em consideração a compreensão dos alunos em relação aos conceitos trabalhados. Para tanto, utilizamos as categorias de *compressão instrumental* e *compreensão relacional* desenvolvidas por Skemp (1976). Segundo o autor a compreensão relacional é aquela onde coexistem o *fazer* e o *por quê*. O aluno, além de dominar as técnicas de resolução de um dado problema, consegue fazer relações entre esse conhecimento com aqueles conhecimentos que já possui, para resolver novos problemas.

A compreensão instrumental seria 'regras sem razões': sabe-se o que fazer, tem-se habilidade para um determinado tipo de problemas, porém não se atribui significados. Apesar da diferença entre esses níveis de compreensão, essa diferença não é quantitativa, mas qualitativa, como nos mostra Fossa (2001). Não são dois caminhos distintos, mas são degraus de uma mesma escada. À medida que se vai subindo, caminha-se da compreensão instrumental para a relacional.

Os passos da pesquisa

Nossa pesquisa foi realizada em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental numa escola estadual do município de Mossoró. Os 30 alunos que fizeram parte desta pesquisa eram adolescentes na faixa de 13 a 17 anos.

O passo inicial do nosso trabalho foi a aplicação de uma avaliação inicial (diagnóstica), para a partir dela perceber quais eram as reais dificuldades dos alunos com relação aos conhecimentos prévios para o trabalho com o módulo de ensino. Pois, conforme coloca Miras e Solé (1996), a avaliação diagnóstica, tem o papel de mostrar quais alunos possuem os conhecimentos necessários para a nova aprendizagem, assim como o papel de auxiliar o professor/pesquisador na decisão de ações voltadas a proporcionar aos alunos que não estão preparados para os conhecimentos necessários.

Algumas questões da avaliação inicial foram semelhantes às da avaliação final, elas serão apresentada juntamente com as da avaliação final no item 3 deste artigo onde faremos uma comparação dos seus resultados.

Os resultados desta avaliação revelaram o quanto o conhecimento matemático dos alunos está aquém do esperado para este nível de escolaridade. A maior parte dos alunos deixou as questões em branco, mostrando que não possuíam ideia alguma sobre os conteúdos abordados na avaliação. Dos alunos que responderam, poucos obtiveram respostas corretas. Os alunos demonstraram inicialmente confusão dos conceitos de área e perímetro.

Muitos alunos demonstraram sérias dificuldades nas operações com números decimais, especialmente na multiplicação. Porém, o estado mais crítico foi observado com relação à temática das equações. Os alunos mostraram desconhecimento das técnicas de resolução de equações, não observando as propriedades da igualdade, assim como as propriedades das operações. Com relação às equações do segundo grau, apenas um aluno demonstrou que conhecia algum processo de resolução, porém não obteve sucesso na resolução da mesma.

O módulo de ensino

O módulo de ensino utilizado contou com seis atividades estruturadas e uma aula com resolução de exercícios. As atividades diziam respeito aos conteúdos de perímetro, área de retângulos e equações do primeiro e segundo graus. Todas as atividades aplicadas eram desenvolvidas pelos alunos que formavam grupos de três, em alguns casos foram formadas duplas.

Além das atividades, foram utilizados materiais para desenho para auxílio nas atividades. Estas foram desenvolvidas da forma sugerida por Fossa (2001), na sala de aula, pelos próprios alunos trabalhando em grupos e utilizando materiais concretos para manipulação por parte deles, sendo incentivados a fazerem um registro dos resultados da atividade. Assim, segundo o autor:

> A atividade fica completa no sentido de estar munida dos três tipos de representação física (os materiais manipulativos), uma representação oral (a discussão no grupo e, se for o caso, a apresentação dos resultados ao professor e/ou outros colegas), e uma representação simbólica (o registro por escrito). (FOSSA, 2001, p.63)

Vejamos sobre o que tratavam essas atividades e seus respectivos objetivos: Na atividade 1 trabalhamos com o "Cálculo da área de Retângulos", seus objetivos eram calcular a medida da área e do perímetro de retângulos através da malha quadriculada; perceber o quadrado como um retângulo e onde ele está presente no cotidiano. Já a atividade 2 tratamos com "Cálculo de áreas de retângulos e generalização da fórmula para cálculo da área de retângulos" tendo como objetivos construir retângulos utilizando a régua e apresentar a medida de sua área utilizando a fórmula $A = b \times h$; encontrar as medidas das figuras através das informações dadas, sem a utilização da régua. A atividade cujo título era "Cálculo de áreas de retângulos com dimensões variáveis" tinha como objetivos: descobrir as medidas de um retângulo sendo dada sua área; apresentar a área de um retângulo quando uma das medidas é desconhecida

A atividade 4: "Trabalhando com as equações do tipo x^2 = c tinha como objetivos: Encontrar a solução positiva da equação do 2º grau, da forma $ax^2 = c$. Apresentar as equações correspondentes dos problemas dados. Na atividade 5: "Trabalhando com as equações da forma $ax^2=c$ e $ax^2 = bx$" os objetivos eram: escrever algebricamente os dados dos problemas; encontrar as soluções das equações da forma $ax^2 = bx$. E a Atividade 6: "Deduzindo geometricamente as expressões $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$", cujos objetivos eram: deduzir geometricamente o quadrado da soma e da diferença de dois números; trabalhar com o completamento de quadrados, de forma a obter quadrados com área $(x + a)^2$.

Para finalizar o módulo de ensino trabalhamos em forma de aula que teve como tema: Encontrando as soluções das equações da forma: $ax^2 + bx = c$ e $ax^2 = bx + c$.

Para encontrar a solução positiva da equação da forma $ax^2 + bx = c$ nos baseamos na resolução de Al-Khowarizmi apresentada por Boyer (1996) para a equação $x^2 + 10x = 39$.

Vejamos: Os termos x^2 e $10x$ são interpretados geometricamente como sendo um quadrado de lado x e quatro retângulos de lados $2\frac{1}{2}$ e x, respectivamente, como podemos ver na figura 1.

Para completar o quadrado, devemos somar 4 vezes $\mathbf{6\frac{1}{4}}$, que dá exatamente 25. Somando 39 com 25 obtemos, 64, que tem como raiz 8. Então, para o lado desse quadrado ser 8, x deve ser igual a 3.

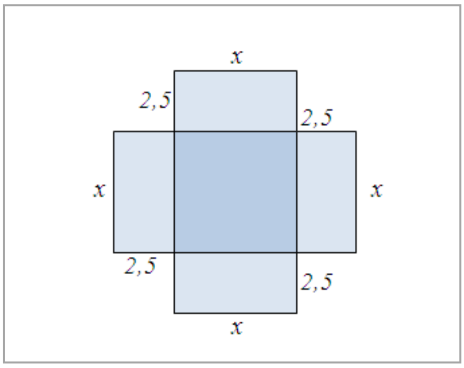


Figura 1: Representação geométrica da equação $\boldsymbol{x^2 + 10x = 39}$

Para fins didáticos apresentamos para os alunos, nesta aula, uma interpretação feita por Rodrigues Neto (2003) da solução de Al-Khowarizmi. Os termos x^2 e $10x$ são interpretados geometricamente como sendo um quadrado de lado x e dois retângulos de lados 5 e x, como podemos ver na figura abaixo.

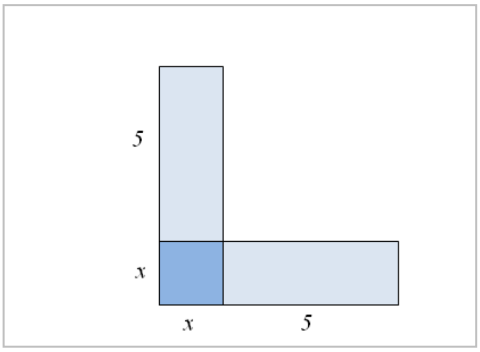


Figura 2: Representação geométrica da equação $\boldsymbol{x^2 + 10x = 39}$ (utilizada por nós)

Para completar o quadrado, devemos acrescentar um quadrado de lado 5, que dá exatamente 25. Somando 39, que corresponde a soma das áreas x^2 e $10x$ $(5x + 5x)$, com 25 obtemos um quadrado de área $64u^2$ que tem como raiz 8. Então, para o lado desse quadrado ser 8, x deve ser igual a 3.

Com relação ao caso $ax^2 = bx + c$ trabalhamos também como sugerido em Rodrigues Neto (1998), que da área ax^2 podemos subtrair a área bx, obtendo c como área restante e, em seguida, iniciar o completamento de quadrados.

A avaliação final e os resultados comparados

A Avaliação Final teve por objetivo principal investigar o nível de compreensão dos alunos quanto aos conteúdos estudados nas Atividades de ensino.

A avaliação continha oito questões, que foram praticamente as mesmas da avaliação diagnóstica inicial. Os resultados obtidos na avaliação diagnóstica final foram analisados do ponto de vista matemático, segundo os parâmetros: correto, incorreto ou em branco. Os resultados e procedimentos utilizados pelos alunos também foram analisados qualitativamente, a partir das noções de compreensão instrumental e relacional, baseados na teoria de Skemp (1976).

Apresentaremos aqui cinco questões da avaliação final que demonstram a compreensão dos alunos com relação ao método algébrico-geométrico trabalhado nas atividades. A cada questão acompanha uma tabela com os índices de respostas corretas (C), incorretas (I) e em branco (B). Em seguida um breve comentário das respostas dos alunos, acerca da compreensão dos conceitos desenvolvidos.

Questão 1: Escreva uma expressão algébrica que represente a área *A* de cada um dos retângulos abaixo:

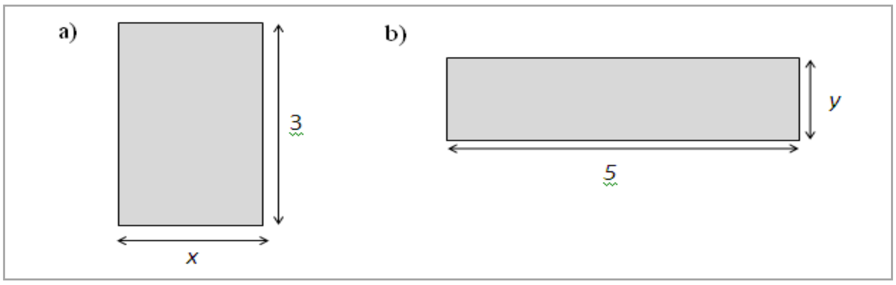


Figura 3: Retângulos referentes à questão 1

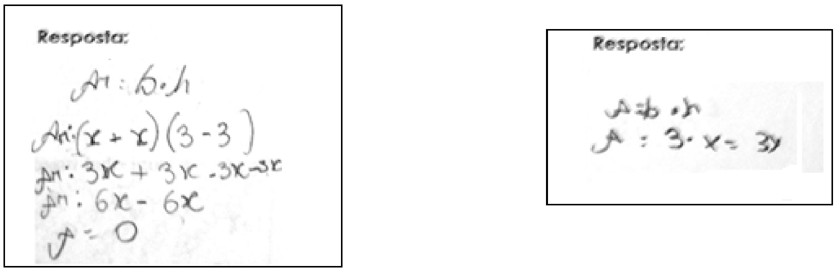
Na tabela, pode-se ver que 82,8% dos alunos responderam corretamente os dois itens desta questão na avaliação final. A diferença entre as porcentagens de erros e questões em branco se deve ao fato de que, uma aluna deixou em branco o item (a) e respondeu o item (b) incorretamente.

Tabela 1
Desempenho dos alunos nas avaliações inicial e final Questão 1

Itens	C	%C	I	%I	B	%B	Total
Avaliação Inicial 1(a)	4	13,8	2	6,9	23	79,3	100
Avaliação Final 1 (a)	24	82,8	4	13,8	1	3,4	100
Avaliação Inicial 1(b)	4	13,8	2	6,9	23	79,3	100
Avaliação Final 1 (b)	24	82,8	5	17,2	0	0	100

Quinze alunos (51,7%) foram categorizados como compreendendo relacionalmente o conceito de área quando uma de suas medidas é desconhecida. Estes alunos calcularam corretamente a medida da área dos retângulos dos itens (a) e (b), apresentando $A = 3x$ e $A = 5y$, respectivamente. Entre estes alunos podemos citar a aluna Sol, que em sua avaliação inicial, apresentou uma resposta que demonstrava a sua incompreensão acerca deste conceito. A figura 4 apresenta as duas respostas da aluna, da avaliação inicial e da avaliação final.

Oito alunos (27,6%) apresentaram corretamente as expressões $3x$ para o item (a) e $5y$ para o item (b), porém julgamos que eles encontram-se em um nível de compreensão instrumental, pois não compreendem o sentido de uma fórmula, apresentando somente uma expressão algébrica. O aluno Procyon obteve como resposta $3x^2$ e $5y^2$; julgamos inicialmente esta resposta como incorreta. Mas tivemos oportunidade de entrevistar este aluno, perguntando-lhe de que forma havia raciocinado para obter estas respostas. Procyon prontamente respondeu: *É que eu confundi, a área desse é 3x e a área desse é 5x. Por causa da unidade ao quadrado, acabei me confundindo, mas o certo é 3x e 5x.* O aluno, ao olhar a questão rapidamente, percebeu o seu erro, mostrando que possui compreensão sobre estes conceitos, podendo, portanto, ser categorizado em um nível de compreensão instrumental, pois também não apresenta a igualdade *Área = 3x* e somente a expressão algébrica.



Avaliação Inicial — Avaliação Final

Figura 4: Comparação das respostas da aluna Sol

Questão 2: Faça o que se pede em cada questão, não se esqueça de registrar seus cálculos:

a) Desenhe um retângulo de área igual a $5x$.
b) Qual o perímetro da figura do item anterior?

Para efeitos de comparação, utilizaremos somente o item (a), pois o item (b) não constava na avaliação inicial, com relação a este item faremos somente os comentários acerca das respostas dadas pelos alunos.

Tabela 2
Desempenho dos alunos nas avaliações inicial e final Questão 2

Itens	C	%C	I	%I	B	%B	Total
Avaliação Inicial	7	24,1	6	20,7	16	55,2	100
Avaliação Final 1 (a)	23	79,4	3	10,3	3	10,3	100

Categorizamos que, uma compreensão relacional da construção de retângulos, a partir da sua área, seria apresentada pelo aluno que, desenhasse um retângulo com área $5x$, porém conseguisse obter outros valores para as dimensões além de 5 e x. Então, segundo esta categorização, nenhum aluno chegou a um nível relacional deste conceito. Porém, 20 alunos (72,4%) desenharam um retângulo no qual as dimensões eram 5 e x, obtendo corretamente um retângulo com área $5x$ como pedia a questão. Categorizamos estes alunos como estando em um nível de compreensão entre o instrumental e o relacional. Pois foram capazes de atribuir valores para as dimensões de forma a obter a medida correta da área.

Três alunas desenharam um retângulo e escreveram no seu interior o valor correspondente a área, neste caso $5x$. Duas delas foram categorizadas como estando em um nível instrumental, porém obtiveram um crescimento significativo em termos de compreensão quando comparamos suas respostas da avaliação inicial, com as da avaliação final. A aluna Maia, na avaliação inicial, desenhou um retângulo com lados $5x$ e $1x$, em seguida calculou $A = 5x.1x$ e obteve $A = 5x$ como resposta, demonstrando inicialmente incompreensão na multiplicação com incógnitas. Já a aluna Nêmesis, deixou este item em branco afirmando não saber como desenhar este retângulo.

Tabela 3

Desempenho dos alunos nas avaliações inicial e final Questão 2 item (b)

Itens	C	%C	I	%I	B	%B	Total
Avaliação Final	12	41,4	13	44,8	4	13,8	100

A maior dificuldade apresentada nesta questão não se encontrou no conceito de perímetro em si, visto que a maior parte dos alunos apresentou o perímetro do retângulo como sendo a soma dos seus lados. Mas nas dificuldades apresentadas para uma compreensão *relacional* do conceito do mesmo. Como por exemplo, a propriedade distributiva da multiplicação com relação à soma. Dez alunos (34,5%) obtiveram respostas corretas, porém nenhum deles apresentou o perímetro utilizando a distributividade. Eles apresentaram a igualdade: $perímetro = 5 + x + 5 + x$, obtendo como resposta $perímetro = 10 + 2x$. E por não utilizarem esta propriedade, categorizamos estes alunos em um nível entre o *instrumental e o relacional*.

Dos alunos que obtiveram respostas incorretas para o cálculo do perímetro, somente dois demonstraram alguma compreensão, ainda que não possa ser chamada de instrumental. A figura seguinte mostra o protocolo dos alunos Sirius e Elnath.

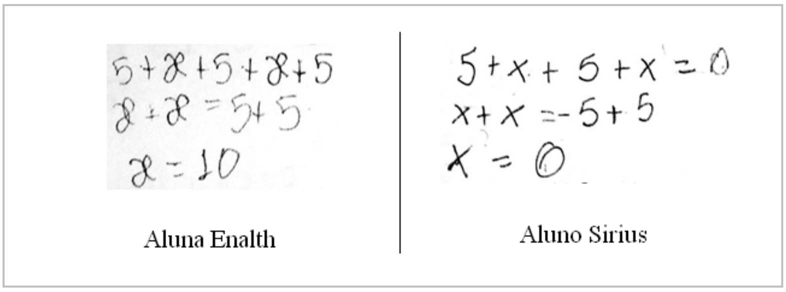


Figura 2: Cálculo do perímetro alunos Enalth e Sirius

As repostas mostram a tentativa dos alunos em calcular o perímetro, indicando a soma dos lados do retângulo, porém estes alunos, além de não aceitarem a expressão $5 + x + 5 + x$, também não entendem como uma fórmula $P = 5 + x + 5 + x$. Concebendo somente expressões contendo variáveis, como uma equação, sendo, portanto, necessário encontrar a solução. O símbolo de igualdade inserido na expressão não foi compreendido como uma equivalência, mas sim como um símbolo que solicita uma resposta numérica, este tipo de erros segundo Booth (1995) se dá pela má interpretação das notações e dos símbolos em álgebra pelos alunos.

Questão 3: Um quadrado possui lado igual a *x* + 1. Sabendo que a área desse quadrado mede $49cm^2$, calcule o valor de *x*.

Tabela 4

Comparativa resultados questão 3

Itens	C	%C	I	%I	B	%B	Total
Avaliação Inicial	0	0	8	27,6	21	72,4	100
Avaliação Final	13	44,9	7	24,1	9	31	100

Como podemos verificar na tabela anterior, apenas 27,6% dos alunos tentaram responder a esta questão na avaliação inicial, porém nenhum deles obteve êxito nesta tentativa.

Os alunos, Procyon e Maia, que representam 6,9% da turma, transcreveram corretamente o problema em forma de equação, obtendo $(x+1)^2 = 49$. Em seguida resolveram o problema, utilizando as propriedades da igualdade, chegando à resposta $x = 6$. Julgamos que estes alunos encontram-se no nível *relacional* da compreensão acerca da transcrição e resolução de um problema na forma de equação.

Cinco alunos (17,2%) foram categorizados em um nível de compreensão entre o instrumental e o relacional. Eles concluíram, através do auxílio da geometria, que o lado do quadrado em questão deveria ser igual a 7. E só a partir daí transcreveram o problema em forma de equação, escrevendo $x + 1 = 7$, encontrando $x = 6$ como solução desta equação. As alunas Alhena e Nêmesis concluíram, de maneira semelhante a estes alunos, que $x + 1 = 7$, porém não prosseguiram de forma a encontrar a solução da equação. Concluímos, portanto, que estes alunos estão em um nível ainda instrumental, visto que, apesar de chegarem à conclusão de que o lado do quadrado era igual a 7, transcrevendo na forma de equação:$x + 1 = 7$, não tinham o domínio das técnicas necessárias para resolução da mesma.

Questão 4: Encontre as soluções da equação $y^2 + 4y - 5 = 0$, utilizando como recurso a geometria.

Tabela 5
Resultados Questão 4

Itens	C	%C	I	%I	B	%B	Total
Avaliação Final	7	24,1	13	44,8	9	31	100

Uma compreensão relacional sobre a resolução de equações do segundo grau, utilizando como recurso a geometria, foi alcançada por cinco alunos (17,2%) que participaram da intervenção. Os alunos Maia, Iza, Saiph, Procyon e Elnath demonstraram uma crescente compreensão acerca dos conteúdos e conceitos trabalhados durante as atividades.

Eles utilizaram procedimentos semelhantes para encontrar as soluções da equação acima. Interpretaram geometricamente a equação $y^2 + 4y = 5$, chegando a $(y+2)^2 = 9$. Como podemos ver no protocolo de Maia na figura 6. Ou seja, assim como Maia, os outros alunos preferiram manipular algebricamente a equação $(y+2)^2 = 9$, com o intuito de encontrar as duas soluções, chegando a $y = 1$ e $y = -5$.

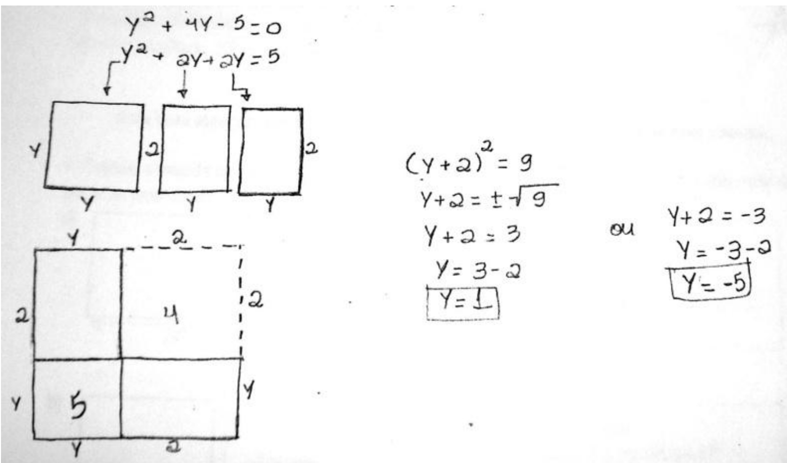


Figura 6: Solução da equação aluna Maia

Ao observar as repostas dos alunos, verificamos que ao resolver à equação $(y+2)^2 = 9$, chegavam à equação $y + 2 = \pm\sqrt{9}$. Salientamos o que está subentendido ao escrever $\pm\sqrt{9}$. Ao resolver $(y+2)^2 = 9$, pretendemos descobrir que valores de y, fazem com que o primeiro membro da equação seja igual a 9. Queremos resolver às equações $y + 2 = 3$ e $y + 2 = -3$, pois $3^2 = 9$ e $(-3)^2 = 9$. Relembramos a eles que a raiz quadrada de um número é um número positivo, e que para contemplar os valores 3 e -3, de forma resumida utiliza-se $\pm\sqrt{9}$. A partir disso, os alunos continuaram utilizando esta notação, porém sempre que possível lembrávamos a eles o significado da mesma.

Apenas cinco alunos foram categorizados como compreendendo instrumentalmente esta abordagem das equações do segundo grau. As respostas deles foram julgadas matematicamente como incorretas, pois os alunos não conseguiram apresentar as duas soluções da equação. Os erros diziam respeito ao desconhecimento das propriedades da igualdade.

Questão 5: Apresente as soluções da equação abaixo, utilizando o método que você preferir:

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Tabela 6

Comparativa dos resultados Questão 5

Itens	C	%C	I	%I	B	%B	Total
Avaliação Final	8	27,6	15	51,7	6	20,7	100

Como se pode observar na tabela anterior, oito alunos responderam corretamente a esta questão. Porém, uma compreensão relacional acerca do conhecimento de soluções de equações do tipo $ax^2 = bx + c$ foi alcançada apenas por cinco alunos (17,2%), que foram, os mesmos a obter uma compreensão relacional nas equações do tipo $ax^2 + bx = c$, o que pôde ser demonstrado na questão 5.

Cinco alunos utilizaram o mesmo procedimento trabalhado por nós, nas atividades para encontrar as soluções deste tipo de equações. Para ilustrar de que forma os alunos encontraram as soluções, vejamos o protocolo do aluno Saiph (Fig. 7).

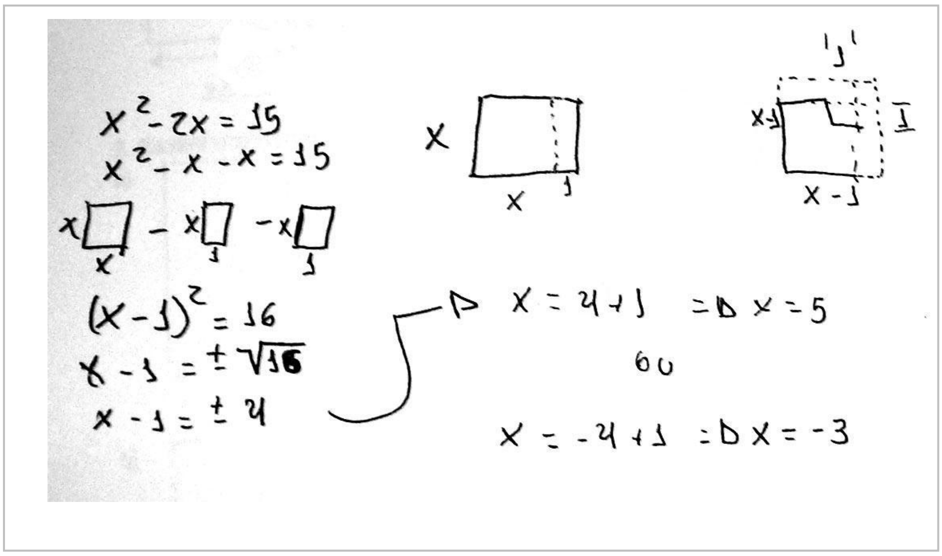


Figura 7: Solução da equação aluno Saiph

A equação $x^2 - 2x = 15$ foi interpretada da seguinte forma: do quadrado de lado x são subtraídos dois retângulos de área x cada um, restando uma figura com área igual a 15u, de forma a completar o quadrado o aluno adiciona um quadrado de lado 1. Obtendo, agora, um novo quadrado de lado $x - 1$ e área igual a 16. Chegando, portanto, à seguinte equação: $(x - 1)^2 = 16$. Após esta interpretação geométrica, o aluno Saiph, assim como os outros quatro, utilizou as propriedades da igualdade de forma a obter as soluções $x = 5$ e $x = -3$.

Considerações finais

Após a aplicação das atividades verificamos que os alunos, de um modo geral, evoluíram muito na aprendizagem dos conteúdos matemáticos da pesquisa. A opção por trabalhar as atividades em grupos facilitou bastante a interação aluno/aluno, visto que, para executar as atividades, os alunos precisavam escutar o outro de forma a obter a melhor solução para determinada atividade. A interação professor/aluno foi um ponto bastante ressaltado no depoimento final dos alunos, pois eles começaram a perceber a importância do professor como mediador na construção da sua aprendizagem.

Estamos cientes de que a metodologia aqui utilizada, com atividades de ensino para o aluno, atingiu os objetivos propostos para a nossa pesquisa. Corroborando as idéias de Jean Piaget, de que a aprendizagem é algo que se dá com a interação do aluno com o mundo que o cerca e que essa aprendizagem não parte de uma imposição, mas de uma construção pessoal.

Podemos ainda ressaltar como contribuição deste trabalho, a viabilidade de um módulo de atividades de ensino para se aplicar em sala de aula de forma a trabalhar com os alunos a temática das equações do segundo grau, utilizando como recurso o processo geométrico advindo da História da Matemática. Os alunos tiveram oportunidade de trabalhar este conteúdo de forma contextualizada dentro da própria matemática, conteúdo este que geralmente é trabalhado com a memorização de fórmulas.

Queremos lembrar que o método aqui utilizado não é suficiente para encontrar as soluções de qualquer equação do segundo grau. Podemos utilizar o método geométrico para encontrar soluções de equações que tenham pelo menos uma solução positiva. Uma alternativa que pode ser deixada como sugestão para outras atividades, seria utilizar a interpretação geométrica para facilitar a dedução da fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau.

Referências

BARALDI, I. M. *Matemática na escola: que ciência é esta?* Bauru: EDUSC, 1999.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Ed Edgard Blücher, 1996.

BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. *Relatório Saeb 2001*. Matemática. Brasília: MEC/INEP, 2002. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/download/saeb/2001/relatorioSAEB_matematica.pdf>. Acesso em: 10 de maio de 2007.

CARVALHO, J. B. P. F. *Revisitando uma velha conhecida*: a história da equação do segundo grau. Anais da segunda bienal da sociedade brasileira de matemática, Salvador, Bahia, p. 1-49, 2004.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. *Clinical analysis of difficulties in algebraic problem solving among Brazilian students: principal aspects and didactic issues.* In: XXth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Anais... Valencia : Universitat de València, 1996. v. 2. p. 257-264.

DANTE, L. R. *Tudo é Matemática***.** São Paulo: Ática, 2006. v.4.

DIAS, G. F**.** Utilizando processos geométricos da história da matemática para o ensino de equações do 2º grau. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

FOSSA, J. A. *Ensaios* sobre a *Educação Matemática*. Belém: EDUEPA, 2001.

GUELLI, O. *Matemática em construção.* São Paulo: Ática, 2004.

IMENES, L. M., JAKUBO, J. J. & LELLIS, M. *Novo tempo:* matemática. São Paulo: Scipione, 2001. v.2.

MIRAS, M. & SOLÉ, I. A evolução da aprendizagem e a evolução no processo de ensino e aprendizagem. In: COLL, César; PALÁCIOS, Jésus; MARCHESI, Álvaro (orgs.). *Desenvolvimento Psicológico e Educação:* psicologia da educação. Tradução: Angélica Mello Alves. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

NAME, M. A. *Matemática e Realidade*. 5.ed. São Paulo: Atual, *2005. v.4.*

RODRIGUES NETO, F. P. Resgatando processos geométricos da história da Matemática para uma discussão sobre soluções de equações quadráticas. *Revista Educação em Questão*, v. 12/13 (jul./dez. 2000 – jan./jun. 2001), pág. 100-127. Natal: EDUFRN, 2003.

SILVA, C. M. S. da. *Explorando as operações aritméticas com recursos da História da Matemática*. Brasília: Plano, 2003.

SKEMP, R. R. *Relational understanding and instrumental understanding.* Mathematics teaching, v. 77, p.20-26, 1976. Disponível em: <http://www.science.oregonstate.edu/~burgerl/Skemp%20paper.pdf> . Acesso em 03 nov. 2007.

SMOLE, K. C. S., DINIZ, M. I. V. & MARIN, V. *Saber matemática.* 4º ano. São Paulo: FTD, 2008.