

CURRÍCULO DE MATEMÁTICA: PROPOSTAS PARA O ENSINO DE FRAÇÃO.

Angélica da Fontoura Garcia **Silva**
Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN
Brasil
angelicafontoura@gmail.com

Tânia Maria Mendonça Campos
Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN
Brasil
taniammcampos@hotmail.com

Raquel Factori Canova
Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN-
Brasil
fraquelc@yahoo.com.br

Resumo

Este estudo tem como objetivo analisar os pressupostos e diretrizes que alicerçam o atual currículo de Matemática proposto para o estado de São Paulo, Brasil, no que se refere a introdução do conceito frações. Tal finalidade é identificar a relação das indicações propostas pelo movimento de implementação curricular e resultados de pesquisas que tratam da mesma temática. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica e a análise será feita sob a luz dos princípios da Educação Matemática escolar como processo de “enculturação” proposto por Bishop (1997). Em relação às questões didáticas utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993), e estudos que categorizam os números racionais, como: Nunes (2003), Kieren (1988) e Streefland (1984). De modo geral, a análise nos permitiu verificar que tal documento incorporou partes importantes de resultados de pesquisas, mas que ainda é necessário conhecer o reflexo de tal proposta tanto no ensino como na aprendizagem.

Palavras-chave: Educação Matemática; implementação de inovações curriculares; ensino e aprendizagem; números racionais na representação fracionária; professores que ensinam matemática

1. Introdução

Nesta comunicação temos por finalidade analisar os pressupostos e diretrizes que alicerçam o atual currículo de Matemática proposto para o estado de São Paulo, Brasil, no que se refere à introdução do conceito fração com o objetivo de identificar a relação das indicações propostas pelo movimento de implementação curricular e outras orientações e pesquisas que tratam da mesma temática. Para delimitar nosso problema de pesquisa apresentaremos a relevância do tema, a fundamentação teórica que utilizaremos em nossa análise, os pressupostos do Currículo Oficial do Estado de São Paulo e os estudos que vêm sendo desenvolvidos. Em seguida apresentaremos a análise, as considerações finais e perspectivas futuras.

2. Relevância e Fundamentação Teórica

No que se refere ao objeto matemático- fração¹- observamos a existência de um grande número de pesquisas relacionadas aos problemas de seu ensino e aprendizagem. Behr et al (1983) afirma que o conceito de fração é uma das ideias matemáticas mais complexas e importantes na formação do aluno e que o seu ensino e aprendizagem envolvem três aspectos: o prático, a psicológica e à perspectiva da Matemática. Além desses importantes aspectos, evidenciamos que vários pesquisadores de diversos países, como Behr, Lesh, Post e Silver 1983; Kieren, 1988, Strefland, 1984; Nunes, 2003, dentre outros apontam uma relação de problemas sérios sobre as dificuldades de aprendizagem deste assunto. No Brasil, pesquisas recentes como as de Rodrigues, 2005; Canova, 2006, Silva 2007; Damico 2007 entre outros evidenciaram dificuldades no domínio de fração tanto no ensino quanto na aprendizagem.

Quanto às pesquisas desenvolvidas no Brasil sobre a temática é importante destacar ainda, que já em 1997 Nunes e Bryant tomando como base estudos de Campos e Cols (1995), sinalizavam que havia uma forte tendência por parte dos professores no sentido de trabalhar o conceito de número racional em sua representação fracionária, utilizando prioritariamente o significado parte-todo. Esse fato também é discutido em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997).

Estes mesmos documentos indicam como objetivos do ensino de Matemática no segundo ciclo do Ensino Fundamental (3.^a e 4.^a séries ou 4^o e 5^o anos): “Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social” (p. 55) e “resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais” (p. 56).

Ainda, segundo estas orientações há também uma preocupação com a compreensão de alguns dos significados do número racional – quociente, parte-todo e razão –, além de destacar a importância do trabalho com suas representações: fracionária e decimal (p. 54).

Quanto os pressupostos que embasam o currículo proposto para o estado de São Paulo, nos apoiamos nos princípios da Educação Matemática escolar como processo de “enculturação” proposto por Bishop (1997). Seus estudos apontam a necessidade de que os currículos de Matemática incluam um enfoque cultural caracterizado a partir de cinco princípios básicos

- ✓ O princípio da Representatividade: pressupõe a reapresentação da cultura Matemática tanto na perspectiva de seus valores como de sua tecnologia simbólica
- ✓ O princípio da Acessibilidade: pressupõe que os conteúdos curriculares não podem estar fora das capacidades intelectuais dos alunos
- ✓ O princípio do Poder Explicativo: caracteriza da matemática como fenômeno cultural, a qual possibilita o entendimento do cotidiano.

¹ Neste artigo utilizaremos o termo fração para designar a representação fracionária dos Números Racionais.

✓ O princípio do formalismo: defende que um currículo deve objetivar o nível formal da cultura matemática, mostrando as conexões com o nível informal, ou seja, a conexão com o cotidiano e outras áreas do conhecimento.

✓ O princípio da Visão Ampla e Elementar. Considera importante o trabalho com as ideias mais amplas ao invés de aprofundar em uma única ideia. Contrapõe-se ao ensino de matemática que foca na concepção da matemática como técnica e especialista dos conteúdos.

Bishop (1997) considera que os currículos deveriam ser concebidos a fim de proporcionar o equilíbrio dos valores associados ao saber matemático, ou seja, presente o processo de “enculturação”.

Neste estudo para realizar a análise das orientações oficiais apresentadas no Caderno do Professor² apoiamos-nos ainda tanto na teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993), como nos estudos acima indicados sobre frações.

Vergnaud (1993) que se define o conceito de fração a partir da terna (S,I,R), sejam: o conjunto das situações, dos invariantes que definem o conceito e o conjunto da representação, aquele que é utilizado para dar diferentes “formas” a fração.

Com base nas ideias de Vergnaud (1993), Nunes (2003) propõe que sejam considerados os invariantes: ordem e equivalência; situações que pretendem dar significados a fração e as representações possíveis.

Vale ressaltar que nesta comunicação faremos análise tanto de situações parte-todo e medida como do invariante equivalência, já que este último é considerado pelo currículo oficial do estado de São Paulo como uma das ideias fundamentais que devem ser exploradas.

As situações parte-todo são encontradas facilmente nos materiais didáticos e em sala de aula. Explora a ideia de dividir uma quantidade em subpartes de tamanhos iguais. A fração indica o número de partes tomadas, indicadas, do total de partes divididas.

As situações medida traz a ideia de comparação entre duas grandezas, por exemplo, quantos azulejos são necessários para cobrir a superfície de uma parede. Estudos como os de Caraça (1952), por exemplo, considera que há necessidade de que se estabeleça um termo de comparação único para todas as grandezas de mesma espécie. A esse número o autor chama de medida da grandeza em relação a essa unidade.

2.21 Processo De Implementação Do Currículo Oficial Do Estado De São Paulo

O novo currículo, intitulado inicialmente por Proposta Curricular do Estado de São Paulo, e desde o ano de 2009 como Currículo do Estado de São Paulo, divide o ensino em quatro áreas

2 Cadernos do Professor – materiais de apoio ao currículo contendo indicações ao professor.

do conhecimento: Ciências Humanas e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; e Matemática e suas Tecnologias. Para cada área/disciplina foi elaborado e distribuído a todo professor o documento base Proposta Curricular, o qual apresenta os princípios e finalidades do novo currículo, como também as orientações gerais para sua implementação e aplicação.

Na implementação do novo currículo temos também:

✓ Cadernos do Professor – materiais de apoio às atividades do professor, organizados por bimestre e disciplina, que indicam as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos em cada tema ou tópico dos conteúdos, e apresentam situações de aprendizagem com orientações metodológicas e sugestões de aulas, de materiais complementares, de avaliação e de recuperação. e

✓ Caderno do Aluno, a partir de 2009 – complemento do Caderno do Professor, específico por disciplinas e por bimestre (ou volume), é um material que tem a referência pessoal do aluno, cuja intenção, segundo a Secretaria é a de facilitar o processo de ensino e aprendizagem.

Observa-se que nas diretrizes apresentadas no atual currículo há uma incorporação dos objetivos de documentos oficiais brasileiros tanto os nacionais como os estaduais. No âmbito estadual observa-se a ligação com a Proposta anterior de São Paulo (1988), no que se refere à preparação do aluno como cidadão, ao papel da disciplina Matemática como preparação do aluno para a leitura prática do cotidiano e ao seu desenvolvimento cognitivo. No âmbito federal há uma incorporação de ideias como a exploração dos significados, preocupação com uma formação mais completa do aluno, salientado o papel do desenvolvimento de “atitudes” que devem estar presentes nos currículos e reforçando a centralidade no aluno e, portanto nos processos de ensino e aprendizagem.

A antiga proposta curricular de Matemática de 2008, afirma que a Matemática é um dos meios em que o aluno desenvolve suas competências. É possível compreender melhor a realidade, desenvolver o raciocínio lógico e elaborar conclusões. Considera também que “o papel da matemática é facilmente compreensível e, sem dúvida, fundamental” (p.42).

É importante salientar, que documentos federais, os quais este currículo se apóia PCN³ indicam a função social da matemática no currículo, ou seja considera que “a matemática nos currículos está longe de representar um conteúdo destinado apenas a especialistas ou a pessoas com dons especiais”(p. 44)

Quanto aos conteúdos do Ensino Fundamental e do Médio observamos, num primeiro momento que o elenco de conteúdos não se diferencia de forma substancial do que culturalmente é ensinado para este nível de ensino. Tais conteúdos foram distribuídos em quatro blocos temáticos: Números, Geometria, Medidas e Tratamento da Informação, no qual cada um está presente direta ou indiretamente na lista dos conteúdos.

³ O documento oficial que apresenta no âmbito federal parâmetros para os currículos brasileiros, PCN (1997), indica que “a Matemática pode e deve estar ao alcance de todos e a garantia de sua aprendizagem deve ser meta prioritária do trabalho docente” (p.40)

Ainda com relação ao conteúdo é importante destacar que o mesmo se propõe a explorar “ideias fundamentais” no desenvolvimento das diferentes temáticas. O documento base - Proposta Curricular indica as ideias : proporcionalidade, equivalência, ordem e aproximação como as fundamentais as quais detalharemos a seguir.

A ideia proporcionalidade, apresentam-se, no geral no raciocínio analógico, e a encontramos nos temas como frações, razões e proporções, estudo da semelhança de figuras, grandezas diretamente proporcionais que guia todo o trabalho com funções do primeiro grau dentre outras. Já, se nos referenciarmos no conteúdo observamos que a noção de número, por exemplo, é construída a partir de duas ideias fundamentais: a de equivalência e a de ordem. Outro exemplo destacado, é a importância das aproximações quando tratamos dos números irracionais, por exemplo, que somente existem principalmente nos computadores, por meio de suas aproximações lineares

Enfim, analisando o desenvolvimento dos conteúdos notamos que mesmo havendo um elenco próximo ao que normalmente é desenvolvido em sala de aula há uma busca de aproximação entre o conteúdo escolar e o universo da cultura matemática..

3. Procedimentos Metodológicos

Como metodologia, este estudo se apóia fortemente numa pesquisa bibliográfica com a finalidade de analisar os pressupostos e diretrizes que alicerçam o atual currículo de Matemática proposto para o estado de São Paulo, Brasil, no que se refere a introdução do conceito frações. Tal procedimento objetiva identificar a relação das indicações propostas pelo movimento de implementação curricular e outras orientações e pesquisas que tratam da mesma temática. Para atingirmos este objetivo investigamos estudos e pesquisas que tratam da temática: ensino e aprendizagem de frações, as orientações contidas no Currículo de São Paulo e mais especificamente no material de apoio Caderno do Professor.

4. Síntese das análises

O material de apoio destinado a professores “Caderno do Professor” propõe que uma primeira abordagem ao tema frações seja no 1º- bimestre da 6º ano/5ª série, segmento esse que trabalha com crianças de 11 e 12 anos de idade. A introdução dos números racionais foi projetado utilizando a proposta de se iniciar o trabalho com os números racionais na representação fracionária- frações por meio da relação com a medida.

Todavia, convém destacar que tal documento considera que “nas séries anteriores, os alunos já tiveram um primeiro contato com os números naturais e suas operações básicas, além da representação fracionária”. (São Paulo, 2009, p.9).

Nesse sentido, as orientações contidas no Caderno do Professor indicam ao docente que leciona para este segmento que retome o assunto proporcionando ao aluno uma ampliação do seu conhecimento em relação a esses números. Chama a atenção para o fato de que os professores precisam estar atentos a necessidade de desenvolver habilidades que permitam aos estudantes, entre outras coisas, “reconhecer a diferença entre os números naturais, diretamente
XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

ligados à ideia de contagem e ordenação, e os números fracionários, relacionados aos processos de medida” (São Paulo, 2009, p.9).

Assim, tal documento sugere ao professor que inicie esta unidade fazendo um diagnóstico preliminar, para avaliar o conhecimento da turma sobre frações, como indicado a seguir:

Se for preciso, encaminhe algumas atividades para garantir o domínio de algumas noções básicas, tais como:

- ▶ o significado dos termos “numerador” e “denominador”;
- ▶ a nomenclatura correta das frações (terços, décimos, avos, etc.);
- ▶ a representação da relação parte/todo de uma figura por meio de uma fração.

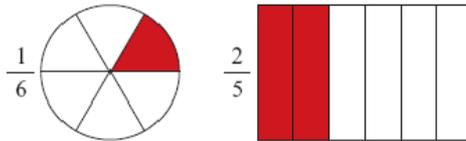


Figura 1: São Paulo 2009, p.35.

Analisando tal proposta observamos que a primeira preocupação é verificar e garantir por parte do aluno o domínio dos termos numerador e denominador, a nomenclatura e o domínio da representação parte/todo de uma figura.

Em uma primeira análise, tal diagnóstico está em consonância com resultados de pesquisas. Quanto a este fato é importante ressaltar que Nunes e Bryant (1997), tomando como base estudos de Campos e Cols (1995), já sinalizavam que havia uma forte tendência por parte dos professores no sentido de trabalhar o conceito de número racional em sua representação fracionária, utilizando prioritariamente o significado parte-todo. Esse fato também é discutido em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997) e recentemente, comprovado por estudos como os de Silva (2007), Campos et al. (2006) e Canova (2006) dentre outros.

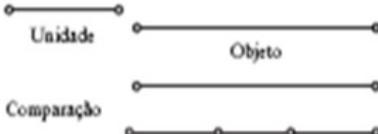
Todavia chamamos a atenção para o fato de que outras orientações oficiais, só que no âmbito federal, as contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais –PCN- propõem que sejam trabalhados a “*exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte-todo, quociente e razão*” (Brasil, 1997, p.59). Em uma primeira análise tal dado não foi considerado neste diagnóstico inicial.

O documento estadual- Caderno do Professor- sugere a passagem dos naturais para os racionais já no primeiro bimestre na “Situação de Aprendizagem 3”⁴. As orientações contidas no material de apoio reiteram que a temática frações deve ser ampliada utilizando outras formas de representação, como números mistos e porcentagem, todavia chama a atenção para o fato de que o foco principal é a relação entre as frações e os processos de medida. O que nos mostra coerência com o diagnóstico sugerido pelos autores do material.

Assim a primeira atividade proposta nesta “situação de aprendizagem” é um encaminhamento de aula que trata da relação entre os processos de medida e a notação fracionária. Segundo este mesmo documento a finalidade é “reforçar a ideia de que, do mesmo modo que os números naturais são usados para representar os processos de contagem, as frações constituem um modelo numérico adequado para representar os processos de medida” (São Paulo, 2009, p.35).

Em seguida Caderno do Professor apresenta algumas sugestões de atividades e um texto orientador para o trabalho com frações e medidas.

O caso mais simples ocorre quando o objeto-padrão cabe um número inteiro de vezes dentro do objeto. Veja o exemplo a seguir:



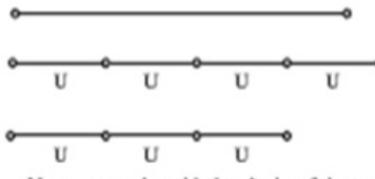
Comparando o comprimento do objeto com o comprimento da unidade, verifica-se que a mesma cabe exatamente três vezes no objeto, ou, dito de outra forma, o objeto mede três unidades. Essa medida pode ser expressa tanto pelo quociente $3 \div 1$, como pelo número natural 3.

A expressão numérica da medida está diretamente relacionada à unidade-padrão adotada. Outra unidade de medida poderia ser obtida subdividindo-se a unidade anterior em três partes iguais (terço da unidade). Nesse caso, teríamos a seguinte situação:



Em relação à nova unidade adotada, o objeto mede nove unidades, ou seja, nove terços da unidade original. Vemos que o resultado da medição em relação à unidade original pode ser expresso tanto pelo quociente $9 \div 3$, como pelo número natural 3.

O problema é que, na maioria das vezes, a medida do objeto não corresponde a um múltiplo inteiro do padrão escolhido, levando à necessidade de quebra ou fracionamento da unidade. A figura a seguir mostra uma situação em que a unidade não cabe um número inteiro de vezes no objeto.



Nesse caso, três unidades são insuficientes para medir o objeto, e quatro unidades excedem o comprimento total do objeto. A solução é fracionar a unidade em partes iguais, de tal modo que a nova unidade caiba um número inteiro de vezes no objeto. Nesse caso, em particular, bastou dividir a unidade em três partes

Figura 2: São Paulo 2009, p.36.

⁴ O documento base denominado Proposta Curricular define currículo “como a expressão de tudo o que existe na cultura científica, artística e humanista” complementa afirmando que tal “expressão” é transposta para uma **situação de aprendizagem** e ensino (São Paulo, 2008, p.13)

Observamos aqui que tais indicações parecem sofrer influência do que foi proposto por Caraça (1952)⁵. Procura-se uma resposta para a pergunta – quantas vezes? – o que se responde por meio de um número que exprima o resultado da comparação, ou seja, a esse número denomina-se medida da grandeza em relação a essa unidade.

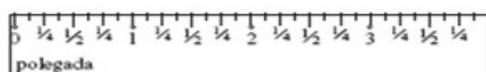
Assim, é importante ressaltar o destaque dado ao fato de que as medidas desempenham um importante papel na ampliação do campo numérico dos estudantes– dos naturais para os racionais.

A primeira atividade da Situação de Aprendizagem 3 propõe que o professor explore as ideias discutidas nas atividades que já realiza com os alunos, como, por exemplo, em frações equivalentes, comparação de frações com mesmo denominador ou denominadores diferentes, etc.

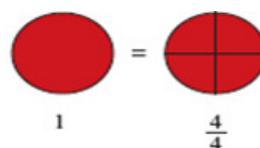
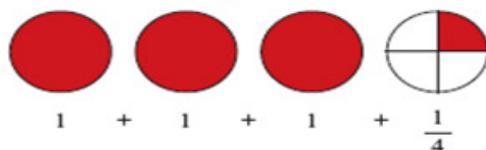
Números mistos e medidas

Atividade 1

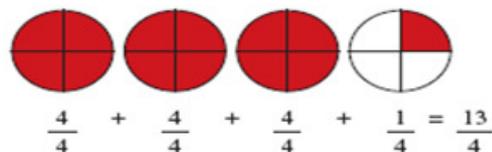
Ainda hoje, alguns sistemas de medida utilizam frações, como no caso da polegada. Algumas régua graduadas em polegadas usam uma notação que mistura números naturais com frações para indicar determinadas medidas não inteiras. Esse tipo de notação é chamado de **número misto**.



A leitura da medida em polegadas de um determinado objeto pode ser uma atividade bastante proveitosa para que os alunos entendam o significado de um número misto. Se a régua acusar uma medida de $3\frac{1}{4}$ (lê-se três inteiros e um quarto, ou três e um quarto), significa que o objeto medido corresponde a 3 polegadas inteiras mais $\frac{1}{4}$ de polegada. Geometricamente, esse número pode ser representado por meio das figuras abaixo:



As figuras anteriores mostram três círculos inteiros mais um quarto de círculo. Como um inteiro equivale a quatro quartos, temos que:



Então, o número misto $3\frac{1}{4}$ pode ser escrito como a soma de três parcelas de quatro quartos mais uma parcela de um quarto, que resulta em treze quartos. É importante frisar que a fração $\frac{13}{4}$ não representa apenas uma parte do todo, mas a medida de algo que é maior que o todo. A conversão de números mistos em frações deve ser explorada em casos simples, sem o uso de regras.

Figura 3: São Paulo 2009, p.37.

⁵ Para Caraça (1952) é necessário que se estabeleça um termo de comparação único para todas as grandezas de mesma espécie; ou seja, uma unidade de medida como, por exemplo, centímetros para comprimentos; gramas para peso; segundos para tempo etc.

Na segunda atividade desta mesma “Situação de Aprendizagem”, propõe-se ao aluno que determine a medida em polegadas de alguns objetos, apresentando uma régua graduada em inteiros, meios, quartos e oitavos de polegada:

a) Caneta

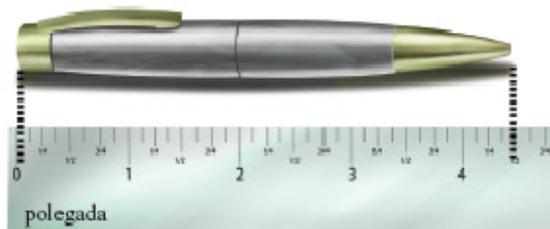


Figura 4: São Paulo 2009, p.38.

Tais propostas são complementadas pela atividade 3. Nesta atividade há indicações para que o professor peça ao aluno que efetue medidas de diferentes objetos, adotando um objeto-padrão não convencional como unidade, ou seja, medir o comprimento de um livro usando um lápis, por exemplo. Ainda segundo o material a finalidade de tal encaminhamento é:

levar os alunos a se deparar com a necessidade do fracionamento de uma unidade em um processo de medida. Eles devem perceber que as frações e os números mistos permitem expressar medidas em que a unidade não cabe um número inteiro de vezes no objeto a ser medido. (São Paulo, 2009, p.38)

Em seguida, apresenta-se a situação de aprendizagem 4 que, segundo o documento utilizará como base. Assim, ao final da Situação 3 indica-se os principais objetivos da proposta, qual seja,

Compreender o significado dos termos numerador e denominador de uma fração.
Saber nomear uma fração usando a nomenclatura adequada.
Compreender a base dos processos de medida (comparação entre grandezas de mesma natureza) e relacioná-los com a representação fracionária.
Compreender o significado de um número misto e saber transformá-lo em uma fração. (São Paulo. 2009,p.39)

Tais indicações são ampliadas na última Situação de Aprendizagem. Esta aprofundará a ideia de equivalência de frações indicando propostas que desenvolvam tanto a ideia de equivalência e ordem para comparar frações assim como a das operações com frações- as quais farão uso da equivalência.

Para esta abordagem propõe-se encaminhar as atividades com foco na interface entre a Matemática e a língua materna. Assim, orienta o material, “o significado das operações e o princípio de equivalência são construídos a partir da ‘tradução’ da notação fracionária para a linguagem mista, parte numérica, parte literal”

Chama a atenção também para o fato de que o foco é operar com frações equivalentes utilizando procedimentos similares aos utilizado com a operação envolvendo números naturais. Tal encaminhamento pretende levar o aluno tanto a compreender o significado do cálculo da fração de um número natural como a compreender o significado e saber realizar operações de adição e subtração de frações.

Finalmente chama a atenção para o fato das propostas contidas no material não ter a intenção de esgotar o conteúdo frações para esta série e caberá ao professor propor outras atividades complementares ou mesmo, adequar as indicadas no material de acordo com o perfil de cada turma.

5. Considerações finais e perspectivas futuras

As novas propostas de trabalho para o Currículo do estado de São Paulo sofreram modificações. Acreditamos que muitos resultados de estudos foram considerados, destacando a introdução do conceito de fração que por muitos anos foi apresentada, não só em documentos oficiais mas como também em materiais pedagógicos explorando a ideia de parte-todo. Nesse novo documento a proposta inicial traz ideias de Caraça, assim como de outros pesquisadores, e no decorrer do material encontramos diferentes abordagens não encontrada anteriormente. O enfoque com o trabalho de equivalencia também aparece muito forte o que reporta influências de pesquisas, como por exemplo de Nunes que em vários estudos aponta a importância de explorar as lógicas das frações (equivalencia e ordem) .

Por outro lado o invariante ordem, que tem tamanha importancia quanto a equivalencia, não tem um espaço significativo explicito. Pode-se esperar que o professor, em suas atividades utilizadas na complementação de tal material, aborde e trabalho com esse invariante. A fração por ser um conceito já rotulado, tanto no ensino como na aprendizagem, como um assunto de difícil compreensão, a abordagem do invariante ordem no material seria muito oportuno e importante.

É importante salientar que os resultados apresentados nesta comunicação não envolvem a análise “in loco” das práticas dos professores envolvidos no movimento de reformulação curricular. Procuramos responder nossa questão por meio da análise dos documentos. Portanto, consideramos importante que estudos posteriores analisem se tal proposta de ensino foi bem recebida ou não. Se os professores adquiriram tal proposta como será que acontece as discussões e reflexão- se é que acontece. Essa questão pode se dar tanto em cursos de formação inicial quanto em formação continuada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bishop, Alan J.(1997) *Mathematical Enculturation: A Cultural perspective on Mathematics Education*. Cambridge, UK, Third printing.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., Silver, e. A. (1983) *Rational Numbers Concepts*, in *Acquisition of Mathematics Concepts and Process*, Ed by Richard Lesh e Marsha Landau, Londres.

Brasil Parâmetros Curriculares Nacionais.: *Matemática (1997)*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF.

Campos, T.; et al. (1995). *Lógica das equivalências*. Relatório de pesquisa não publicado. São Paulo: PUC.

XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

Campos T.; Magina, S. (2006). Primary school teachers' concepts of fractions and teaching strategies. ICME 10. Copenhagen. Disponível em: www.icmeorganisers.dk/tsg22/campos%20and%20magina.doc. Acesso em: jan. 2005.

Canova, R.F. (2006). Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do ensino fundamental com relação à fração. Dissertação de mestrado, PUC/SP, São Paulo.

Caraça, B. J. (1952). Conceitos fundamentais da Matemática – Tipografia Matemática, Lisboa.

Damico, A. (2007). Uma investigação sobre a formação inicial de Professores de Matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental Tese de Doutorado, PUC/SP, São Paulo.

Kieren, T.(1988). Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development .In: J Hiebert and M. Behr (eds.) Number Concepts and Operations in the Middle Grades (pp.162-80). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Nunes, T.(2003) Crianças Fazendo Matemática, Porto Alegre – Editora Artes Médicas.

Rodrigues, W. R. (2005), Números Racionais: um estudo das concepções dos alunos após o estudo formal., Dissertação de mestrado em elaboração, PUC-SP.

São Paulo (Estado).(2008) Secretaria de Estado da Educação. Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática. Coordenação Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008a.

_____.(2009). Caderno do professor: matemática, ensino médio – 5ª série/6º ano 1º bimestre. Coordenação Maria Inês Fini; equipe: Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Granja, José Luiz Pastore Mello, Roberto Perides Moisés e Walter Spinelli. São Paulo: SEE,.

Silva, Angélica da Fontoura Garcia.(2007). O Desafio do Desenvolvimento Profissional Docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica. São Paulo.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. (Towards . . . A theory) Part 1: Reflections on a teaching experiment. Educational Studies in Mathematics, 15, 327-348.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, pp. 1-26.