XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

El infinito y niñ@s talento en matemáticas:
Una mirada desde APOE

Solange Roa **Fuentes**
Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN –
Universidad Industrial de Santander (EDUMAT - UIS)
México – Colombia
roafuentes@gmail.com
Asuman **Oktaç**
Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN
México
oktac@cinvestav.mx

Resumen

Tomando la teoría APOE presentamos cómo "niñ@s talento en matemáticas" comprenden el infinito al abordar la paradoja de las pelotas de tenis. Con base en una descomposición genética de dicha paradoja, hemos realizado entrevistas didácticas a niñ@s colombianos y mexicanos que son considerados dentro de sus comunidades como talentosos en matemáticas. En este trabajo discutiremos algunos aspectos teóricos relacionados con las construcciones y mecanismos mentales relacionados con el infinito; así como la manera como dicho concepto puede ser construido por esta población. Este análisis nos muestra en general, que los niñ@s participantes cuentan con herramientas matemáticas para abordar el problema, pero sólo como un algoritmo ya que no logran relacionar estas ideas con el contexto del problema, por presentarse "contradictorio" con la realidad.

Palabras Clave: Teoría APOE, talento matemático, infinito, paradojas, proceso, objeto.

Introducción

Sin duda pensar en la construcción cognitiva del infinito implica consideraciones profundas de orden epistemológico y conceptual, en nuestro caso pensar en la construcción de este concepto en niños con un talento especial en matemáticas lo hace aún más complejo. Ya que por un lado es necesario conocer la epistemología del concepto y por otro es preciso comprender la manera como los niños y niñas identificados como talentosos en matemáticas conciben esta idea.

En este trabajo nos interesa mostrar los avances que hemos logrado al intentar determinar cómo el infinito matemático es construido por niñ@s talento. Para esto buscamos que los estudiantes construyan el concepto como el estado al infinito de un proceso iterativo infinito. Para lograrlo tomamos como fundamento principal los trabajos realizados desde la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) que explican la construcción del infinito potencial como un proceso y el infinito actual como un objeto trascendente (Dubinsky, Weller, McDonald, & Brown, 2005a; 2005b; Brown, McDonald & Weller, 2008). Un punto determinante en este trabajo es ver que la construcción del infinito, implica la realización de construcciones más sofisticadas. Ya que el análisis cognitivo de su construcción requiere el análisis de los contextos donde éste puede encontrarse inmerso y de las concepciones que cada uno genera en los estudiantes, así como la experiencia matemática previa de los individuos que puede fortalecer o debilitar la construcción de sus nuevas estructuras. Aunque no existe en el currículo escolar un ítem donde este concepto aparezca de manera específica, excepto en algunas carreras universitarias donde se incluyen cursos de teoría de conjuntos, los maestros partimos de supuestos sobre lo que el estudiante entiende o cree que es el infinito al introducir conceptos como sucesiones infinitas y sus límites o series, entre otros.

Desde una mirada cognitiva con los elementos de la teoría APOE consideramos cómo este acercamiento no se ha centrado en discutir sobre la naturaleza contradictoria del infinito, sino más bien, ha encontrado en su análisis una manera de dar explicación a la forma como un individuo puede construir este concepto (Dubinsky et al., 2005a; 2005b).

Con base en el análisis de la literatura y de los datos obtenidos en la aplicación de una entrevista didáctica, presentamos algunos avances de nuestro trabajo que van más allá de la identificación de niños y niñas talentosas en matemáticas. Ya que buscamos hacer énfasis en la necesidad de estimular y desarrollar el potencial de esta población principalmente en países como México y Colombia, donde en general no se presenta una política clara de apoyo para estos individuos. En particular mostraremos los razonamientos de Santiago (Nombre ficticio), un niño mexicano considerado dentro de su comunidad como talentoso en matemáticas. De la misma manera pretendemos implantar la necesidad de establecer proyectos de investigación que determinen aspectos claros en cuanto a la formación de los niños y niñas talentosas en matemáticas en países en desarrollo.

El infinito y la teoría APOE

El concepto de infinito aparece en los programas curriculares específicamente en los cursos de pre cálculo y cálculo cuando los estudiantes deben abordar conceptos como límite, asíntotas de funciones racionales, sucesiones infinitas y series e integrales impropias. De manera similar algunas de las estructuras matemáticas estudiadas en álgebra lineal, álgebra abstracta, análisis real y topología son conjuntos infinitos y aparecen demostraciones que requieren de la construcción de procesos mentales infinitos (Weller, Brown, Dubinsky, McDonald & Stenger, 2004). Sin embargo, las concepciones que los estudiantes construyen alrededor de este concepto son contradictorias y están determinadas por el tipo de representación o el contexto en que éste se presenta. En algunos casos estas dificultades parecen estar asociadas con la manera como este concepto fue concebido históricamente y por la dicotomía entre su naturaleza potencial y actual. En este camino la teoría APOE ha ofrecido una vía de análisis sobre las construcciones y mecanismos mentales que un individuo puede realizar sobre este concepto que más que detectar dificultades ha ofrecido una reflexión sobre la importancia de los mecanismos de interiorización y encapsulación como mecanismos cotidianos de la actividad matemática, para construir de manera exitosa el concepto de infinito.

La teoría APOE ha proporcionado una explicación sobre cómo las personas pueden pensar sobre el concepto de infinito, con base en los hechos históricos relacionados con la percepción de los matemáticos del infinito potencial versus el infinito actual y las paradojas que sobre este concepto se han planteado. Dubinsky et al (2005a) proporcionan un análisis cognitivo en términos de las construcciones mentales, que mediante los mecanismos de interiorización y encapsulación relacionados explícitamente con el infinito potencial y actual respectivamente, puede realizar un individuo para comprender el concepto de infinito. Hablando en términos de la teoría APOE, Cantor logró encapsular procesos infinitos mediante la construcción de los números cardinales y ordinales y fue capaz de pensar en ellos como objetos que pueden ser transformados mediante la aplicación de acciones y procesos; por ejemplo, mediante la comparación de conjuntos o la realización de operaciones aritméticas entre ellos (Dubinsky et al., 2005a). Estos investigadores muestran cómo la teoría APOE logra hacer una distinción entre el infinito actual y potencial; mencionan: "El infinito potencial es la concepción del infinito como un proceso. Este proceso es construido empezando por los primeros pasos (por ejemplo 1, 2, 3 en la construcción del conjunto de los números naturales) la cual es una concepción acción. Repetir estos pasos (por la adición de 1 repetidamente) al infinito, requiere de la interiorización de estas acciones en un proceso. El infinito actual es el objeto mental que se obtiene de la encapsulación de este proceso" (Dubinsky et al., 2005a, p. 346). De esta manera un individuo puede concebir el infinito como una totalidad; cuando dicho proceso se encapsula la idea de potencialidad se transforma en un infinito actual, es decir una entidad matemática sobre la cual es posible aplicar acciones. Así la existencia de uno no niega el otro y pueden ser percibidos como dos construcciones cognitivas diferentes relacionadas por el mecanismo mental de encapsulación (Dubinsky et al., 2005a).

Dubinsky, Weller, McDonald y Brown (2005b) muestran cómo la concepción de infinito que poseemos inherentemente se percibe como un proceso que puede vincularse con la realización de iteraciones que no terminan. Esta idea relacionada con la acción de realizar paso a paso un proceso de manera infinita, lleva a estos investigadores a plantearse la pregunta: ¿Es posible concebir un proceso infinito como una totalidad? (Dubinsky et al., 2005b, p. 254). La teoría APOE muestra cómo una *concepción proceso* de un concepto matemático se percibe como algo dinámico, pero para realizar transformaciones sobre un concepto matemático es indispensable concebirlo como algo estático y esto es posible sólo bajo una *concepción objeto* del concepto. Dubinsky et al (2005b) presentan un análisis de tres ejemplos específicos relacionados con el infinito: La construcción del conjunto de los Naturales, la ecuación $.999... = 1$ y los infinitesimales. En general estos investigadores consideran la importancia de desarrollar estrategias pedagógicas que ayuden a los estudiantes a la interiorización de acciones que les permitan concebir el infinito como un proceso, y motiven la encapsulación de este proceso en un objeto. Este es considerado como el primer paso para que los estudiantes tengan éxito en la aplicación de transformaciones sobre problemas que involucren el infinito (Dubinsky et al., 2005b; Weller et al., 2004).

Uno de los procesos iterativos más "simples" es la generación de los números naturales por "la adición de la unidad" en cada iteración. Sin embargo como lo hemos discutido, la dificultad está en ver este proceso como un todo, como un objeto; la idea que persiste en los estudiantes es que siempre es posible encontrar un nuevo número natural y por tanto no pueden pensar en este conjunto como un todo. Por ejemplo al determinar su cardinalidad o al considerar que el estado final de una sucesión de objetos que se generan por iteración sobre este conjunto.

Dos preguntas que surgen de las ideas presentadas y que fueron presentadas por Mamolo (2009) son importantes: ¿Cómo hacer que los estudiantes actúen sobre el infinito? Es decir, ¿qué motiva la encapsulación de un proceso iterativo infinito en un objeto trascendente? Y, ¿Qué puede decirnos el "cómo" sobre la comprensión de un individuo sobre el infinito? Mamolo (2009), al entrevistar a dos estudiantes universitarios concluye dos maneras mediante las cuales los estudiantes actuaron sobre el infinito: por la comparación de conjuntos y por la realización de sustracciones de objetos transfinitos. Jean y Dion fueron los estudiantes que participaron analizando la siguiente versión del problema de las pelotas de ping pong: "Se tiene un número infinito de pelotas de ping pong numeradas y un bote muy grande; estás a punto de desarrollar un experimento que dura exactamente un minuto. Su tarea es colocar las primeras 10 pelotas en el bote y en los siguientes 10 minutos quitar la pelota 1. En la mitad del tiempo restante debes colocar las pelotas de la 11 a la 20 en el bote y quitar la pelota 2. Siguiendo infinitamente, ¿después de 60 segundos al final del experimento cuántas pelotas de tenis están en el barril?" (Mamolo, 2009, p. 232) En esta situación se involucran tres procesos similares a los planteados por Mamolo & Zazkis (2008): la entrada de las pelotas, la salida de las pelotas y los intervalos de tiempo. Aunque son más las pelotas que entran que las que salen en cada intervalo de tiempo, al final del experimento el bote estará vacío.

Dos versiones diferentes de este problema fueron presentados por Mamolo (2008) a dos profesores de matemáticas. En las dos versiones se presenta la subdivisión de un minuto; la diferencia de estas versiones se centra principalmente en la manera como las pelotas entran y salen del barril. En la primera versión entran las pelotas de la uno a la diez y sale la uno, a los treinta segundos entran las pelotas de la once a la veinte y sale la dos y así sucesivamente. En la segunda versión entran las pelotas de la 1 a la 10 y sale la uno, treinta segundos después entran de la 11 a la 20 y sale la 11 y así sucesivamente; las dos versiones finalizan de la siguiente manera: "Se continua con esta tarea al infinito. Después de sesenta segundos, cuando finaliza el experimento, ¿cuántas pelotas de ping pong quedan en el barril?" (Mamolo, 2008, p. 354). La distinción entre estos dos problemas tiene un gran impacto en la resolución de las paradojas, ya que mientras en el primer caso al sacar infinitas pelotas de un número infinito de pelotas resulta que el barril está vacío, ya que es posible determinar un instante de tiempo donde cada pelota ha sido sacada del barril; en la segunda versión aunque se saque infinitas pelotas, las pelotas 1, 11, 21, 31, …, en el barril permanece un número infinito de pelotas las pelotas 2, 3,…, 10, 12, 13,…, 20, 22,… Los resultados presentados por Mamolo (2008) muestran cómo el trabajo sobre paradojas genera en los estudiantes conflictos cognitivos al analizar su solución. Además señala las contradicciones que presentan los estudiantes al buscar concordancia entre sus ideas intuitivas sobre el infinito y sus soluciones de las paradojas que resulta en ideas que se oponen a su intuición. Esto tiene que ver con la necesidad de construir el infinito como un todo (el infinito actual) ya que fundamentalmente estas paradojas plantean un problema de comparación de conjuntos por su cardinalidad. En este sentido Mamolo (2009) propone al respecto que no basta con actuar sobre un objeto realizando operaciones sobre él; además, es necesario tener un entendimiento claro de cómo actuar sobre el objeto; en este caso, no sería contradictoria la idea de que infinito menos infinito sea cero y al mismo tiempo infinito. Es decir, se puede ver los individuos escriben expresiones del tipo $\infty - \infty = 0$ y $\infty - \infty = \infty$ donde en el primer caso extienden las propiedades de las operaciones aritméticas con números reales y en el segundo recurren a la idea de infinito como una potencialidad como algo que nunca termina, por tanto aunque a infinito se le reste infinito sigue siendo infinito. Esto aparece como una manipulación de símbolos que se interpretan dependiendo del contexto en el que aparezca por el argumento que mejor se acomode según la situación. Con estas ideas en mente, realizaremos una reflexión sobre la población que consideramos en nuestro estudio.

Niñ@s talento en matemáticas

Históricamente la psicología ha abordado la problemática de la identificación de los individuos talentosos mediante la aplicación de pruebas psicométricas que de manera general buscan identificar coeficientes intelectuales superiores al promedio. Sin embargo, hoy día la definición de talentoso, sobresaliente, dotado o genio, es muy diversificada y está relacionada con el contexto en el que el niño o la niña se desarrolla. Actualmente en la identificación del talento intervienen los padres de familia, la escuela y en general la comunidad donde el individuo se encuentra inmerso.

En diferentes países del mundo la identificación y seguimiento de este grupo especial de personas tiene una gran trayectoria ya que sin duda el desarrollo de su potencial ofrece a la comunidad donde éstos se encuentran mayores posibilidades de desarrollo científico y tecnológico. Un ejemplo de esto es Estados Unidos; en este país diferentes universidades ofrecen proyectos y programas de apoyo a los niños talentosos o dotados. Allí es posible encontrar fundaciones como la “California Association for the Gifted”, que organiza variadas actividades (congresos, publicación de libros, asesorías, cursos) para estos individuos y sus familias. Esta asociación ha identificado algunas características en diferentes ámbitos donde los niños dotados pueden desarrollarse. Por ejemplo han encontrado que en el ámbito cognitivo estos individuos manejan una extraordinaria cantidad de información, poseen una capacidad poco usual de procesar información de manera rápida, tienen un comportamiento persistente y guiado por fines claros, poseen un nivel alto de pensamiento abstracto, su pensamiento es flexible y adquieren rápidamente nuevos lenguajes. Estas características que hacen que un individuo sea diferente a la mayoría, nos ha mostrado que la atención al talento es un asunto de equidad; no sólo para aquellos que tienen algún tipo de deficiencia física o cognitiva requiere de atención especial, también aquellos que por sus capacidades sobresalen de manera superior en un grupo tienen esta necesidad. En Oktaç, Roa-Fuentes & Rodríguez (2011) hemos profundizado sobre este aspecto.

Durante los últimos años, ha sobresalido en el campo de las matemáticas las contribuciones de personas que poseen extraordinarios talentos en esta área. El constante avance científico y tecnológico de nuestra época ha requerido de una mejor preparación de los individuos principalmente en las ciencias y la matemática. Sin duda es apremiante para el desarrollo de nuestra sociedad la identificación temprana de individuos talentosos, pero más que eso, consideramos de gran importancia entender los procesos de pensamiento que desarrollan estos individuos ya que esto puede ser un parámetro para su caracterización y ser soporte para el mejoramiento de la educación en estas áreas. Consideramos que la ejecución de proyectos como el que presentamos hoy, puede ayudar a la identificación y seguimiento de los niñ@s talento en matemáticas e intentar generar mejores condiciones para el aprovechamiento de su potencial.

A diferencia de la gran información sobre programas y seguimiento a personas sobresalientes en matemáticas que puede encontrarse en países como Estados Unidos, en países como México y Colombia la identificación, seguimiento y desarrollo de esta población es muy escasa. Aunque se han desarrollado propuestas por parte del Estado, fácilmente se percibe que éstas se quedan en el papel y que son muy pocas las instituciones educativas donde los niños y niñas que presentan ciertas aptitudes en matemáticas tienen la atención necesaria para potenciar su talento. A esta situación se agregan los mitos que se han generado sobre los niños con características sobresalientes; entre ellos que “nunca tiene dificultades en la escuela” o que “no necesita la ayuda de nadie” (SEP, 2006). En general podemos decir que “ser brillante en matemáticas” no es una cualidad que los jóvenes quieran tener y mucho menos manifestar; esto no les da popularidad. Y si nos ubicamos dentro de esta población podemos encontrar que el género femenino no es aceptado como talentoso en matemáticas y que las mujeres ocultan mejor el talento ya que no les importa destacarse, en comparación con los hombres quienes son motivados por la sociedad como muy capaces en esta área (entrevista con Antonio Rada, Director Fundación Telegenio). El gusto por las matemáticas es casi un estigma social. Un niño que de manera natural demuestra su brillantez matemática es esquematizado por sus compañeros como: “cerebrito”, “sabelotodo” o “come libro”; es señalado y discriminado por sus compañeros y en algunos casos por sus maestros, quienes no aceptan el reto ante una nueva pregunta, o simplemente no están preparados para dar una respuesta.

En los países latinoamericanos hoy más que nunca existe un interés apremiante en la detección e identificación de este grupo de niños, que representa en gran medida la esperanza del desarrollo científico y tecnológico de nuestras sociedades. Aunque los esfuerzos aún son débiles, hemos encontrado proyectos que buscan hacer un seguimiento regular en la identificación de niños y niñas talentosos a la vez que buscan acompañarlos en el desarrollo de sus potencialidades. En particular, reportaremos en este escrito el trabajo que hemos realizado con integrantes de la Funtación Telegénio (México). A continuación presentaremos el fundamento teórico de nuestro trabajo que representa nuestra visión de la problemática planteada.

La paradoja de la pelota de tenis: Un análisis teórico

Nuestro análisis teórico parte de una descomposición genérica del concepto de infinito presentada en Roa-Fuentes (2010). Ya que consideramos que a diferencia de otros conceptos, las construcciones que un individuo puede realizar sobre el infinito están determinadas por los procesos iterativos que se generan en cada situación y la manera como cada uno de estos procesos se coordina con el proceso de los números naturales. En el desarrollo de nuestra investigación hemos trabajado con dos versiones del problema de las pelotas de tenis, a continuación presentamos la versión que analizaremos en este trabajo.

La versión que consideraremos es la presentada por Mamolo & Zazkis (2008, p. 172) que tiene en cuenta el tiempo como un proceso iterativo: “Imagina que tienes tres botes con una capacidad ilimitada. Uno etiquetado como contenedor y los otros dos con las letras A y T. El bote contenedor tiene una cantidad ilimitada de pelotas de tenis, numeradas de la siguiente forma: 1, 2, 3,… Los botes están conectados mediante un dispositivo que al ser accionado pasa dos pelotas del bote Contenedor al bote A e inmediatamente la pelota marcada con el menos número cae al bote T. Medio minutos antes del medio día, el dispensador es presionado y las pelotas número 1 y 2 pasan al bote A y automáticamente la pelota número 1 pasa al bote T. Un cuarto de minuto antes del medio día el dispensador es presionado nuevamente y las pelotas número 3 y 4 caen al bote A y automáticamente la pelota de menor denominación, la pelota número 2, pasa al bote T. En el siguiente paso $\frac{1}{8}$ de minuto antes del medio día el dispensador es presionado y las pelotas número 5 y 6 pasan del bote contenedor al bote A e inmediatamente la pelota de menor denominación pasa al bote T. ¿Cuál es el contenido del bote A y T al medio día?”

En esta situación para cada instante de tiempo antes del medio día es posible determinar que los botes A y T tienen el mismo número de pelotas, por lo que no parece lógico considerar que el bote A esté vacío al medio día. Pero por otra parte, si pensamos en cualquier pelota numerada, por ejemplo la pelota k, ésta ha pasado al bote T $\frac{1}{2^k}$ de minutos antes del medio día; así que el bote T contiene todas las pelotas de tenis y el bote A está vacío.

La paradoja de las pelotas de tenis está determinada por la coordinación de tres procesos iterativos infinitos: iteración sobre los números naturales (P_N), el movimiento de las pelotas de tenis (P_M) y el transcurrir del tiempo (P_T) (Dubinsky et al., 2008). El proceso P_T la subdivisión repetida de un intervalo de tiempo, un minuto antes del medio día, se coordina con el proceso P_N cuando un individuo considera que para todo número natural n es posible determinar un instante de tiempo determinado por la expresión $\frac{1}{2^n}$, que corresponde a $\frac{1}{2^n}$ minutos antes del mediodía.

Por otra parte, el proceso P_M se coordina con el proceso P_N cuando el individuo puede determinar que para cada instante de tiempo n se da el movimiento de tres pelotas a través de los botes contenedor, A y T, de tal manera que éstos se clasifican en tres clases (no disyuntas): las pelotas cuya numeración es de la forma n, $2n$ y $2n-1$. Como resultado de estas coordinaciones se tienen dos nuevos procesos (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010):

$$\left.\begin{matrix} P_T \\ \\ P_N \end{matrix}\right] \longrightarrow P_1 : n \to \frac{1}{2^n} \qquad\qquad \left.\begin{matrix} P_M \\ \\ P_N \end{matrix}\right] \longrightarrow P_2 : n \to \begin{cases} n \\ 2n \\ 2n-1 \end{cases}$$

Figura 1. Nuevos procesos que se generan por la coordinación con el conjunto de los números naturales.

Los procesos P_1 y P_2 se coordinan en un nuevo proceso que permite establecer para cada instante de la forma $\frac{1}{2^n}$ con $n = 1,2,3,...,$ que las bolas numeradas $2n-1$ y $2n$ se mueven del bote contenedor al bote A y la bola n se mueve al bote T. Esta coordinación es generada por la posibilidad de establecer el movimiento de las pelotas para cada instante de tiempo determinado por la iteración sobre N que genera un proceso donde existe un movimiento continuo de pelotas a través de dicha iteración. La encapsulación de este proceso se motiva por la pregunta *¿cuál es el contenido del bote A y del bote T al medio día?* Un individuo ha logrado la construcción del objeto trascendente cuando puede aceptar que el bote A está vacío y el bote T contiene todas las pelotas numeradas.

Evidencias empíricas: Construcciones que realizan niñ@s talento en matemáticas

A continuación presentaremos las construcciones que realiza un niño considerado en su comunidad como sobresaliente en matemáticas, tomando como fundamento el análisis presentado.

En la etapa de recolección datos empíricos entrevistamos dos niños mexicanos y una niña y un niño colombianos con edades comprendidas entre 9 y 12 años. Realizamos con esta población una entrevista didáctica, donde aparecían dos situaciones: la paradoja de las pelotas de tenis y la paradoja del hotel de Hilbert. El objetivo principal de esta entrevista fue tener elementos iniciales sobre cómo los niños y niñas consideradas como talentosos en matemáticas piensan sobre el concepto de infinito. Por tanto durante las entrevistas buscamos que los estudiantes reflexionaran sobre las situaciones y sobre sus propias respuestas. Las entrevistas fueron video grabadas y transcritas para un análisis más detallado de los procesos realizados por los estudiantes. En particular mostraremos el análisis realizado por Santiago un niño de 12 años de la fundación Telegenio, al abordar la paradoja de las pelotas de tenis.

Santiago: "Es cero minutos antes del medio día, o sea el medio día"

La entrevista de Santiago es muy interesante ya que sus argumentos matemáticos le señalan que el medio día es alcanzado, pero su construcción sobre el concepto de infinito no le permite considerar que mediante la iteración infinita a través de N esto pueda suceder. Sus ideas se contradicen al pensar en el estado al infinito determinar que el bote A está vacío y todas las pelotas se encuentran en el bote T. Inicialmente Santiago empieza a considerar la imposibilidad de solucionar el problema al tener en cuenta el tiempo. Toma la realización de un número infinito de iteraciones mediante la iteración sobre el conjunto de los números naturales y el paso del tiempo. Para ello realiza la siguiente sucesión y escribe:

> Santiago: Y por lo tanto dado que al medio día… dado que:
>
> $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ ...antes del medio día $= \frac{1}{2^n}$ min, antes del ½ día
>
> Bueno es la ecuación, la fórmula de la función que siguen estos números… Ah perdón $1/2^n$.
>
> Si seguimos la tabla.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
#	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$1/32$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$1/2^{\infty} \approx 0$

> [En la última fila y columna escribe: $1/2^{\infty} = 0$ pero se arrepiente y cambia el símbolo de igualdad (=) por el de aproximación ($\approx$) y continúa diciendo:]
>
> Normalmente se toma como cero… Pero n equivale al número de veces que se acciona el interruptor y para que llegue a ser cero tendría que accionarse infinitas veces. Por lo que sucede que T suba y tiendan hasta el infinito y en el momento en el que llegue el medio día tiene infinitas bolas cada bote.

En este análisis se puede ver cómo aunque matemáticamente puede determinar que el medio día se alcanza, nuevamente el contexto del problema "accionar el interruptor" un número infinito de veces lo lleva a considerar que esto no es posible; y por tanto cambia el símbolo igualdad por el de aproximación. A continuación la entrevistadora lo lleva nuevamente a reflexionar sobre su análisis:

> Entrevistadora: Cuando tu determinas que $\frac{1}{2^{\infty}} \approx 0$, ¿A qué te refieres con que sea aproximadamente 0?
>
> Santiago: Eso es cero minutos antes del medio día, o sea el medio día.

En este punto Santiago acepta que el medio día puede ser alcanzado. Da muestras de coordinar el paso del tiempo con los números naturales pero al considerar el estado al infinito del proceso iterativo infinito resultante mediante los términos de la forma $\frac{1}{2^n}$, cree que el resultado de este proceso es el último elemento de la sucesión al reemplazar n por ∞, esto es $\frac{1}{2^{\infty}}$. Consideramos que esta forma de construcción del estado al infinito como el límite al infinito de una sucesión, no le permite relacionar su análisis matemático con el contexto de la situación planteada. Es claro que conoce un resultado $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ pero no ha comprendido lo que esto significa y por tanto rápidamente contradice sus argumentos anteriores, al pensar en la construcción de los números naturales y en el símbolo aproximadamente:

> Santiago: Pero dado que nunca puede llegar al infinito, porque siempre que tienes un número que sea infinito siempre puedes encontrar al sumar 1 siempre encuentras un número más grande.

La construcción fundamentalmente potencial sobre los números naturales, hace que Santiago ahora argumente la imposibilidad del estado final del proceso iterativo infinito, ya que está pensando que el establecimiento de un "siguiente" siempre es posible. En el siguiente extracto se muestra cómo Santiago sigue luchando con sus concepciones y sus argumentos parecen finalmente no convencerlo:

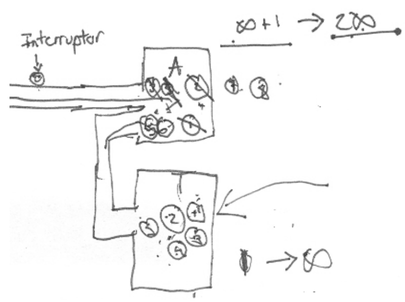
> Santiago: Porque si sigues la secuencia ½ es igual a 0.5; 0.25; 0.125; 0.0625… Punto cero, y así sucesivamente y esto cada vez es más pequeño. Y por lo tanto uno sobre dos a la n tiende… [Lo piensa unos segundos] es igual a cero. El límite cuando n tiende a infinito es igual a cero.

$$\frac{1}{2^n} \xrightarrow[\lim n\to\infty]{} = 0$$

> Entrevistadora: Bueno pero eso, ¿qué te dice sobre el problema?
>
> Santiago: O sea que nunca vas a llegar al medio día. O sea tienes la oportunidad de accionarlo las veces que quieras antes de que llegue medio día.

Santiago no encuentra argumentos para seguir sosteniendo lo que anteriormente había considerado y concluye que el medio día nunca es alcanzado ya que no es posible contar el número de veces que es posible accionar el dispositivo antes del medio día. Esto nuevamente muestra cómo su idea sobre el infinito le permite decir que es posible accionar el dispositivo tantas veces que será imposible contarlas. Esto lo lleva a concluir que el contenido de los botes es infinito, parece que este argumento lo puede aceptar por sus construcciones previas que la posibilidad de alcanzar el medio día. A pesar de los análisis de alguna manera profundos para su edad, sus argumentos matemáticos parecen debilitarse por sus ideas potenciales de construcción de los números naturales y por su idea intuitiva sobre la imposibilidad de alcanzar el estado final de un proceso iterativo infinito. A pesar de esto, la entrevistadora le pregunta: ¿En qué bote está la pelota número 100? Santiago se confunde nuevamente y dice: "Dado que llega hasta el infinito, no puedes decir al medio día está en tal bote". Reflexiona y dice: "tal vez esté en el bote T". Santiago se muestra inconforme con su razonamiento; sabe que hay algo que no se acomoda y comenta*:*

> Santiago: Es que es algo complejo, muy complejo. Porque suponiendo, aquí como vas viendo 1, 2, 3, 4 en la siguiente pasaría la 5 y así sucesivamente pero al ir pasando hasta el infinito aquí quedaría un concepto medio raro. Y aquí quedarían las bolas desde infinito más 1 hasta dos infinito y acá desde cero hasta infinito, no desde 1 hasta infinito. Por lo tanto la pelota número 100 queda aquí (Señalando el bote T) Pero eso es un concepto medio raro porque el infinito supuestamente es el número más grande y por lo tanto no hay infinito más 1 ni dos infinito.



> Entrevistadora: ¿A qué te refieres cuando dices que no hay?
> Santiago: A que no puede existir. Infinito se supone que es un número tan grande que no tiene fin. Y por lo tanto al no tener fin, infinito más 1 es igual a infinito. Y 2 infinito también es igual a infinito.

Esta situación ha puesto en jaque la idea que Santiago tiene sobre infinito, pues como él menciona: "… supuestamente infinito es el número más grande", pero al pensar en el contenido de los botes él hace una diferenciación entre dos infinitos. Esto lo lleva a decir:

> Santiago: En que las pelotas de A tendrían un número mayor. [Hace una pausa] De hecho cuando hablamos de matemáticas no habría ninguna diferencia.
> Entrevistadora: Por ejemplo, ¿dónde está la pelota número 15?
> Santiago: En el bote T.
> Entrevistadora: ¿Por qué lo puedes asegurar?
> Santiago: Porque es un número natural. Dado que es un número natural del 1 al infinito. Y al ser más que infinito todos los números del 1 al infinito estarían en este bote (Señala en su gráfico el bote T).

Consideramos que este extracto de la entrevista de Santiago es crucial ya que está considerando, aunque de manera no consciente, que todas las pelotas se encuentran en el bote T al medio día. Esto nos muestra que Santiago ha iniciado su construcción del infinito actual y aunque no logra explicarse él mismo lo que pasa, es consciente de la inestabilidad de sus argumentos potenciales por la posibilidad de ver el infinito como un todo aunque esto no lo pueda manifestar de manera específica. Al continuar con la entrevista, intentamos que Santiago llegara a considerar finalmente que todas las pelotas estaban en el bote T y que el bote A esté vacío. Para esto preguntamos nuevamente por una pelota numerada la 1328, por decisión de Santiago. Santiago empieza a determinar el instante de tiempo en el que esa pelota pasa al bote T y determina que debe haber 872456 pelotas en el tarro T. Pero siente que sus argumentos no son suficientes y sigue pensando sobre el infinito, esta vez, recurre a argumentos que conoce de física, para finalmente concluir que cada bote tiene un número infinito de pelotas de tenis.

Durante la entrevista de Santiago vemos cómo no puede coordinar el proceso de mover las pelotas de tenis con el proceso de construcción de los naturales, como lo planteamos en el análisis teórico. Al pensar en accionar el dispositivo un número infinito de veces, como una acción "real", no puede determinar este proceso y por tanto aunque en algunos momentos considera que el medio día se alcanza y que el bote T contiene todas las pelotas de tenis, no logra de manera específica considerar esto como una solución "coherente" del problema.

Discusión

Teniendo en cuenta los datos presentados por la entrevista de Santiago y de los otros niñ@s entrevistados que las construcciones que desarrollan sobre el concepto de infinito no son diferentes a las construidas por otros niños o jóvenes (Roa-Fuentes, 2010); éstas siguen estando enmarcadas en un contexto donde no aparece el estudio de este concepto de manera puntual, y donde cada individuo asume ciertas posiciones sobre el concepto determinadas por sus conocimientos sobre matemáticas o sobre otras áreas; o por ideas adquiridas en contextos diferentes al escolar. Los datos encontrados nos muestran la necesidad de pensar en un diseño que de manera directa permita pensar en la realización de una acción específica sobre el infinito, donde las ideas de tipo potencial se debiliten dentro del mismo contexto.

En el caso de las paradojas el contexto real como accionar un dispositivo o ubicar personas (por ejemplo en la paradoja del Hotel de Hilbert), de alguna manera ha limitado el razonamiento de Santiago respecto a considerar los procesos iterativos infinitos identificados como acabados. Por tanto es necesario pensar en situaciones que en el contexto propio de las matemáticas posibiliten ver el estado último de un proceso iterativo infinito como un todo, en donde la "realidad" no se oponga al estado final del proceso iterativo infinito (Dubinsky et al., 2008).

Un aspecto importante de esta primera fase de investigación tiene que ver con la necesidad de la construcción del conjunto de los números naturales como un proceso iterativo infinito. Los estudiantes que no lograron profundizar sobre la solución de las situaciones, mostraron la imposibilidad de interiorizar acciones específicas sobre los procesos involucrados por su concepción sobre los naturales, ya que sólo podían pensar en la realización de un cierto número de acciones pero no en un número infinito de ellas.

Con el análisis de los resultados hemos podido plantearnos preguntas que sin duda nos ayudarán a determinar los próximos diseños así como la población. Por ejemplo, un elemento que surge permanentemente es el uso del símbolo ∞; por tanto nos interesa determinar qué construcciones mentales han realizado nuestra población sobre el símbolo ∞. Ya que este aparece en las entrevistas cuando es necesario realizar algún tipo de "acción" o transformación como una operación aritmética; creemos que este símbolo aparece para dar algún sentido de objeto a "aquello que no tiene fin" sobre el cual es posible realizar ciertas acciones. De esta manera los estudiantes hacen al símbolo ∞ una asignación de "número" uno muy grande, pero que es necesario representar de alguna manera. Esta dualidad con el uso del símbolo en las ideas de los estudiantes respecto al infinito como un proceso y como un objeto, es un asunto por determinar y analizar en nuestro trabajo. Inicialmente pensamos que un análisis de lo que significa este símbolo en el contexto matemático puede ayudarnos más adelante a dar solución a este cuestionamiento.

En general, podemos decir que el análisis de los datos encontrados en las entrevistas ha validado hasta cierto punto nuestro análisis teórico inicial, ya que encontramos evidencias de las necesidades de las construcciones que habíamos considerado como indispensables y de concepciones de tipo acción y proceso según lo habíamos planteado inicialmente. Sin embargo, es necesario pensar con detalle en el tipo de acciones que deben ser motivadas en nuestra población para encontrar evidencias o generar en las entrevistas didácticas la encapsulación del proceso iterativo en un objeto trascendente, así como determinar el uso que los individuos hacen del símbolo ∞ que consideramos nos puede dar luces sobre este complejo mecanismo mental.

Por otra parte surge de este trabajo la necesidad de plantear algunas estrategias metodológicas que generen desde edades tempranas la encapsulación de los números naturales como un proceso iterativo infinito en un objeto. Esto debe ser una meta dentro del sistema educativo ya que según nuestros análisis, que esperamos apoyar con la finalización de este proyecto, éste es un requisito previo indispensable para la construcción del infinito como un objeto, el infinito actual.

Referencias

Brown, A., McDonald, A. & Weller K. (2008). Step by step; Infinite iterative processes and actual infinity. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 15, 117 – 144.

Dubinsky, E., Weller, K., Stinger, K. & Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1(1), 99 – 121.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58 (3), 335 – 359.

Dubinsky, E., Weller, K., MacDonald, M. & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (2), 254 – 266.

Mamolo, A. (2009). How to act? A question about encapsulating infinity. *Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.* Raleigh, North Carolina.

Mamolo, A. (2008). Constrained by knowledge: The case of infinite ping – pong balls. Proceedings of the 11th Conference for Research on Undergraduate Mathematics Education, San Diego, CA.

Mamolo, A. & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 167- 182.

Oktaç, A., Roa-Fuentes, S. & Rodríguez, M. A. (2011). Equity issues concerning gifted children in mathematics: A perspective from Mexico. En B. Atweh, M. Graven, W. Secada & P. Valero (eds.), *Mapping Equity and Quality in Mathematics Education*.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç. (2010). El infinito: Una mirada desde la teoría APOE. Primer Coloquio de Doctorado, CINVESTAV-IPN, México.

Roa-Fuentes, S. (2010). El infinito: Un análisis teórico de niñ@s talento en matemáticas. Documento pre doctoral. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzado del IPN, México.

Secretaría de Educación Pública. (2006). Propuesta de atención a alumnos sobresalientes. SEP, México.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. & Stenger, C. (2004). Intimations of Infinity. *Notices of the AMS*, 51(7), 741 – 750.