XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

La investigación matemática a través de la modelización de problemas

Lina Mónica **Oviedo**
Facultad de Ingeniería Química-Facultad de Bioquímica y Ciencias Bioloógicas, U.N.L.
República Argentina
loviedo@fiq.unl.edu.ar
Ana María **Kanashiro**
Facultad de Ingeniería Química, U.N.L.
República Argentina
akanshi@fiq.unl.edu.ar
Mónica Patricia **Benzaquen**
Escuela de Enseñanza Media Particular Incorporada N° 8106 “Don Bosco” de Santa Fe
República Argentina
mpbenzaquen@ciudad.com.ar
Mónica Beatriz **Gorrochategui**
Escuela de Enseñanza Media Particular Incorporada N° 8106 “Don Bosco” de Santa Fe
República Argentina
licmonigorrochategui@gmail.com

Resumen

Durante los últimos seis años hemos llevado a cabo en el marco de dos proyectos de investigación (CAID 2005, CAID 2009) diferentes propuestas didácticas tendientes a guiar esa sociedad tan particular como los es “la clase de matemática” y ayudar al alumno a “hacer matemática”.

Los alumnos por lo general presentan dificultades derivadas de distinguir y coordinar entre los diferentes registros de representación tan necesarios para el desarrollo del pensamiento y por lo general sus respuestas quedan en el registro en que fueron presentados los problemas.

En este taller presentamos una propuesta didáctica para desarrollar la coordinación de los registros de representación que ayuden a los alumnos a superar las dificultades detectadas. En una primera etapa se desarrollan actividades con funciones escalares (lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas) para luego proponer la elaboración de modelos matemáticos sencillos que involucran temas de economía, física, química, etc. Las guías de trabajo están diseñadas para ser utilizadas directamente en el aula.

Palabras clave: Función, Modelos Matemáticos, Problemas, Didáctica, Representación, Registros.

Introducción

Según (Godino, & Batanero, 1995) desde un punto de vista epistemológico y psicológico se considera que la matemática:

1. es una actividad humana que se interesa por la resolución de situaciones problemáticas, ya sean del mundo físico, social o del propio dominio de la misma. Como respuestas a estos problemas emergen los objetos matemáticos, los cuales evolucionan progresivamente. Por tanto, son los actos de las personas la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas, acorde con las teorías constructivistas Piagetianas.
2. constituye un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones - problemas y las soluciones encontradas. Los sistemas de símbolos, dados por la cultura, tienen una función comunicativa y un papel instrumental ya que cambian a las propias personas que utilizan los símbolos como mediadores, acordes a la teoría psicológica de Vigotsky y semiótica de Rotman.
3. constituye un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido. Los objetos matemáticos son entidades culturales cuya naturaleza sistémica y compleja no puede ser descrita meramente por definiciones formales cuando nos interesamos por los procesos de enseñanza y aprendizaje de los mismos.

Por lo tanto la matemática constituye una realidad cultural constituida por conceptos, proposiciones, teorías, etc. (los objetos matemáticos) y cuya significación personal e institucional está íntimamente ligada a los sistemas de prácticas realizadas para la resolución de situaciones problemáticas.

La Matemática, durante mucho tiempo ha tenido la misión de desarrollar el pensamiento lógico, algorítmico y heurístico. Con el desarrollo científico-tecnológico, además de su misión histórica deberá desarrollar en las personas el "pensamiento de modelación", es decir que éstos sean capaces de elaborar modelos matemáticos de los objetos estudiados por las diferentes ramas de la ciencia y la técnica.

Los resultados esperados son: Para enseñar Matemática se requiere de un sólido dominio científico y también se debe poder hacer uso de aquellas técnicas que surgen del análisis de los fenómenos didácticos y que favorecen el proceso de aprendizaje.

La premisa fundamental de esta disciplina es el estudio de los procesos de transmisión, adquisición y construcción de los diferentes contenidos matemáticos en la situación de enseñanza y cuando nos referimos a esta situación involucramos a la enseñanza de la matemática en todos los niveles. La didáctica de la matemática se propone describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre enseñanza y aprendizaje del saber matemático.

La búsqueda no debe reducirse, sólo, a encontrar una buena manera de enseñar una noción previamente fijada, sino que el objeto de estudio debe ser la organización de una actividad cuyo propósito sea el aprendizaje de un cierto saber, no importando si esta actividad se ve desviada de su objetivo inicial ya que la investigación en el campo de la didáctica se propone transformar al sistema educativo en un sistema benéfico, a saber: mejorar los métodos y los contenidos de la enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de los sistemas didácticos asegurando entre los alumnos la construcción de un saber dinámico, susceptible de cambio y funcional, que permita resolver problemas, plantear buenas preguntas y nuevas situaciones problemáticas.

Objetivos

Generales

Ofrecer a los docentes:

- Una propuesta de elaboración de la construcción de modelos.
- Trabajar con distintos tipos de modelos matemáticos desde las ciencias naturales, sociales, etc.

Específicos

- Proponer pautas para la construcción de un modelo mediante situaciones problemáticas sencillas.
- Discutir la utilización de los mismos en el aula.
- Seleccionar distintas actividades en donde se utilicen modelos.

Contenidos

Funciones numéricas. Funciones Lineales. Función cuadrática. Funciones exponenciales y logarítmicas. Modelos. Modelos matemáticos, económicos, etc.

Destinatarios

Docentes de nivel medio. Estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática.

Ejemplo de actividad

Funciones exponenciales. Logaritmos. Funciones logarítmicas.

Funciones exponenciales

Existen en la naturaleza y en la vida social fenómenos en los que el ritmo de variación es proporcional al valor en cada instante. Como ejemplo de estos fenómenos podemos citar, la velocidad a la que se reproducen las bacterias, la desintegración radiactiva, el crecimiento demográfico, el interés del dinero acumulado, etc. Para describirlos utilizaremos las **funciones exponenciales.**

Comencemos con las siguientes situaciones:

Situación 1: En una ciudad se observó que la población de mosquitos, que inicialmente se estimó en 1 millón, al encontrar condiciones favorables se reproduce duplicándose en cada mes.

a) Comencemos el estudio del fenómeno completando la siguiente tabla:

Tiempo (meses)	0	1	2	3	4	5	...	x
Número de mosquitos (en millones)	1	2						

b) ¿Cuántos mosquitos habrá al cabo de 10 meses?
c) ¿Cuántos meses habrán pasado para que haya más de 10 millones? ¿Y más de cien millones?

d) Escribe la fórmula que relaciona el número mosquitos (y) en función del tiempo (x)
e) Representa gráficamente dicha función. ¿Por qué se pueden unir los puntos?
f) Considera posible tomar valores negativos del tiempo que corresponden a los días previos al estudio del fenómeno. Por ejemplo si supones que el tiempo inicial corresponde al mes de abril de 2009, los anteriores serían: -1 (marzo de 2009), -2 (febrero de 2009), -3 (enero de 2009), etc. Calcula el número de mosquitos para algunos de ellos y represéntalos en el mismo gráfico construido en e)
g) ¿Qué sucede con los valores que va tomando "**y**" a medida que "**x**" crece? ¿Es una función creciente o decreciente?
h) ¿Cuál es su dominio? ¿Y su imagen?
i) ¿Es una función continua? ¿Por qué?

Situación 2: Las sustancias radiactivas se desintegran transformándose en otras sustancias al paso del tiempo. El proceso de desintegración ocurre con mayor o menor rapidez de acuerdo a la sustancia. Si la masa inicial de cierta sustancia es de 1 kg y se desintegra reduciéndose a la mitad cada año:

a) Averigua qué cantidad de sustancia radiactiva queda al cabo del tiempo, para ello es conveniente que completes la tabla siguiente

Tiempo (años)	0	1	2	3	4	5	...	X
Masa de la sustancia (kg)	1							

b) ¿Cuál será la masa de la sustancia al cabo de 10 años?
c) Escribe la fórmula que relaciona la masa de la sustancia en función del tiempo.
d) Representa gráficamente la función. ¿Por qué se pueden unir los puntos?
e) Considera posible tomar valores negativos del tiempo que corresponden a tiempos anteriores al tomado como inicial. Por ejemplo puedes suponer que el tiempo inicial fue el año 2009, así los anteriores serían -1 (año 2008); -2 (año 2007), etc. Calcula la masa de la sustancia en los años: 2003, 2006 y 2008 y represéntalos en el mismo gráfico construido en d)
f) ¿Qué sucede con los valores que va tomando "**y**" a medida que "**x**" crece? ¿Es una función creciente o decreciente?
g) ¿Cuál es su dominio? ¿Y su imagen?
h) ¿Es una función continua? ¿Por qué?

En los dos ejemplos anteriores hemos encontrado una función en las que la variable independiente aparece como exponente. Esta función se denomina función exponencial

Una función exponencial es de la forma $y = a^x$ donde "a" debe ser un número real positivo y distinto de uno.

Situación 3:¿Qué pasaría si a <0? ¿y si a =1?

Situación 4: Representa en una misma gráfica las funciones: $y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^4$ e $y = 2^x$, para $x > 0$.

Observa que todas son crecientes, pero ¿cuál lo hace más rápidamente?

Situación 5: Representa en una misma gráfica las funciones $y = 3^x$ (a>1) $y= \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (0<a<1) y completa para cada una las siguientes oraciones:

$$y = 3^x$$

a) Cuando "x" aumenta, "y"…………….....
entonces la función es………………….…...

b) El dominio de la función
Dom f =………………………….........….

c) La imagen de la función
Im f =……………………………..........…

d) ¿La función corta al eje de
abscisas?…………………………………

e) ¿La función corta al eje de
ordenadas?……………………..…………

f) ¿Tiene máximo?.......................................

g) ¿Tiene mínimo?.......................................

h) ¿Es continua?...

i) ¿Es biyectiva?...

$$y= \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$$

a) Cuando "x" aumenta, "y"……..........…
entonces la función es…………….……...

b) El dominio de la función
Dom f =…………………………..…...….

c) La imagen de la función
Im f =……………………...………….…

d) ¿La función corta al eje de
abscisas?…………………………………

e) ¿La función corta al eje de
ordenadas?……………………..…………

f) ¿Tiene máximo?.......................................

g) ¿Tiene mínimo?......................................

h) ¿Es continua? ....

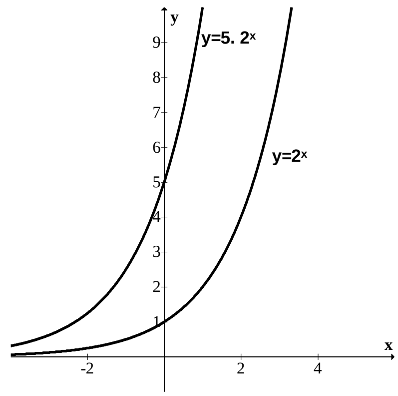
i) ¿Es biyectiva?..

Analicemos nuevamente la situación 1), pero suponiendo que la población inicial es 5 millones de mosquitos.

Si completamos la tabla, nos queda:

Tiempo (meses)	0	1	2	3	4	5	...	X
Número de mosquitos (en millones)	5 $2^0.5$	10 2.5	20 2.2.5	40 2.2.2.5	80 2.2.2.2.5	160 2.2.2.2.2.5	 …	 $2^{x.}.5$

La función será y = 5. 2 x donde cada ordenada de la función y = 2 x está multiplicada por 5. Observemos el comportamiento de ambas funciones en el siguiente gráfico.



Bibliografía y referencias

Benzaquen, M., Gorrochategui, M. & Oviedo, L. (2009). *La exploración matemática a través de modelos matemáticos*. Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral.

Godino, J. & Batanero, C. (1995). Contenidos teóricos y metodológicos para la formación de investigadores en didáctica de las matemáticas. *Proceedings of Nordic symposium, preparation of researchers in mathematics education.* (pp. 57-71). Suecia: Universidad de Umea.

Lacasta Zabalza, E. (2000). Determinación de concepciones y funcionamiento del gráfico cartesiano de funciones: problemática didáctica. *Proceedings of the XIV Jornadas del Seminario Interuniversitario en Didáctica de Las Matemáticas (SIIDM)*, http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/ComLacasta.htm

Stewart, J., Hernández, R. & Sanmiguel, C. (2007). *Introducción al cálculo* (3a.ed.). Buenos Aires: Thomson Learning Argentina.