Ronaldo Barros Orfão
Universidade Bandeirante-Uniban
Brasil
ronaldobarros63@hotmail.com

Um trabalho investigativo para o Cálculo do Volume

Resumo

Este trabalho consiste em investigar a relação de volume em dois cilindros de mesmo material organizado de maneiras diferentes, com a finalidade de discutir vários conceitos matemáticos e aguçar a curiosidade dos alunos. Foi aplicado em 5 turmas, sendo duas de 8º série do Ensino Fundamental e 3 de 3º ano do Ensino Médio, com uma aula de 50 minutos para experimentação e 3 aulas na sala de informática para a validação.(vídeo, youtube, prof. Ronaldo).

Palavras chave: volume, educação, matemática, cálculo.

Objetivo

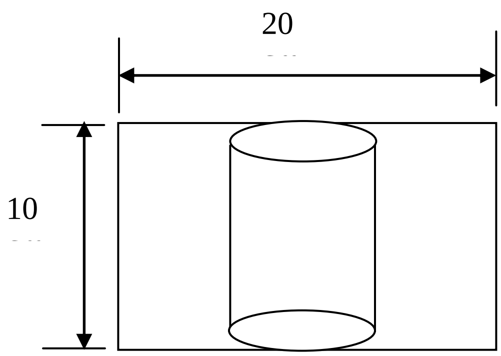
O objetivo deste trabalho é discutir os vários conceitos matemáticos e aguçar a curiosidade dos alunos através de uma experiência para o cálculo do volume de um cilindro.Tal experiência foi ministrada para alunos da oitava série e terceiro ano do Ensino Médio, em uma escola pública estadual no município de Suzano, grande São Paulo.

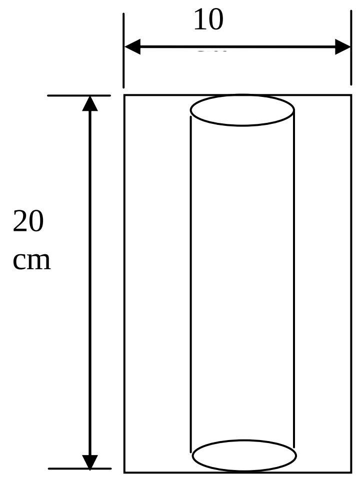
Justificativa

Leciono matemática há 16 anos, na escola básica e quando trabalho geometria (área e volume) de forma abstrata, sinto que por mais que eu me esforce não consigo atingir a maioria dos alunos, tanto pela motivação e principalmente pelo aprendizado. Em 2007, quando ministrava aula no terceiro ano do Ensino Médio, trabalhei de forma conceitual com a seguinte questão:

> (Enem 2006, Exame Nacional do Ensino Médio) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm x 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados

opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.





Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

a) A o triplo.
b) O dobro
c) Igual
d) A metade
e) A terça parte

Devido à experiência, constatei que os alunos não aprendem somente ouvindo. Por mais dinâmico que seja o professor, consegue prender a atenção dos jovens por no máximo 30 minutos. Assim sendo, procurei encontrar um meio de fazer com que os alunos participassem mais efetivamente das aulas.

Optei por retomar novamente este exercício, trabalhando de maneira empírica, envolvendo uma série de conceitos matemáticos e abordagens para a resolução, fazendo com que os alunos criassem mecanismos para a discussão e abandonassem a antiga prática de serem apenas meros espectadores. Fui fornecendo as estratégias conforme fossem feitas as perguntas.

Problema:

Tomando-se duas folhas de tamanho A4, uma colada em "pé" e outra colada "deitada" , com o cuidado de perder o mínimo da folha ao colocar a cola, formam-se, então, dois cilindros.Uma porção de aproximadamente dois quilos de arroz será colocada nos cilindros. Pergunta-se:

Qual cilindro conterá maior volume, ou será que ambos terão a mesma capacidade?

Com as duas folhas já coladas na mesa do professor e com toda a atenção da sala voltada para a experiência, inicia-se a discussão.

Primeiro: Como colocar o arroz dentro da folha de maneira que se forme o mínimo de sujeira possível? Neste momento, os alunos sugerem algumas possibilidades:

1- Professor improvise um fundo tampando com a mão ou com uma apostila.

2- Coloque o arroz em uma folha e depois mede, só depois coloque o arroz na outra.

3- Coloque o cilindro mais fino dentro do outro mais grosso, coloque o arroz no mais fino e encha até a boca, depois é só levantar o cilindro fino e todo o arroz usado ficará no mais grosso, então veremos em qual cabe mais.

A última ideia foi aceita por todos prontamente e um segundo problema surgiu: como despejar o arroz no cilindro de maneira rápida e fácil? Os próprios alunos sugerem que se improvise um funil. Neste momento, foi lembrado aos discentes que além do funil ter uma forma viável, apresenta, também, as diferenças entre os diâmetros do fundo e da boca,e com um pouco de habilidade é fácil controlar a quantidade de arroz a ser despejada.

Com o cilindro mais fino cheio e com os alunos curiosos para saber em qual cilindro “cabe mais”, pedi para que eles dissessem suas opiniões e começou-se a discussão:

1) O cilindro “mais fino cabe mais”, porque ele é mais alto.

Esta resposta foi dada por 15% dos alunos das 8º séries e 7% dos alunos do 3º ano .

2) O cilindro mais “grosso” cabe mais, porque ele tem mais espaço na sua lateral e supera o mais fino.

Tal reposta foi dada por 5% dos alunos das 8º séries e 5% dos alunos do 3º ano.

3) Nos dois cabem a mesma quantidade, pois os cilindros foram feitos de uma mesma folha de sulfite.

Esta resposta foi dada por 80% dos alunos das 8º séries e 88% dos alunos do 3º ano.

Neste momento, com todos voltados para a experiência, propus a seguinte discussão:

Chamando de cilindro “Fino” e cilindro “Grosso” , temos uma das três possibilidades:

a) Fino < Grosso
b) Fino > Grosso
c) Fino = Grosso

Em seguida, lancei o seguinte questionamento:

Quem, na história da matemática, usava o recurso da Dupla Redução ao Absurdo?

Várias respostas foram colhidas, tais como:“Não tenho ideia”,”quem foi?”e “Esse cara é um gênio, pois eliminando duas por absurdo, a terceira só pode ser verdadeira.”

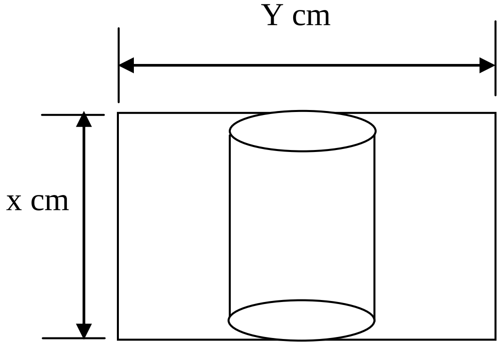
Aproveitei a oportunidade para lembrá-los de que falávamos de Arquimedes de Siracusa, um dos maiores nomes da matemática.Um dos alunos perguntou se se tratava do mesmo que havia gritado “eureca!

Neste momento, discutimos uma passagem de Arquimedes relatada, segundo Garbi (2007, p. 80).

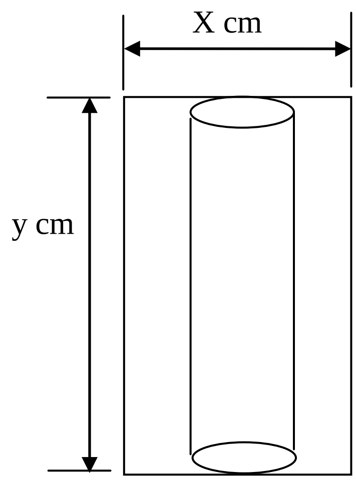
Com os alunos curiosos para saber em qual dos cilindro cabia mais arroz, levantei o cilindro “fino” e todos constataram que tal cilindro representava, aproximadamente, 2/3 do cilindro mais grosso. Todos se surpreenderam, pois a maioria da turma havia levantado a falsa hipótese de que em ambos os cilindros caberia a mesma quantidade de arroz.

Na aula seguinte, levei os alunos à sala de informática, para usar a planilha do EXCEL.Como não havia computadores suficientes, dividi os alunos em duplas e começamos a seguinte discussão:

O comprimento da circunferência é calculado por: $C= 2\pi r$, a área por: $A=\pi r^2$ e o volume por: $V= \pi r^2 h$, então temos que escrever, a altura em função do raio, tomando como referência a folha de sulfite, para não perder a generalidade e trabalharmos com a álgebra, estipulamos a altura “x” e o comprimento “y”, (tinha a intenção de construir uma família de cilindros)



grosso



fino

Desenvolvendo os cálculos teremos:

Cilindro Grosso

$y= 2\pi r$

$r = \frac{y}{2\pi}$

$V_G= \pi r^2 x$

$V_G= \pi(\frac{y}{2\pi})^2 x$

$V_G= \pi(\frac{y}{2\pi})^2 x$

$V_G= \frac{y^2}{4\pi} x$

Cilindro Fino

$x= 2\pi r$

$r = \frac{x}{2\pi}$

$V_F= \pi r^2 x$

$V_F= \pi(\frac{x}{2\pi})^2 y$

$V_F= \pi(\frac{x}{2\pi})^2 y$

$V_F= \frac{x^2}{4\pi} y$

Para mostrar o quanto o cilindro fino é menor que o outro, dividimos um pelo outro, fazendo o valor do cilindro magro dividido pelo valor do cilindro gordo $\frac{V_F}{V_G} = \frac{x}{y}$.

Com isto, verificou-se que a diferença entre os volume é de x/y.Como a folha tipo A4 mede (29,7 x 2,1)cm arredondando para 20 cm x 30 cm, verificou-se que a diferença de volume tem uma razão de 2/3.

Percebi que boa parte dos alunos, "aceitaram" o resultado 2/3, e caso x=y então teríamos o mesmo volume. Assim, com a planilha eletrônica, verificamos as expressões:

$V_G = \frac{y^2}{4\pi}$ x,"x" é a altura constante igual a 20 cm e "y" representa o comprimento da folha variável.

$V_M = \frac{x^2}{4\pi}$ y,"y" é a altura constante igual a 30 cm e "x" representa o comprimento da folha variável.

Tabela 1:

y comprimento	x altura	VG= $\frac{y^2}{4\pi}$ x		x comprimento	y altura	VM= $\frac{x^2}{4\pi}$ y
A2	B2	=(A2*A2*B2)/4*3,14		E2	F2	=(E2*E2*F2)/4*3,14
5	20	392,5		5	30	588,75
10	20	1570		10	30	2355
15	20	3532,5		15	30	5298,75
20	20	6280		20	30	9420
25	20	9812,5		25	30	14718,75
30	20	14130		30	30	21195

Com as mesmas expressões, mantemos o comprimento constante e fazemos variar a altura.

Tabela 2.

y comprimento	x altura	$V_M = \frac{x^2}{4\pi}$ y		x comprimento	y altura	$V_G = \frac{y^2}{4\pi}$ x
A13	B13	=(A13*A13*B13)/4*3,14		E13	F13	=(E13*E13*F13)/4*3,14
20	5	1570		30	5	3532,5
20	10	3140		30	10	7065
20	15	4710		30	15	10597,5
20	20	6280		30	20	14130
20	25	7850		30	25	17662,5
20	30	9420		30	30	21195

Com estes dados, aprendemos a construir fórmulas na planilha eletrônica, validamos que a razão de proporcionalidade entre os volumes no experimento (linhas destacadas) é de 2/3.

Após a experiência, ficou claro para os alunos que a relação que existe entre os volumes é proporcional ao comprimento e a altura do retângulo que formam o cilindro. Mas por que há diferença entre os volumes?

Para responder esta questão, voltamos novamente às expressões $V_G = \frac{y^2}{4\pi}x$ e $V_F = \frac{x^2}{4\pi}y$, como $y>x>1$, retomamos o estudo de funções do segundo grau, para estudar o seu crescimento.

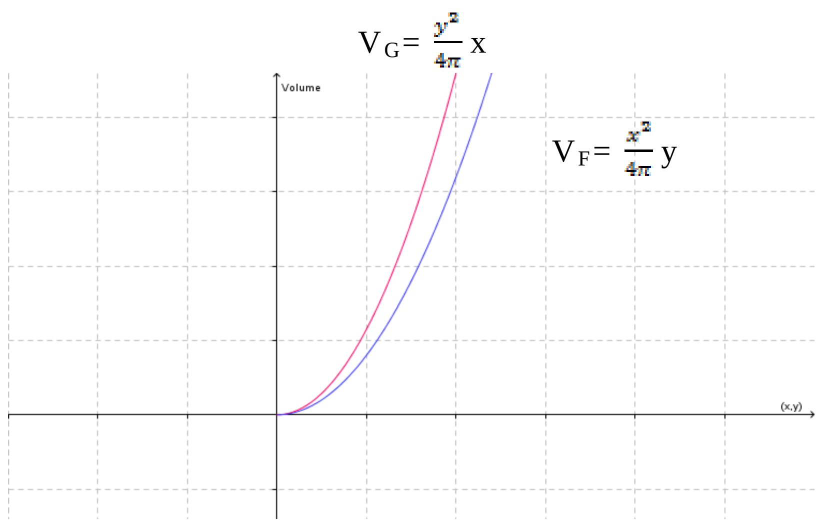
No experimento: $y = 30$, então: $\frac{30}{4\pi} \cong 2{,}3$

$X = 20$, então: $\frac{20}{4\pi} \cong 1{,}6$

Nas expressões: $V_G = \frac{y^2}{4\pi}x$ quando y é variável, então $\frac{x}{4\pi}$ é constante, $V_G = 2{,}3y^2$

$V_F = \frac{x^2}{4\pi}y$ quando x é variável, então $\frac{y}{4\pi}$ é constante, $V_F = 1{,}6x^2$

Na função do 2º grau $f(x) = ax^2$, o coeficiente "a" informa o quanto a parábola é mais aberta ou fechada, cresce mais ou menos rápido; como 2,3>1,6, então o cilindro "gordo" terá volume maior, verificando esta função no Geogebra, temos:



Conclusão:

Esta atividade foi desenvolvida em séries diferentes no ano de 2010, na oitava série, estávamos interessados em introduzir o conceito de função do 2º grau e suas variações, no terceiro ano objeto de estudo foi o estudo de geometria espacial.

Ao apresentar esta atividade, os alunos verificaram que o resultado não faz parte do senso comum, pois com a mesma folha organizada de forma diferente, obtemos volumes diferentes. Tal fato causou uma inquietação por parte dos aprendizes e foi possível trabalhar a razão da diferença de volumes.

Verifiquei que ao sentir-se desafiado, o aluno motiva-se a descobrir o "porque" de fenômenos que desconhece, e ao deparar com situações novas ou cálculos sofisticados, os próprios alunos verificam que o erro faz parte do aprendizado e tais erros não podem ser encarados como um fator de desmotivação para prosseguir em uma investigação.

Ao aplicar tal experiência, verificou-se também, que ao questionar os alunos, é importante que as opiniões sejam colhidas por escrito para que todos sejam motivados a participar e evite-se a repetição da opinião dos colegas sem o devido desenvolvimento do raciocínio.

Apresentei esta atividade a vários colegas e para minha surpresa, vários professores, inclusive da disciplina de matemática, equivocaram-se e afirmaram que os volumes seriam iguais.

Ao término desta atividade, consegui trabalhar com os seguintes conceitos: comprimento e área de uma circunferência, volume, geometria plana e espacial, razão e proporção, construção e interpretação de planilha eletrônica, estudo da variação de uma função do 2º grau. Considerei muito bom o índice de aproveitamento.

Ao término da atividade, apliquei a questão do ENEM, obtendo resultados muito melhores do que no ano anterior em que havia discutido a questão somente de forma abstrata.

Referências Bibliográficas

Boyer, C. B. (1974). História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide, São Paulo, Editora Edgard Blucher, 7º Edição.

Garbi, G. G.(2007) A Rainha das Ciências; um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática- 2º edição, São Paulo: Editora e livraria da Física.

ENEM(2006), Exame Nacional do Ensino Médio, Ministério da Educação.

Maor, E.(2008) A História de um Número: e, tradução Jorge Calife; 4º edição – Rio de Janeiro.

Machado, A.S.(1988), Áreas e volumes, Matemática Tema e Metas, vol. 4, Editora Atual, São Paulo

Nogueira D., Mendonça P. P. M.,(1984) Análise Matemática: Introdução- Rio de Janeiro: FAE (Fundação de Assistência ao Estudante) , 3ª edição.

RPM, Revista do Professor de Matemática, número 18.

http://revistaescola.abril.com.br/preview.shtml, acesso em 2/11/2008.

http://mathforum.org/brap/wrap2/math.htm, acesso em 15/12/2010.