



O desenvolvimento do pensamento probabilístico e combinatório no contexto de sala de aula

Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão **Santos**
Universidade São Francisco – USF/Itatiba – SP
Brasil
jaquelisantos@ig.com.br
Cristiane Guerra dos Santos **Gomide**
Universidade São Francisco – USF/Itatiba – SP
Brasil
guerracris2004@yahoo.com.br

Resumo

Os atuais currículos de Matemática inseriram os estudos de Análise Combinatória e Probabilidade no Ensino Fundamental. Tais conteúdos, tradicionalmente, fazem parte do Ensino Médio. Assim, essa inserção tem gerado dúvidas e incertezas em professores e formadores de professores sobre as possíveis abordagens a ser dadas a esses conteúdos matemáticos. O que abordar? De que forma? Como o aluno desse nível de ensino desenvolve tais pensamentos? Nesse sentido, esta oficina tem por objetivo promover com professores em formação e em exercício a realização de atividades envolvendo o ensino de Análise Combinatória e de Probabilidade nas aulas de Matemática. As discussões serão enriquecidas com análises e reflexões sobre experiências das professoras responsáveis pela oficina, em suas salas de aula, destacando práticas de ensino voltadas ao desenvolvimento do pensamento combinatório e probabilístico dos alunos do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Combinatória; Probabilidade; Resolução de Problemas; Educação Estatística, Práticas de Ensino.

Introdução

O ensino da probabilidade e da estatística na Educação Infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental tem sido tema de pesquisas e discussões, principalmente nos encontros e congressos relacionados a Educação Matemática, ganhando grande relevância na última década. O tema em nosso país é sugerido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e no currículo da maioria dos estados e das escolas; em algumas delas, desde a Educação Infantil.

Segundo Carvalho (2004) os PCNs sugerem que logo nas séries iniciais sejam desenvolvidas atividades relacionadas a assuntos do cotidiano dos alunos, sempre partindo de situações-problema em que possam desenvolver um estudo investigativo, proporcionando ao aluno por meio das situações-problema a oportunidade de elaborar; suas próprias hipóteses,

estabelecer relações, que possa observar para fazer previsões e que sejam desenvolvidas algumas noções de probabilidade e estatística.

Apesar disso, os dados do Indicador Nacional de Analfabetismo Funcional (INAF) apontam um alto índice de desconhecimento e/ou dificuldade da população sobre o assunto (FONSECA, 2004).

No trabalho pedagógico com os alunos da educação básica, é comum observarmos que eles apresentam muito mais dificuldades em aplicar noções probabilísticas do que outros conceitos matemáticos. Sáenz (1999) justifica tal situação pela dificuldade em pensar no enfoque de quantificar o azar, situação não presente em geometria, por exemplo. Para o autor, a concepção de probabilidade não é natural nem intuitiva; é fruto de reflexão e prolongado contraste com a realidade. Dessa forma, a compreensão dos princípios probabilísticos é importante, já que as primeiras noções sobre o assunto podem levar ao erro. Sobre o pensamento probabilístico, Santos (2010) afirma que:

[...] o pensamento probabilístico dos adolescentes depende, e muito, das ações didáticas que necessitam ser realizadas com os alunos, nas escolas, uma vez que pouca ou nenhuma experiência probabilística é experienciada e/ou observada por eles, sem que haja uma intervenção. (Santos, 2010, p.11)

Atentos a isso, pesquisadores buscam soluções para minimizar o problema, pois acreditam que o ensino da estatística e da probabilidade seja de suma importância para a sociedade atual, já que suas implicações se refletem diretamente na interpretação das informações, nas tomadas de decisões profissionais e pessoais, nas questões éticas, na postura crítica diante das situações do dia a dia. Diante desse quadro, é necessário que os alunos sejam capazes de ler e compreender dados e saibam contextualizá-los, analisá-los e utilizá-los como auxílio na compreensão do mundo, na vida profissional e na função do cidadão.

Shaughnessy (1992) defende a ideia de um ensino frequente e de forma significativa, em que as situações apresentadas aos alunos sejam de seu interesse. De modo semelhante, Lopes (2008), sugere que tal processo de ensino e aprendizagem deva ser baseado em resoluções de problemas ao afirma que:

[...] a resolução de problemas é mais do que um veículo para o ensino de Matemática, ela possibilita reforçar conhecimentos e ajuda a superar os desafios cotidianos. Auxilia o desenvolvimento de várias habilidades, especialmente o raciocínio lógico, auxiliando as pessoas a serem capazes de tomar decisões. (Lopes, 2008, p. 79)

Na concepção de outros autores como Mason (1998), Schoenfeld(1998), Lester (1994) e Van de Walle (2009) que também trabalham com a perspectiva de resolução de problemas e investigações matemáticas, propostas de aprendizagem baseada em tais perspectivas proporcionam situações de conhecimento amplo, pois os alunos agem como protagonistas e estabelecem relações significativas com a matemática. Além disso, as questões relacionadas a valores são marcantes nesse tipo de aula, em que os diferentes pontos de vista entre os alunos e entre os grupos são aspectos positivos e fundamentais para o trabalho investigativo.

Entendemos problema como uma situação incerta, em que há o desejo de solucionar uma questão, mas não se sabe de antemão como; pode ser resolvida de diversas maneiras e, até mesmo, pode não ter resposta ou ter várias. Dessa forma, admitimos a resolução de problemas como uma situação desencadeadora do processo de aprendizagem em que o aluno, visando resolver o problema enfrentado, está inserido em um movimento de pensamento, apropriação de linguagem e elaboração de conceitos.

Compreendemos, a partir dos estudos sobre as pesquisas desenvolvidas sobre o assunto, que o pensamento probabilístico dos adolescentes depende das ações didáticas que necessitam ser realizadas com os alunos, nas escolas, uma vez que pouca ou nenhuma experiência probabilística é experienciada e/ou observada por eles.

Diferentes concepções sobre probabilísticas são apresentadas por autores como Shaughnessy (1992); Godino, Cañizares, Batanero (1996) e Fernandes (1999). Godino, Batanero e Cañizares (1996) distinguem os conceitos de probabilidade em quatro grupos: clássico, frequentista ou empírico, subjetivista e conceito axiomático ou formal.

A **concepção clássica** do cálculo de probabilidade apresentada por Laplace, em sua obra *Théorie analytique des probabilités*, publicada em 1812, é considerada como o primeiro ensaio de se definir o rigor matemático da noção de probabilidade. Nesse caso a probabilidade é definida pela razão entre números de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, desde que esteja explícito que todos os resultados são igualmente prováveis (GODINO, BATANERO, CAÑIZARES, 1996). Nos jogos de azar baseados em moedas, em dados (não viciados) e em extração de bolas em urnas, é possível enquadrar esta perspectiva teórica, por tratar-se de fenômenos cujas variáveis são discretas, e supõe-se que seja possível selecionar, como espaço amostral, um conjunto de sucessos elementares que garantam a equiprobabilidade.

Há concepções equivocadas relacionadas aos jogos de sorte e azar, cujos resultados apresentam simetria, e não existem razões para acreditar que um resultado tenha mais vantagem que o outro. Entretanto, em alguns jogos, por exemplo, a condição para uma criança iniciar a jogada é de que se obtenha o número 6 na face superior de um dado, remete-a a uma falsa concepção, pois muitas crianças acreditam que esse número é o mais difícil de sair, daí a compreensão de que o jogo já se inicia de maneira injusta. Nos jogos da megassena também é possível perceber essa falsa concepção, pois um jogador que tem em um cartão seis números alternados (não consecutivos) acredita que a probabilidade de ele ser o ganhador é maior do que outro que tenha um cartão com seis números consecutivos.

Para Hawkins e Kapadia (apud FERNANDES, 1999, p. 51), situações como essas dificilmente serão compreendidas como situações em que exista simetria entre os resultados, e há dificuldade em utilizar a concepção clássica de probabilidade como uma razão que envolve um conjunto equiprovável. Assim, a concepção frequentista ou subjetivista passa a ser importante, uma vez que possibilita experienciar situações e estabelecer resultados.

A principal característica do **conceito frequentista ou empírico** é que a probabilidade de um acontecimento emerge do processo de uma experimentação. Vivenciamos esse processo quando compramos um veículo e pagamos o seguro contra furtos, observa-se que o valor a ser pago varia de acordo com o índice de roubo da região em que o proprietário reside e também com a marca, ou modelo, do veículo. Para fazer o cálculo do valor do seguro dos veículos as seguradoras realizam uma pesquisa estatística sobre o índice de furto dos mesmos, e por meio desses dados calculam a probabilidade de o proprietário do automóvel “x” ter seu carro furtado, ou seja, a razão entre o número de possibilidades favoráveis, automóveis “x” furtados, e o número total de possibilidades, automóveis “x” em circulação.

Dessa forma, as probabilidades são baseadas em resultados de experiências realizadas, o que é denominado “probabilidade *a posteriori*”, uma vez que é calculado depois de os experimentos terem sido realizados. Nessa perspectiva, eventos individuais são inseridos no coletivo, ou seja, eventos semelhantes são inseridos em um mesmo contexto, assumindo essas propriedades individuais. Godino, Batanero e Cañizares (1996) exploraram tal teoria, ao simular o experimento aleatório de lançamento de moedas com o auxílio de um computador.

Numa sequência de 14 mil repetições, observaram que a frequência de caras era muito próxima da probabilidade teórica, $\frac{1}{2}$.

Esse experimento exemplifica que, quanto maior o número de acontecimentos, maior a proximidade entre a probabilidade *a posteriori* e a probabilidade *a priori*. Assim, a interpretação de tal probabilidade envolve dificuldades, pois pode conduzir as pessoas a decisões equivocadas. Essas dificuldades são resultantes da utilização de um mesmo limite para a frequência relativa e também da definição do que se entende por “aleatoriedade” e por “semelhança” (FERNANDES, 1999). As conclusões obtidas a partir de um simples experimento que envolve a aleatoriedade podem levar os alunos a uma interpretação falaciosa, pois, ao realizar esse tipo de experimento, é possível obter eventos pouco prováveis, o que poderia conduzir os alunos a conclusões ingênuas de que eventos desse tipo tenham maior chance de ocorrer. Esse tipo de dificuldade exemplifica o que Fernandes (1999) está chamando de equívoco em relação à compreensão dos conceitos de aleatoriedade e semelhança. Outros conceitos probabilísticos também são elucidados pelo autor, como o conceito subjetivista.

Na **perspectiva subjetivista**, as probabilidades expressam grau de crença ou percepção pessoal. O indivíduo utiliza suas experiências e seu conhecimento sobre o assunto para exprimir a probabilidade de um sucesso, o que possibilita diferentes medidas de probabilidade para um mesmo sucesso. Fernandes (1999) a designa “personalista”, pois, segundo ele, as duas concepções anteriores – clássica e frequentista - são propriedades do mundo real, enquanto na percepção subjetivista as probabilidades são avaliações pessoais de situações aleatórias, inerentes à mente do indivíduo. Desse modo, a probabilidade passa de uma avaliação externa ao sujeito para uma avaliação centrada no sujeito.

Em contextos que envolvem jogos de azar, há situações em que o grau da confiança no resultado (probabilidade de acontecimentos) está relacionado com a aposta dos jogadores, ou seja, quanto maior o valor da aposta, maior será o ganho ou a perda do apostador, porém há pessoas que atribuem tal situação aos riscos (excitação emocional) envolvidos nos jogos. A concepção subjetivista expõe que os jogadores seguem regras básicas relacionadas ao apostar (confiar) em determinado acontecimento. Coerência e consistência são categorias de informação que os subjetivistas consideram e que, combinadas, geram a probabilidade da situação em questão.

Borovcnik y Bentz, Bentz e Kapadia (apud FERNANDES, 1999, p. 37) ressaltam que as duas maiores dificuldades da concepção subjetivista são a pretensão de medir a probabilidade de qualquer situação de incerteza e a falta de orientação para calcular as probabilidades *a priori*. Atualmente, a concepção formal tem sido difundida na delimitação das probabilidades.

A **concepção formal ou axiomática** da probabilidade, conhecida também como objetiva ou normativa, apoiada na teoria dos conjuntos surgiu como consequência das restrições da concepção clássica, a qual impõe que os sucessos sejam equiprováveis e corresponda a um espaço amostral finito. O conceito formal tem como objetivo calcular com precisão a probabilidade de determinados eventos usando as leis matemáticas, podendo ser usado em situações em que eventos não são equiprováveis ou finitos (GODINO, BATANERO, CAÑIZARES, 1996).

Dessa forma, consideramos que situações de aprendizagem que possibilitem a discussão das diferentes ideias sobre probabilidade e da articulação dessas ideias com a análise combinatória e estatística promovam, não apenas, o pensamento combinatório e probabilístico, mas o pensamento matemático.

Diante do exposto, propomos a realização de uma oficina com o objetivo de apresentarmos situações de aprendizagem relacionadas aos pressupostos abordados nesse texto e que possibilitam a discussão de ideias sobre probabilidade e análise combinatória.

Proposta de desenvolvimento da oficina

Propomos para a oficina o desenvolvimento de sequência de tarefas¹ - situações-problema - abertas ou fechadas que possibilitam colocar o sujeito em um movimento de resolução de problemas e produção de pensamento matemático -, que favorecessem reflexões e interpretações relacionadas às diferentes concepções de probabilidade – clássica, frequentista ou empírica, subjetivista e formal ou axiomática - assim como a linguagem empregada no cotidiano e que está relacionada com o grau de crença pessoal, análise de possibilidades, estimativas de medidas de chance, experimentação e avaliação de situações reais e simuladas. Consideramos todos esses como fatores facilitadores do processo de ensino e aprendizagem do conhecimento probabilístico e combinatório. A oficina tem como público-alvo educadores matemáticos que atuam na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e Médio e dispostos a conhecer e discutir questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de probabilidade. Para sua realização, será necessária uma sala para aproximadamente 30 pessoas, data show e quadro branco ou lousa. As tarefas serão apresentadas e realizadas em materiais impressos, fornecidos pelas ministrantes da oficina, assim como o material manipulativo necessário.

A oficina será desenvolvida da seguinte forma:

- Introdução teórica: apresentação e discussão de recortes de uma pesquisa de mestrado que aborda as concepções probabilísticas e o movimento de tais concepções com alunos do Ensino Fundamental (SANTOS, 2010).
- Realização de algumas tarefas como o **jogo de tómbola e a linguagem probabilística**² visando promover reflexões sobre termos utilizados na linguagem cotidiana e que fazem parte do vocabulário probabilístico e da concepção subjetivista. Segundo Bentz e Borovcnik y Bentz (apud SAÉNZ CASTRO, 1999) as respostas obtidas podem não representar os processos de pensamento dos estudantes, pois as questões relacionadas à linguagem podem confundi-los; **a medida e o experimento**³ buscando estabelecer relações entre a medida de chance de uma situação-problema e o experimento realizado, e entre as concepções probabilísticas abordadas; **descobrimo a senha**⁴ objetivando realizar a análise das possíveis senhas (análise combinatória) e observar que por meio dessa análise as chances de vencer o jogo são maiores, ou seja, que a análise das possibilidades em situações de jogo é uma estratégia importante para vencê-lo; **a corrida de cavalos**⁵ com a pretensão de promover, em contexto de jogo, reflexões sobre a análise de possibilidades, a medida de chance e a sorte; vivenciar situação em que diferentes concepções probabilísticas, formal, clássica, frequentista e subjetivista, se confrontam. Para realização das mesmas, os participantes serão organizados em pequenos grupos e vivenciarão um ambiente de aprendizagem dividido em três fases,

¹ Entendemos tarefas como um problema ou “atividade em que os estudantes não tenham nenhum método ou regra já recebidos ou memorizados nem haja um método “correto” específico de solução”. (Hiebert et al., 1997, apud VAN DE WALLE, 2009, p. 57)

² Adaptada de Fernandes e Barros (2005).

³ Tarefa adaptada de Lopes (2003)

⁴ Tarefa adaptada de Macedo, Petty e Passos (1997).

⁵ Tarefa adaptada de Skovsmose (2008).

como sugerido por Van de Walle (2009); a fase do “antes” — apresentação da tarefa; a fase do “durante” — realização da tarefa; e a fase do “depois” — socialização das conclusões dos grupos.

- Ao final, será proposta uma análise crítica, por parte dos participantes, em relação às tarefas realizadas, suas potencialidades em contexto de sala de aula. É por meio das análises e reflexões que o pensamento probabilístico e combinatório se desenvolve.

A última fase do ambiente de aprendizagem, a socialização, é muito importante, pois possibilita que os participantes apresentem suas ideias acerca das tarefas desenvolvidas, ideias que podem ser validada, ou refutada pelos outros participantes. As considerações dos participantes estarão associadas às respostas dadas por alunos, em pesquisa, às tarefas desenvolvidas na oficina.

Pretende-se com essa oficina que os professores percebam o movimento que há entre as concepções probabilísticas, a importância do trabalho concomitante entre probabilidade e análise combinatória e que o desenvolvimento do pensamento probabilístico e combinatório se dá por meio de situações de ensino que possibilitam que os alunos expressem e contrastem suas ideias com as dos colegas, experimentem e vivenciem situações diversas em que medida de chance, análise de possibilidades, linguagem estocástica e jogos sejam abordados.

Referências bibliográficas

- Brasil. *Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- Carvalho, Rosália P. F. *Formação de Conceitos Probabilísticos em crianças de 4ª série do Ensino fundamental*. Trabalho apresentado no VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (SBEM), Recife, 2004.
- Fernandes, J. A. S. *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese (Doutorado em Educação) — Universidade do Minho, Braga (Portugal), 1999.
- Fernandes, José A.; Barros, Paula M. Dificuldades em estocástica de uma futura professora do 1º e 2º ciclos do Ensino Básico. In: *Revista Portuguesa de Educação*, 2005, 18(1), pp. 117-150.
- Fonseca, Maria C. F. R. *Letramento no Brasil: habilidades matemáticas*. São Paulo: Global Editora, 2004.
- Godino, J. D.; Batanero, M. C.; Cañizares, M. J. *Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuesta curriculares*. España: Editorial Síntesis, 1996.
- Lester, Frank K. O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de matemática? A situação dos Estados Unidos. In: FERNANDES *et al.* *Resolução de problemas: processos cognitivos concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1994, p.13-31.
- Lopes, Celi E. *O Conhecimento Profissional dos Professores e suas Relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil*. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: FE/UNICAMP, 2003.
- Lopes, Celi E.; Curi, E. *Pesquisas em Educação Matemática: Um Encontro entre a teoria e a Prática*. São Carlos/SP: Pedro & João Editores, 2008.
- Macedo, L; Petty, Ana, Passos, Norimar.. *Quatro cores, senha e dominó: oficinas de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997.

- Mason, John. Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: problemas abertos, fechados e exploratórios. In ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P.; *Investigar para aprender matemática: textos selecionados*. Lisboa: GRAFIS, 1998, p. 73-88
- Sáenz Castro, César. *Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades: propuesta de un modelo didáctico*. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid, 1999.
- Santos, Jaqueline A. F. L. *O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado). Itatiba, SP: Universidade São Francisco, 2010.
- Schoenfeld, Alan. Por que toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In Abrantes, P.; Leal, L. C.; Ponte, J. P.; *Investigar para aprender matemática: textos selecionados*. Lisboa: GRAFIS, 1998, p. 61-71.
- Skovsmose, Ole. *Desafios da reflexão em educação matemática crítica*. Campinas/SP: Papyrus, 2008.
- Shaughnessy, J. Michel Research in probability and statistics: reflections and directions. In Grouws, D. A. (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. USA: NCTM, 1992.
- Van de Walle, John, A. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Informação geral	
Título do oficina – O desenvolvimento do pensamento probabilístico e combinatório no contexto de sala de aula	
Nome dos autores – Jaqueline Ap. Foratto Lixandrão Santos e Cristiane Guerra dos Santos Gomide	
Instituições dos autores – Universidade São Francisco – USF/Itatiba - SP	
País ou países dos autores - Brasil	
Número de horas	2 horas
Nível de escolarização para o qual será dirigido o Painel (Educação Infantil/Preescolar, Anos iniciais do Ensino Fundamental/Primária, Anos finais do Ensino Fundamental/Secundária, Ensino Superior, ou geral.	Educação Infantil, anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e Médio.
Número máximo de pessoas.	30 pessoas
Equipamentos audiovisuais ou informáticos necessários (Projetor multimídia, TV grande, laboratório de informática, conexão à internet)	Projetor multimídia