XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

# Multiplicação e Divisão de inteiros a partir dos trabalhos de Descartes e de Hilbert

Regina Célia Guapo **Pasquini**
Universidade Estadual de Londrina
Brasil
rcgpasq@uel.br
Márcia Cristina de Costa Trindade **Cyrino**
Universidade Estadual de Londrina
Brasil
marciacyrino@uel.br

## Resumo

Com base em estudos que realizamos sobre a participação da história na educação matemática de futuros profesores de matemática, e a partir dos desconfortos enfrentados em situações de ensino para tratar do conjunto dos números inteiros, com foco nas operações de multiplicação e divisão, apresentamos uma proposta para o trabalho integrado deste tema com história da matemática. A proposta foi elaborada a partir dos trabalhos de Descartes e de Hilbert que propõe uma construção geométrica envolvendo as operações com inteiros a partir de segmentos. Considerando as ideias desses dois grandes matemáticos, temos oportunidade de discutir um significado para as operações e para regra dos sinais, bem como sobre o papel da história na educação matemática de futuros professores.

Palavras-chave: educação matemática, números inteiros, regras dos sinais

## Introdução

A História da Matemática na educação matemática tem sido alvo de diversos pesquisadores entre eles, historiadores da matemática, educadores matemáticos e matemáticos.

Particularmente temos investigado possíveis modos de relacionar o desenvolvimento histórico de um determinado conhecimento matemático e a constituição ou apropriação deste por futuros professores de Matemática. A questão básica assumida refere-se ao modo de se conceber a relação entre a cultura matemática (cultura entendida como o conjunto de formas simbólicas até hoje produzidas) e as formas de apropriação dessa cultura no presente (Miguel; Miorim, 2004), ou seja, os vínculos que podem ser promovidos entre filogênese (a produção sóciohistórica do conhecimento) e a psicogênese (produção ou apropriação deste conhecimento no presente).

As análises histórico-epistemológicas permite-nos investigar relações entre os “caminhos trilhados” e os que estão sendo construídos, realça interfaces entre estes dois contextos e pode modificar qualitativamente a educação matemática de professores e futuros professores.

O modo como o professor vê a constituição (origem, natureza) dos objetos matemáticos, a sua concepção de matemática, as relações que estabelece entre a matemática e as outras áreas do conhecimento, podem ter implicações no modo como ele compreende a produção de significados, sua e de seus alunos (Cyrino, 2003), e condiciona a interpretação do desenvolvimento histórico conceitual. (Grugnetti; Rogers, 2000; D’Amore; Radford; Bangi, 2006; Radford; Boero; Vasco, 2000)

Pretendemos nesta oficina discutir algumas Tarefas elaboradas a partir as idéias contidas nos trabalhos de René Descartes e David Hilbert com a intenção de provocar reflexões sobre as “regras de sinais” nas Operações de multiplicação e divisão com Números Inteiros.

Serão realizadas construções geométricas que podem potencializar a compreensão destas regras, por parte de professores futuros professores de Matemática e, sobretudo por estudantes da Educação Básica.

O objetivo deste trabalho é discutir alguns modos de conceber a participação da história na sala de aula (vínculos entre a filogênese e psicogênese) e algumas tarefas que podem ser propostas na formação de professores de Matemática envolvendo Operações de multiplicação e divisão com Segmentos e Números Inteiros, numa perspectiva histórico-epistemológica.

## A história na educação matemática: os números negativos

Existem várias maneiras de conceber a relação entre filogênese e psicogênese. Radford, Boeiro e Vasco (2000) discutem as perspectivas: de *Obstáculo Epistemológico*, *Sociocultural*, e dos “Jogos de Vozes e Ecos”. Além destas, Miguel e Miorim (2004) descrevem outras quatro, nomeadamente: *Evolucionista Linear*; *Estrutural-Construtivista Operatória*; *Evolutiva Descontínua* e a perspectiva proposta por eles de uma *História Pedagogicamente Vetorizada*, que defende uma concepção orgânica da participação da história na produção do saber docente por meio da problematização.

Para cada pesperctiva citada acima, o modo como se aprende Matemática e a natureza do conhecimento matemático possui diferentes concepções. Algumas sustentam o argumento recapitulacionista, mas cada uma explica à sua maneira como se dá essa recapitulação. Uma dessas perspectivas considera que para se compreender algum conceito no presente é importante percorrer as mesmas etapas do desenvolvimento conceitual deste conceito, ou ao menos ter contato com algumas dificuldades que a humanidade teve ao desenvolvê-lo. Em outras palavras, o argumento recapitulacionista sugere um paralelismo entre a psicogênese e a filogênese, ou ainda, que o desenvolvimento histórico pode determinar o modo de apropriação do conceito pelo estudante (Miguel; Miorim, 2004).

Buscamos, neste trabalho, enfatizar a necessidade de conceber a participação da história na educação matemática de futuros professores de modo que esta além de despertar interesse pela matemática e por uma apropriação significativa de conteúdos, possibilite que os futuros professores possam se apropriar da cultura matemática de forma a auxiliá-los na assunção de sua responsabilidade no mundo. (Cyrino;Pasquini, p. 17)

Na Educação Básica, as abordagens que envolvem o tratamento do conjunto dos números inteiros restringem-se a apresentá-lo como a reunião do conjunto do conjunto dos números naturais, o conjunto dos números opostos dos naturais e o zero.

> Do ponto de vista matemático isso é considerado correto se estabelecermos um isomorfismo entre uma classe de equivalência e um número natural. Os números naturais, a operação de adição, e todas as operações sobre esse conjunto, podem ser construídos a partir de um processo recursivo. Porém este processo não nos permite gerar um número negativo. Para construirmos os números inteiros necessitamos ir além, a base da construção depende do conceito de produto cartesiano (IN X IN) e de classe de equivalência (Cyrino; Pasquini. 2010).

A aprendizagem dos números inteiros e das regras de sinais comporta uma série de dificuldades. Do mesmo modo que o número natural pode ser visto como resultado de uma operação (uma quantidade a mais ou uma quantidade a menos), o número inteiro pode ser visto como um operador, só que com duplo sentido (representam uma quantidade escalonada, e ao mesmo tempo resultado de transformações que se dão em dois sentidos).

Augustin Cauchy (1789 – 1857) na sua obra *Cours d'Analyse* (1821), já discutia que existe uma diferença entre sinais predicativos (indicando estado) e operatório (relativo à operação) no que tange aos números inteiros.

Entretanto, em relação ao tratamento que se dá para esse conjunto aos estudantes da Educação Básica, tais argumentos são inviáveis.

A compreensão dos números inteiros envolve várias ideias matemáticas que precisam ser consideradas pelos professores e futuros professores de Matemática, quais sejam às relacionadas aos aspectos históricos em cada etapa da sua construção, visto que as dificuldades que surgiram ao longo de cada época subjacem da própria construção do conceito.

Glaeser (1981) realizou estudos de cunho histórico-epistemológico dos números inteiros e compôs lista de obstáculos epistemológicos que se opuseram à compreensão desses números, desde a Antiguidade até o século XIX, são elas:

1- Inaptidão para manipular quantidades isoladas.
2- Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.
3- Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semi-retas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.
4- A ambigüidade dos dois zeros: zero absoluto e zero como origem.
5- Estagnação no estágio das operações concretas (em confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos.
6- Desejo de um modelo unificador. É a intenção de fazer funcionar um "bom" modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante(Glaeser, 1981).

Segundo Glaeser, essa lista provisória e inicial. Porém, dessa lista suscitaram outras análises. Uma delas refere-se a Brousseau (1983) ao desconsiderar que os obstáculos 1 e 2 devam ser vistos como obstáculos epistemológicos, mas como dificuldades inerentes a uma determinada época vista a partir de hoje e não dos saberes constituídos naquela época para lidar com problemas que exigiam manipulação de quantidades negativas isoladas. Mais ainda, ao tentar entender a história ou as justificações dos sujeitos não devemos fazê-la a partir dos paradigmas atuais, pois desse modo estaremos instituindo erroneamente a crença da inferioridade do passado e da incompletude dos sujeitos.

Uma análise que justapomos traz a tentativa de buscarmos modelos que expliquem simultaneamente a adição e a multiplicação de inteiros baseando-se em operações internas pois, esta pode se constituir um obstáculo em sala de aula, do mesmo modo que no desenvolvimento histórico, como apontou Glaeser (obstáculos 5 e 6).

> Um modelo só pode se tornar um instrumento significativo para compreensão de um conceito, se o seu uso for intencional e dirigido para construir as abstrações e as generalizações necessárias para sua compreensão. Conhecer os aspectos epistemológicos da construção histórica de um conceito pode ajudar o professor na constituição desses modelos (Cyrino; Pasquini. 2010).

Nossa escolha refere-se ao fato das estratégias atualmente utilizadas para promover a compreensão das operações que envolvem números inteiros, na Educação Básica, não mostrarem eficiência, principalmente no que se refere à multiplicação e a divisão.

> Os trabalhos encontrados na literatura sobre os números inteiros, são pródigos em suprir modelos para a estrutura aditiva, mas abordam de maneira insuficiente a estrutura multiplicativa (Baldino, 1996, p.4).

Pretendemos  oferecer subsídios para tentar superar esse obstáculo a partir das ideias que Descartes e Hilbert propõe para a multiplicação e divisão de segmentos. Acreditamos que a representação geométrica do produto ou do quociente entre dois números reais, que nos permite obter o módulo (a medida), bem como o sinal (positivo ou negativo) do número que representa este produto ou quociente, podem ser problematizados em sala de aula e trazer comprensões aos professores e futuros professores para que possam compreender e perceber regularidades para a estrutura multiplicativa, e a partir daí dar significado às “regras de sinais”. São as relações que podem ser estabelecidas na atividade matemática de professores e futuros professores a partir destas tarefas que acreditamos tornarem possíveis a constituição do conhecimento matemático que circunda o conjunto dos números inteiros bem munido das operações de multiplicação e divisão.

## Descrição da proposta

Pretendemos nessa oficina realizar  um breve diálogo com os participantes sobre o tema “História da Matemática e Educação Matemática” para explicitar nossas crenças e percepções sobre possíveis relações entre essas áreas, apresentar as ideias de Descartes e Hilbert sobre operações com segmentos e uma proposta de trabalho para multiplicação e divisão com inteiros a partir dessas ideias.

Serão propostas algumas tarefas com objetivo de promover reflexões e discussões sobre modos de lidar criticamente com problemas pertencentes a uma cultura matemática tradicional que envolve números negativos, nomeadamente multiplicação e divisão de segmentos, e o ensino deste tema na cultura matemática escolar. Por fim discutiremos possíveis interações entre ensino e pesquisa para que possamos criar possibilidades de enfrentamento para os problemas que o ensino de diferentes temas da matemática escolar suporta.

Convém observar que nas tarefas que propomos, não temos a pretensão de dizer como se deve proceder com a história em sala de aula, entretanto, acreditamos que este tema carece de publicações e que este trabalho vem agregar elementos para este campo de investigação.

O fato de apoiarmo-nos no modelo geométrico para apresentarmos uma significação para as regras de sinais, não se trata de "contextualizar" a multiplicação e a divisão. Oferecemos oportunidade de retomar questões que transcendem a consideração de um objeto matemático, quer seja nas aulas de Matemática da Educação Básica, de um curso de formação de professores ou em atividades de formação continuada.

Apresentamos uma possibilidade de promover a participação da história na educação matemática de professores e futuros professores de Matemática, no sentido dialogar com a história na tentativa de abalar a visão extremamente difundida de uma matemática absoluta. Buscamos situar a matemática como uma prática social de modo que professores e futuros professores possam se conscientizar da alienação causada pela visão de uma matemática sem história e de seres humanos sem história, e assumir a responsabilidade que cabe a eles de auxiliar na mudança do quadro educacional vigente.

## Bibliografia e referências


Balestri, R. D. (2006) *Multiplicação e divisão de números inteiros por meio da história da matemática: uma proposta para 7ª série do Ensino Fundamental.*( Monografia da Especialização em Educação Matemática) . Londrina: UEL.

Balestri, R. D. & Cyrino, M.C.C.T. (2010) *História da matemática na formação inicial de professores de Matemática.* Alexandria, 3, n.1, 103 - 120

D'Ambrosio, U. (1999) *Educação para uma sociedade em transição*. Campinas: Papirus.

Cajori, F. (1984) *A History of Mathematics.* New York: Macmillan and CO.

Cyrino, M.C.C.T. (2005) A Matemática, a arte e a religião na formação do professor de Matemática. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, 18, n. 23, 41-56.

Cyrino, M.C.C.T. (2010) *Multiplicação e divisão de números inteiros: uma proposta para a formação de professores de Matemática.* 2ª ed. Coleção história da matemática para Professores, 14, Londrina: SBHMat.

D'Amore, B.; Radford, L. & Bagni, G. (2006) Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale Epistemological Obstacles and the Sociocultural Perspective. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 29B(1), p. 12–39

Descartes, R. (1954) *The Geometry*. Trad. David Eugene Smith e Martha L. Latham. New York: Dover Publications.

Glaeser, G. (1981) *Epistémologie des nombres relatifs. Recherches en Didactique des Mátematiques*, 2, n. 3, 303-346, Grenoble, Editions La Pensée Sauvage – Paris, Editions de La Maison des Sciences de l'Homme.

Glaeser, G.(1981) Epistemologia dos Números Relativos. *Boletim do GEPEM*, Rio de Janeiro, 17, 29-124.

Grugnetti, L. & Rogers, L. (2000) Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In: Fauvel, J. & Van Maanen, J. A. J. (Orgs), *History in mathematics education.* The ICMI Study. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 39–62.

Hilbert, D.(1953) *Fundamentos da geometria*. Trad. da 7ª Edição (1930) por Maria P. Ribeiro, Paulino L. Fortes, A.J. Franco de Oliveira. Lisboa: Gradiva.

Miguel, A. & Miorim, M. A. (2004) *História na Educação Matemática*: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica

Radford, L.; Boeiro, P. & Vasco, C. (2000) Epistemological assumptions about student understanding. In: Fauvel, J.; Van Maanen, J.A. (Orgs.). *History in mathematics education: the ICMI study*. Dordrecht: Kluwe. 162-167.