XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

Integración Numérica del Problema de Tres Cuerpos para la Enseñanza de la Física en Ciencias e Ingeniería.

Roberto **Donoso** Concha.
Departamento de Física, Universidad Iberoamericana de Ciencias y Tecnología.
Chile
rdonoso@unicit.cl

Hernán **Olmí** Reyes.
Departamento de Física, Universidad Iberoamericana de Ciencias y Tecnología.
Chile
holmi@unicit.cl

Cecilia **Donoso** Concha.
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica Metropolitana.
Chile
cdonoso@utem.cl

Juan **Rossel** Ortega.
Departamento de Física, Universidad Iberoamericana de Ciencias y Tecnología.
Chile
jrosselo@yahoo.com

Patricio **Pacheco** Hernández
Universidad Tecnológica de Chile - INACAP.
Chile
patricio.pacheco03@inacapmail.cl

Anai **Jert** Maldonado.
Departamento de Física, Universidad Iberoamericana de Ciencias y Tecnología.
Chile
anai.jert@gmail.com

Nicole **Besoain** Riveros.
Departamento de Física, Universidad Iberoamericana de Ciencias y Tecnología.
Chile
nbesoain@gmail.com

Resumen

En el presente trabajo se programó un algoritmo matemático simple, que permite la resolución y enseñanza de las características de las trayectorias de tres partículas que interactúan entre sí mediante fuerzas gravitacionales o eléctricas. El algoritmo desarrollado se aplicó para resolver el problema de un planeta del tipo terrestre o enano, orbitando en torno de dos estrellas de masas similares a la del Sol. Esto permite describir las interacciones gravitatorias con el potencial de Newton y reducir el problema de tres cuerpos al de uno (el planeta), en un campo gravitatorio que varía en el tiempo según una función analítica exacta. La integración de las trayectorias del planeta se llevó a cabo mediante expansiones en series de Taylor de tercer orden. La ventaja del enfoque empleado es permitir la resolución de problemas físicos complejos o de especialistas, en forma sencilla. Este tipo de aplicaciones resulta especialmente útil como apoyo a la labor docente presencial, virtual y a distancia.

PALABRAS CLAVES: Matemáticas, Física, Computación, Educación, Multimedia, Planetas y Estrellas.

Introducción

El estudio de los campos de fuerzas centrales que varían con el inverso de la distancia al centro de fuerzas al cuadrado, es parte de la formación básica en dinámica en las escuelas de ciencias y de ingeniería en nuestro País. La importancia del tema radica en que tanto los campos gravitacionales como eléctricos generados por una partícula presentan este tipo de dependencia.

Cuando se estudian estos campos de fuerza, se tratan las propiedades generales de los mismos, tales como las leyes de conservación del momentum lineal, angular y de la energía y en ocasiones, el Teorema del Virial de naturaleza estadística (Donoso R. 2007; Donoso R. et al 2008). Sin embargo, cuando se calculan las órbitas de partículas que interactúan entre sí mediante fuerzas gravitacionales o eléctricas, sólo se tratan sistemas de dos partículas. En estos casos las órbitas son bien conocidas y corresponden a cónicas con foco en el centro de masa del sistema. El estudio de las trayectorias en sistemas de múltiples partículas (tres o más) no está incorporado en los programas de pregrado de Ciencias e Ingeniería y por lo tanto, tampoco se incluye en la correspondiente literatura.

El desconocimiento de las características de las trayectorias en sistemas múltiples conlleva diversos problemas. Así, por ejemplo, es frecuente que los estudiantes que han completado su formación básica en Física presenten dificultades para comprender los procesos de captura de partículas en campos gravitacionales o eléctricos. Esto se debe a que la lógica del problema de dos cuerpos no contempla la interacción de éstas con su medio. Más aún, es frecuente que existan errores conceptuales en los estudiantes como por ejemplo, conservar el paradigma renacentista del sistema Solar, en el cual los planetas y satélites describen trayectorias periódicas como si estuvieran ligados entre sí mediante una suerte de engranajes gravitacionales. Actualmente la Física Contemporánea prueba que este paradigma no es válido y que el sistema Solar es caótico.

La dificultad de incorporar el problema de tres o más cuerpos en los programas de dinámica básica se debe, entre otros, a que excepto en algunos casos particulares como los puntos de Lagrange en el problema de tres cuerpos, no existen soluciones analíticas de las trayectorias y las órbitas son caóticas, por lo que los requerimientos matemáticos para obtener las soluciones sobrepasan el conocimiento de un alumno medio de Ciencias o Ingeniería. De hecho, el problema de tres cuerpos aún no está completamente resuelto y se siguen realizando diferentes trabajos de investigación en el mismo (Desidera S. et al, 2007; Daemgen S. et al, 2009; Lunine J. et al. 2009; Montgomery, R. 2001).

Con objeto de introducir y estudiar en los cursos de dinámica, las propiedades y características principales de las trayectorias de las partículas en sistemas múltiples, que interactúan entre sí mediante fuerzas gravitacionales o eléctricas, en este trabajo se desarrolló e implementó una rutina computacional para calcular mediante integración numérica las trayectorias de tres cuerpos que interactúan entre sí mediante fuerzas que varían con el inverso de las distancias entre éstos al cuadrado.

El problema analizado en este trabajo, se aplicó para un planeta del tipo terrestre o enano (o cualquier cuerpo de masa similar o menor), que se mueve bajo la acción gravitatoria de un sistema de dos estrellas con masas comparables a la del Sol. Esta elección se debe a los recientes descubrimientos de planetas extrasolares en sistemas binarios cuyas trayectorias no se pueden determinar en forma exacta. El método empleado está basado en el algoritmo descrito en por Donoso R. (2007) y Donoso R. et al (2008) para un sistema de dos cuerpos. La ventaja del procedimiento utilizado en este trabajo es que permite resolver un problema físico complejo en forma sencilla, aprovechando la rapidez de cálculo y el manejo gráfico de los computadores personales actuales.

A continuación se describe el método de cálculo programado en el algoritmo computacional; luego, se presentan algunos resultados obtenidos y se comparan con los de otros autores.

Integración numérica de las órbitas

El sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que determina las trayectorias en el tiempo t, de tres partículas que interactúan entre sí mediante fuerzas gravitatorias es un problema de 9 variables, correspondientes a las coordenadas espaciales de los tres cuerpos. Si se incorporan las leyes de conservación se pueden establecer vínculos entre las coordenadas del sistema y reducir el número de variables independientes. Sin embargo, en general no es posible obtener soluciones analíticas de las órbitas (Montgomery, R. 2001). Un método alternativo para la resolución de las trayectorias es la integración numérica de las ecuaciones de movimiento mediante un computador (Donoso R. 2007; Donoso R. et al 2008). En este trabajo se desarrolló un programa computacional que realiza esta integración y dibuja las órbitas. Para tratar el problema se consideraron planetas del tipo terrestre y enanos, orbitando estrellas de masas similares a la del

Sol. Esto permite describir las interacciones gravitatorias con el potencial de Newton (Donoso R. 2007). Como la masa del planeta es mucho menor que la de las estrellas, se puede despreciar su efecto sobre las trayectorias de éstas y describir sus órbitas mediante elipses con un foco en el centro de masa y momento angular constante. Esto reduce el problema de tres cuerpos al de uno, el planeta, en un campo gravitatorio que varía en el tiempo según una expresión analítica exacta (Mireles J., 2007). Luego, el sistema a resolver queda:

$$\ddot{\vec{X}} = -G\sum_{i=1}^{2} \frac{M_i \left(\vec{X} - \vec{X}_i\right)}{\left|\vec{X} - \vec{X}_i\right|^3}, \qquad (1)$$

donde $\vec{X}$, $\vec{X}_1$ y $\vec{X}_2$ son los vectores posición del planeta y de las dos estrellas, respectivamente, con origen en el centro de masa del sistema; M_i , i = 1, 2, es la masa de la estrella i; G es la constante de gravitación universal. La integración del sistema de ecuaciones (1) se debe llevar a cabo sujeto a condiciones iniciales. En este trabajo se consideraron sólo órbitas coplanares del planeta y las estrellas. La integración de las trayectorias se llevó a cabo siguiendo el método descrito por Donoso R. (2007) y Donoso R. et al (2008), basado en la aplicación iterativa de la de expansión en serie de Taylor de tres términos:

$$\vec{X}(t+\Delta t) = \vec{X}(t) + \frac{d\vec{X}}{dt}(t)\cdot\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2\vec{X}}{dt^2}(t)\cdot\Delta t^2, \qquad (2)$$

y

$$\frac{d\vec{X}}{dt}(t+\Delta t) = \frac{d\vec{X}}{dt}(t) + \frac{d^2\vec{X}}{dt^2}(t)\cdot\Delta t \qquad (3)$$

La precisión del método descrito se controló variando los pasos de integración. Como el problema de tres cuerpos es escalable, se trabajó con G = 1, en unidades astronómicas y masas solares. La unidad de tiempo resultante corresponde a 1,8 días. Para resolver el problema reducido, en el cual las estrellas están fijas, se mejoró la rapidez de convergencia imponiendo la conservación de la energía en cada iteración. En el caso general del problema con estrellas móviles, las trayectorias se integraron en períodos de tiempo de 2 a 5 años; esto garantiza la precisión de la geometría de las órbitas a un costo razonable de tiempo de cálculo computacional.

Presentación y discusión de resultados

En las figuras 1, 2, 3 y 4 se muestran las trayectorias calculadas con el método descrito en la sección anterior, aplicado bajo distintas condiciones iniciales para un planeta en un sistema de dos estrellas. En el primer caso, figura 1, las órbitas del planeta se integraron para el problema de tres cuerpos reducido (estrellas fijas). Se observa que el planeta orbita alternadamente cada estrella en forma caótica describiendo una trayectoria abierta, por lo que nunca pasa dos veces por un mismo punto con la misma velocidad. Las órbitas de la figura 1 son claramente similares a los sistemas de Lorentz de dos atractores, como los descritos por Z. ElhadJ y J.C.Sprott (2008). Orbitas del mismo tipo han sido publicadas por otros autores: Montgomery R. (2001); Mireles J. (2007); Devorak R. et al (2005).

En la figura 2 se ilustran las órbitas de transferencia planetaria en un sistema de tres cuerpos reducido. Se aprecia el movimiento caótico de las órbitas en torno a cada estrella. La trayectoria del planeta no es estable y éste se intercambia aleatoriamente entre una estrella y la otra. La geometría de las órbitas de la figura 2 también fue descrita por J.C.Sprott en Clint Sprott's Chaos Research, http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/?C=M;O=D; los cálculos fueron realizados utilizando el método de Runge-Kutta (programa disponible en la web); Mireles J.D. (2007) también describe órbitas similares. Cabe observar que si bien el problema de tres cuerpos reducido no tiene realidad física en un sistema estelar, la escalabilidad del problema permite aplicar las trayectorias descritas a una partícula cargada que orbita entre dos polos de cargas eléctricas opuestas a la de la partícula, Mitsusada M. (2007). En la figura 3 se muestra un proceso de transferencia planetaria entre dos estrellas de masas similares a la del Sol, moviéndose en órbitas elípticas en torno al centro de masa del sistema. Sin bien la trayectoria del planeta es caótica, se aprecia claramente que éste orbita inicialmente en torno a una de las estrellas y luego es transferido a la otra. El proceso de intercambio planetario ocurre en la región donde las órbitas elípticas de las estrellas se intersectan y la distancia interestelar es mínima. Puesto que la órbita del planeta toma lugar fuera de la esfera de Hill de las estrellas, su trayectoria es inestable y el planeta inevitablemente termina colisionando con una de las dos estrellas del sistema o siendo expulsado hacia el espacio exterior, convirtiéndose en un planeta errante. Este proceso de colisión o expulsión planetaria en los sistemas estelares binarios es frecuente, como se establece en: Daemgen S. et al (2009); ElhadJ Z. y Sprott J. (2008); Devorak R. et al (2005). En la figura 4 se puede observar la trayectoria de un cometa hipotético en un sistema de dos estrellas del tipo solar que orbitan entre sí en trayectorias elípticas de semieje mayor igual a cinco unidades astronómicas (distancia Júpiter – Sol). Inicialmente, cuando el cometa se encuentra lejos del sistema, la trayectoria de éste es una hipérbola con foco en el centro de masa del sistema. Cuando el cometa se aproxima a las órbitas de las estrellas, las fuerzas gravitatorias que éstas ejercen sobre el cometa perturban fuertemente su trayectoria y la vuelven caótica ElhadJ Z. et al (2008); Devorak R. et al (2005). Tras orbitar un tiempo en la región interestelar, el cometa colisiona contra una de las estrellas en una trayectoria de parámetro de impacto pequeño y es eyectado del sistema con una energía mayor que la que tenía inicialmente, emergiendo en una trayectoria prácticamente recta.

Conclusiones

En este trabajo se caracterizó la geometría de las órbitas planetarias que toman lugar en sistemas binarios de estrellas fuera de las regiones de las esferas de Hill, mediante un algoritmo matemático simple. De este modo, fue posible resolver un problema complejo de la Física sin requerir el empleo de herramientas matemáticas avanzadas, las cuales son dominadas normalmente sólo por los especialistas.

La calidad del método empleado, bajo las restricciones dinámicas y de cálculo impuestas, queda abalada por la concordancia obtenida entre nuestros resultados y los de otros autores que utilizaron métodos numéricos diferentes. Si bien los sistemas estelares dinámicos descritos en este artículo son inestables y tienen un tiempo reducido de existencia~~,~~ debido a que el planeta inevitablemente colisiona con una de las estrellas o es expulsado del sistema, su estudio es necesario para comprender los procesos involucrados en la formación y evolución de los sistemas planetarios, tanto en estrellas simples como dobles y múltiples. El enfoque empleado en este artículo permite apreciar las ventajas que ofrece la integración de la computación en la resolución numérica de problemas físicos, como complemento a la labor docente tradicional en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Ciencias Físicas, en las carreras de Ciencia e Ingeniería. En efecto, mediante el desarrollo de rutinas computacionales que combinen elementos gráficos y multimedia con algoritmos matemáticos, aplicados a la resolución de problemas físicos específicos, además de complementar y profundizar los temas tratados en las aulas, permiten difundir el conocimiento especializado, incorporando tópicos de Física contemporánea (en este caso, planetas extrasolares, formación y evolución de sistemas planetarios y teoría de caos) en las asignaturas básicas de pregrado. Cabe señalar, finalmente, la utilidad de este tipo de aplicaciones en los procesos de educación virtual y a distancia.

Referencias

DAEMGEN S., HORMUTH F., BRANDNER W., BERGFORS C., JANSON M., HIPPLER S. & HENNING T. "Binarity of transit Host Stars – Implications on Planetary Parameters", Accepted by A&A (cite as: arXiv:0902.2179v1 astro-ph. SR) (2009).

DESIDERA S. AND BARBIERI M. "Properties of planets in binary systems – The role of binary separation", A&A, Vol 462(1), pp 345-353 (2007).

DEVORAK R., FREISTETTER F. & KURTHS J. Chaos and stability in planetary systemas. Springer, 2005.

DONOSO R. "Integración Numérica de la Ecuación de Binet para la Enseñanza de la Física en Ciencia e Ingeniería", Cuad. de Mec. Comp., Vol 5(1), pp 19-24 (2007).

DONOSO R., ROSSEL J., DE LAS POZAS C. Y NAVARRO G. "Orbits in Central Force Fields: for teaching Physics in Science and Engineering", Active Learning in Engineering Education ALE2008. Colombia. (2008).

EGGENBERGER A., UDRY S., CHAUVIN G., BEUZIT J., LAGRANGE A., SÉGRANSAN D. & MAYOR M."The impact of stellar duplicity on planet occurrence and properties", A&A, Vol 474, pp273-291 (2007)

ELHADJ Z., SPROTT J. "On the robustness of chaos in dynamical systems: theories and applications". Front.Phys.China,3(2):195-204. 2008

LUNINE J., MACINTOSH B AND PEALE S. "The detection and characterization of exoplanets", Phys. Today, May 2009, pp.46-51.

MIRELES J. Celestial Mechanics: Notes and Work. FreeScience, (2007).

MITSUSADA M. "Dynamics starting from zero velocities in the classical Coulomb three-body problem", Phys. Rev. E **75**, 026203 (2007).

MONTGOMERY, R. A new solution to the three body problem. Notices of the American Mathematical Society 48(May):471. (2001).

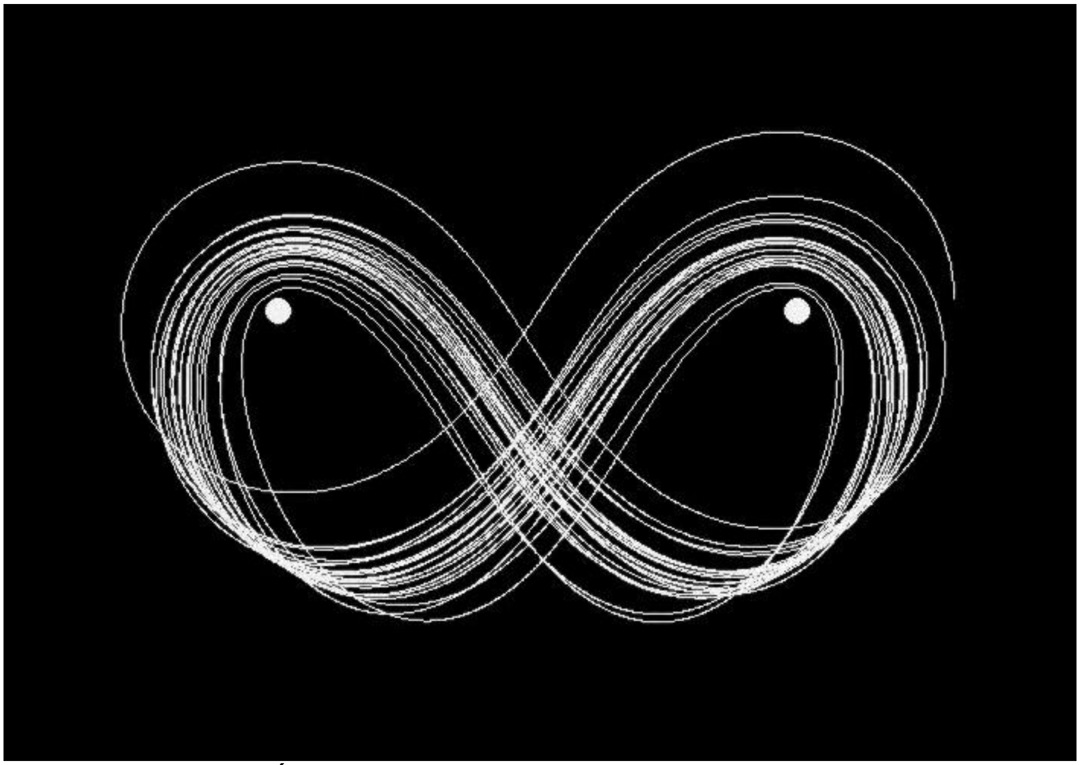

Figura 1. Órbitas caóticas en un sistema de tres cuerpos reducido.

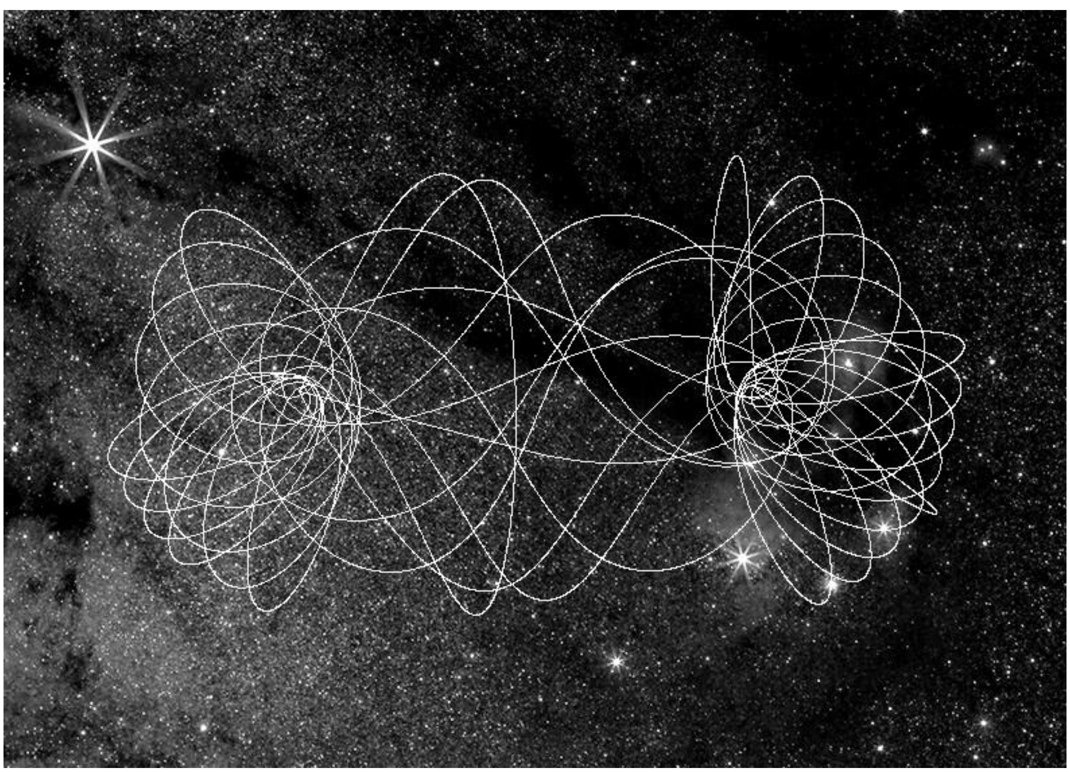

Figura 2. Transferencia planetaria en un sistema de tres cuerpos reducido.

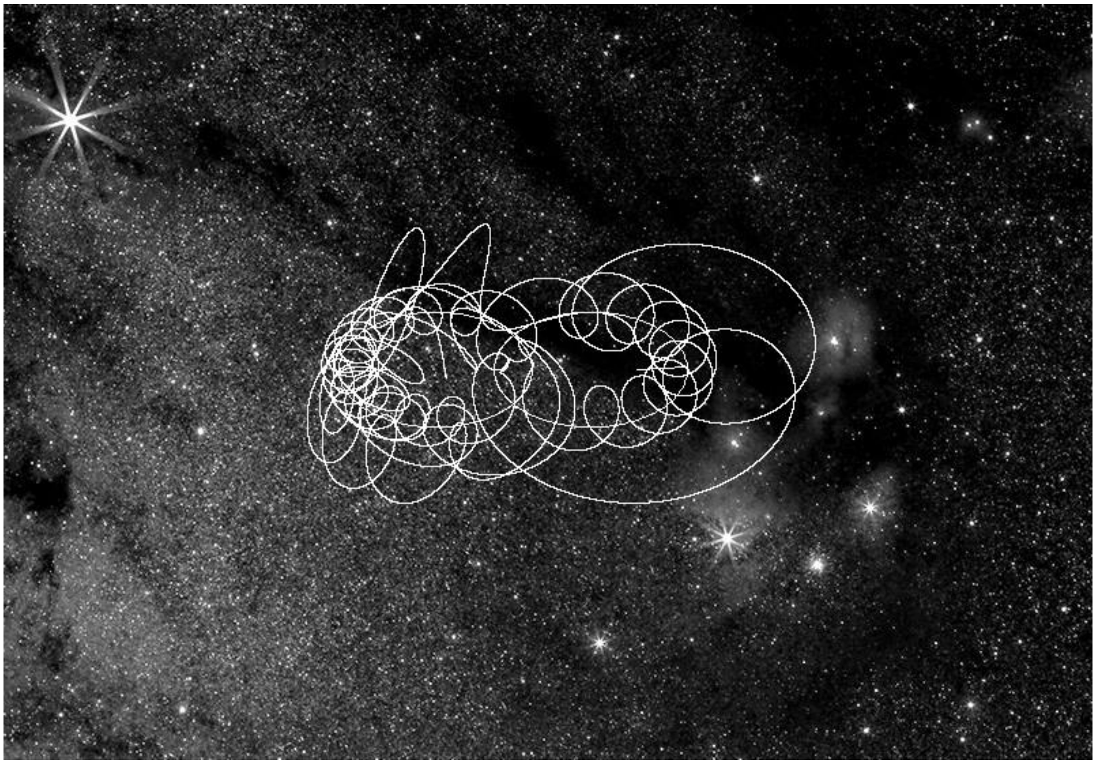

Figura 3. Transferencia planetaria en un sistema binario de estrellas.

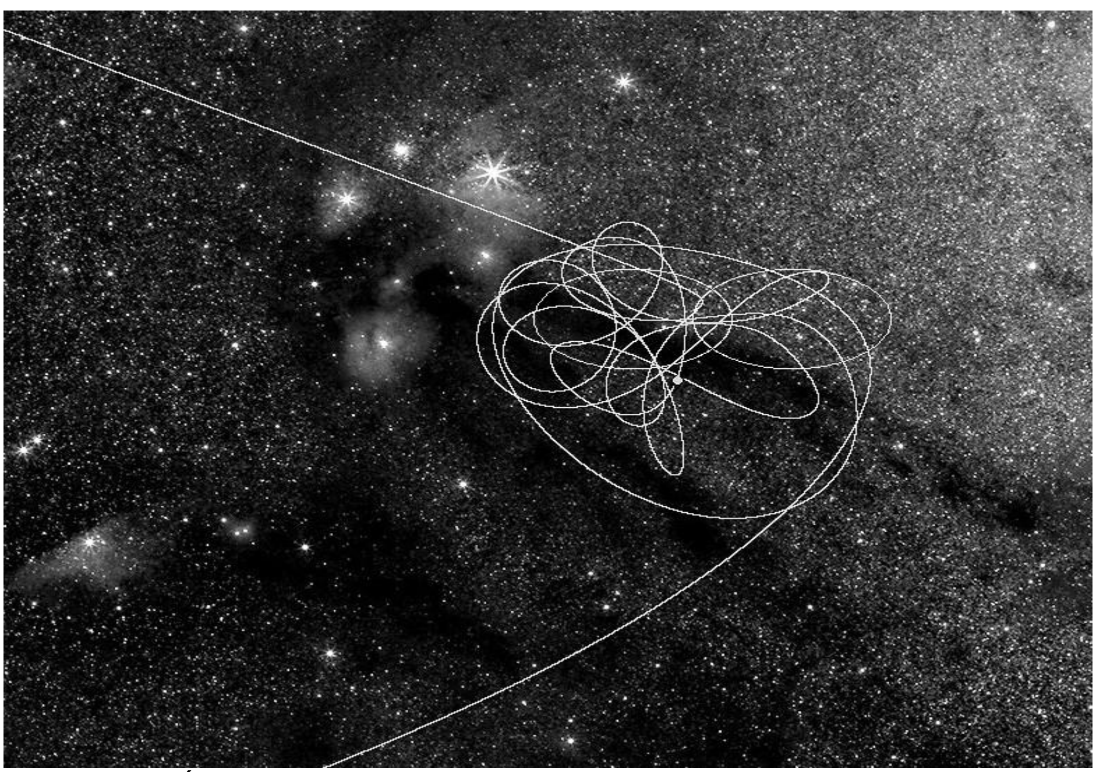

Figura 4. Órbita caótica de un cometa hipotético en un sistema binario de estrellas.