Atividades com Geogebra para o ensino de Cálculo

Frank Victor **Amorim**
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Brasil
frank.amorim@ifrn.edu.br
Giselle Costa de **Sousa**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
giselle@ccet.ufrn.br
Jesus Victoria **Salazar**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
flores@ccet.ufrn.br

Resumo

Da nossa prática no ensino de Cálculo Diferencial Integral I (CDI I), percebemos a dificuldade dos alunos no entendimento de noções intuitivas de Limite, Derivada e Integral. Neste sentido, oferecemos uma alternativa para abordagem de tais conceitos, por meio desta oficina que apresenta uma possibilidade de tornar essas ideias mais claras através da realização de uma sequência de atividades utilizando o *Software* GeoGebra. De fato, isto ocorre, pois o ambiente de Geometria Dinâmica possui uma janela algébrica e gráfica simultaneamente bem como, oferece dinamismo e uma série de ferramentas específicas que possibilitam uma melhor visualização por parte dos alunos além de apresentar um ambiente de fácil manipulação tanto para os alunos como para os professores. Diante disso, pensamos que este ambiente pode propiciar uma melhor compreensão do que está sendo tratado na disciplina de CDI I. Neste sentido, serão apresentadas quatro atividades envolvendo: Funções, Limites, Derivadas e Integrais.

Palavras chave: ensino de cálculo, geoGebra, função, limite, derivada, integral.

Introdução

Esta oficina propõe uma alternativa para o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I), à luz do uso do ambiente de Geometria Dinâmica, mais especificamente o *software* GeoGebra.

De fato, em um mundo tecnológico, é válido ressaltar que existem projetos disponibilizados pelo Ministério de Educação e Cultura (MEC) e pelas universidades de um modo geral que estimulam o uso destes recursos. No âmbito das universidades, Richit (2005, p. 13) afirma que,

> em geral, têm investido significativamente na implementação de laboratórios de informática, em laboratórios de ensino, na exploração de *softwares*, na produção de novos produtos computacionais e também na qualificação do corpo docente e, com isso, alguns resultados já têm sido verificados. Por exemplo, tais resultados podem ser vislumbrados por meio de algumas modificações nas práticas pedagógicas do professor de Matemática, na sala de aula, na reestruturação curricular e na redefinição dos processos de formação docente.

Apoiados nestes investimentos e resultados almeja-se que o professor e o aluno da educação básica e do ensino superior tenham subsídios para uma formação empreendedora e crítica, é que construímos a presente oficina.

Para tanto tomamos como base os pressupostos dos trabalhos de Borba e Penteado (2007), bem como Araújo (2002) entre outros, sobre o entendimento a respeito da construção da linguagem matemática e seu uso cotidiano pelos educando.

Vale ressaltar que as atividades da oficina serão apresentadas em quatro blocos, como descriminados a seguir:

Tabela 1

Organização das atividades em blocos

Bloco 01	Consistirá numa atividade de familiarização com o *software* via introdução do conceito de função. Nesse o momento os participantes que nunca tiveram um contato com este ambiente de Geometria Dinâmica costumam apresentar algumas dificuldades básicas, por isso, o tempo previsto para esse momento é de trinta e cinco minutos.
Bloco 02	Neste bloco o aluno terá uma atividade que aborde a noção intuitiva de limite e continuidade. Como normalmente o participante já está familiarizado o tempo estimado é de trinta minutos, mesmo tendo que utilizar algumas ferramentas novas.
Bloco 03	O bloco traz uma sequência de atividades que trata da relação da derivada com o seu conceito geométrico. É um momento muito rico, porque o aluno muitas vezes não compreende bem esta relação. Costuma-se utilizar nesse momento da atividade trinta minutos.
Bloco 04	Neste momento da oficina abordaremos uma noção introdutória do conceito de integral definida associada à área de regiões planas. Como em geral os alunos já estão entendendo melhor o funcionamento do *software*, costuma-se gastar cerca de vinte e cinco minutos.

A informática como recurso didático

Uma das principais discussões atuais no Ensino de Matemática está relacionada à utilização de ferramentas computacionais em sala de aula. Sabemos que a informática é um recurso de grande potencial pedagógico que pode auxiliar o professor na tarefa de ensinar e possibilitar ao educando um conhecimento dinâmico.

Segundo Gravina e Santarosa (1998), um ambiente educacional informatizado possibilita ao aluno a construção do seu conhecimento, pois com auxílio de um recurso computacional o estudante pode modelar problemas e fazer simulações, além de visualizar uma situação que muitas vezes não seria possível sem essa ferramenta. Ambientes informatizados proporcionam um conhecimento matemático dinâmico, contribuindo para a apreensão do significado dos conteúdos matemáticos, bem como uma maior interação do aluno com o conhecimento que está sendo construído e favorecem a simulação, permitindo ao educando expressar seus pensamentos e ideias.

Segundo Fonseca e Gonçalves (2010) a utilização de *softwares* facilitam a compreensão dos conceitos matemáticos, em particular conceitos de CDI I, faz com que possamos explorar por meio de construções que podem ser manipuladas, deixando de ser estáticas e proporcionando uma nova visão da matemática. Contudo, para que esse *software* contribua para a obtenção de resultados positivos dessa natureza em sala de aula, é imprescindível que os professores adotem a postura de mediadores do processo.

Ainda de acordo com o mesmo autor, o docente é indispensável no processo de aprendizagem com auxílio de ferramentas computacionais, pois é ele o responsável por motivar os alunos e conduzi-los na busca de descobertas. Ao educador, enquanto mediador da aprendizagem cabe explorar junto com o estudante o conhecimento matemático que está sendo construído, assim como, os conceitos matemáticos envolvidos. A observação e a percepção devem ser estimuladas para desenvolver no discente a capacidade de criticar e questionar a matemática como um conhecimento em construção. É importante incentivar também a justificação, para desenvolver no educando a capacidade de argumentação das suas ideias.

Logo, a utilização de recursos computacionais nas aulas possibilita a exploração dos conteúdos matemáticos a partir do campo visual do aluno. Partindo de uma imagem, pode se explorar o conceito matemático envolvido em uma situação problema. (FONSECA; GONSALVES, 2010).

Vale enfatizar, que são estas concepções que geram a abordagem do bloco de atividades proposto para a oficina, ou seja, o aluno constrói, investiga e é conduzido a descobertas orientadas pelos ministrantes (professores da oficina).

O Cálculo e seu ensino

O elevado índice de reprovação em Cálculo tem levado muitos pesquisadores a se preocuparem com o desempenho dos alunos. Segundo Nasser (2007), as pesquisas pautadas nesse assunto, destacam principalmente as dificuldades na compreensão de função, de limite, de derivada, do Teorema Fundamental do Cálculo e a forma que os alunos estudam.

Dentro da nossa prática profissional, temos percebido que os alunos apresentam uma dificuldade específica no entendimento das noções intuitivas de limite, derivada e integral. Com relação a limites de uma função muitos ainda apresentam dificuldades em diferenciar imagem de uma função com o seu limite em um ponto, no que diz respeito à derivada uma das dificuldades está em relacionar a parte algébrica com a gráfica e com relação à integral o problema este em relacionar a área limita por uma função ou entre funções.

Rezende (2003, p. 07) ressalta que a dificuldade na aprendizagem desses dois últimos acontece devido à falta de amadurecimento das ideias de infinito e o entendimento que o limite de "uma sequência **tende**, mas não alcança, o seu ponto limite".

Considerando a relevância da utilização de recursos computacionais na sala de aula e tendo em vista a importância da abordagem conceitual de Cálculo, propomos esta oficina com objetivo de apresentar uma proposta para o ensino de Cálculo a partir de sua interpretação geométrica, explorando graficamente suas ideias principais supracitadas, para que os alunos possam visualizar e investigar. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p.13), "investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades".

Por que o GeoGebra?

Para essa oficina, fez-se a opção pelo *software* GeoGebra por se tratar de um ambiente de Geometria Dinâmica livre com alto potencial didático e pedagógico, além de poder ser utilizado nos sistemas operacionais *Windows* e *Linux* e reunir ferramentas para Geometria, Álgebra e Cálculo.

Com as atividades apresentadas com o uso do *software* esperamos que o aluno alcance uma melhor compreensão possibilitada pelo dinamismos e manuseio do GeoGeobra que na sala de aula com o quadro convencional é impossível de acontecer, e assim amenizar tais dificuldades dos mesmos apresentadas no ensino de CDI I, posto anteriormente. Isso já foi feito com alunos da UFRN e em outros encontros mostrando certo entusiasmo dos alunos apresentados em alguns comentários do tipo: "agora entendi o que significa aquele amontoado de contas que eu fazia em sala de aula" ou "entendo agora o significa de determinados resultados" entre outros.

Sua interface dispõe de uma janela de Álgebra e outra de Geometria, em que cada objeto geométrico criado possui uma correspondência algébrica, ou seja, existe uma interatividade entre a zona gráfica e zona algébrica de modo que tudo que é construído na zona gráfica o próprio *software* algebriza mostrando uma expressão algébrica que represente tal figura construída. Por ser um programa de Geometria Dinâmica, o GeoGebra facilita a investigação dos alunos, que podem movimentar os objetos e acompanhar as variações ocorridas, fazer conjecturas e testá-las, além de relacionar os conteúdos algébricos e geométricos. A sua manipulação estimula docentes e discentes a tentar usá-lo em suas práticas, porque quando é feito qualquer tipo de manipulação simultaneamente ocorre a alteração da figura sem alterar sua estrutura de construção. Entre outros motivos menos relevantes.

Desenvolvimento

As atividades seguirão o roteiro descrito no quadro abaixo, onde cada momento iremos dispor de uma hora e trinta minutos aproximadamente:

Tabela 2

Organização do experimento

Sessões do Experimento			
Sessões	Nome da atividade	Momentos	Conteúdo

I	**Domínio e Imagem de uma Função utilizando o *software* GeoGebra.**	1º	• Familiarização com o software; • Domínio e imagem de uma função.
II	**Noção intuitiva de limite e continuidade de uma função utilizando o *software* GeoGebra.**	2º	• Limite de uma função em um ponto; • Continuidade de uma função.
III	**Construindo a ideia de Derivadas, a partir de retas tangentes, utilizando o *software* GeoGebra.**	3º	• Derivada de uma função em um ponto; • Função derivada.
IV	**Introdução do conceito de Integral definida, utilizando o *software* GeoGebra**	4º	• Relação da integral definida com a área determinada pelo gráfico da função.

Tem-se como público alvo alunos do ensino superior e professores. Para a realização das atividades será necessário um projetor multimídia e um laboratório de informática, contendo o *software* GeoGebra instalado com o número de máquinas compatível aos participantes. O objetivo é auxiliar os alunos na compreensão, através de visualização, manuseio e investigação, das ideias de função, limite, derivada e integral. As atividades também podem ser uma possível proposta didática para professores de Cálculo e como já mencionado, estão organizadas em 4 blocos, um com função, outro de atividade com limite e continuidade, mais um explorando conceitos de derivada e o último com noções de integral definida. Tais atividades segue no apêndice (A).

Bibliografia e referências

Araújo, Jussara de Loiola. *Cálculo, tecnologias e modelagem Matemática: as discussões dos alunos*. Rio Claro, 2002. (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista.

Borba, M. C.; Penteado, M. G. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

Fonseca, Daila Silva Seabra de Moura; Gonçalves, Daniele Cristina. *O Uso do GeoGebra no Ensino de Limite.* In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10., 2010. Bahia. *Anais*..., 2010. CD-ROOM.

Gravina, M. A., Santarosa, L. M. *A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados*. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998. Disponível em: http://ism.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200342413933117.pdf>. Acesso em: 18 jan. 2010.

Nasser, L. *Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de Cálculo*. IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/mesa.html>. Acesso em: 15 nov. 2009.

Ponte, J. P., Brocado, J., Oliveira, H. *Investigação Matemática na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 152p.

Rezende, W. M. *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. In: MACHADO, N.; CUNHA, M.(org) Linguagem, Conhecimento, Ação – ensaios de epistemologia e didática. Escrituras, São Paulo, 2003. Disponível em: <http://www.nilsonmachado.net/lca19.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2009.

Richit, A. *Projetos em Geometria Analítica usando software de geometria dinâmica*: repensando a formação inicial docente em Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

Apêndice A

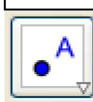
Domínio e Imagem de uma Função utilizando o *software* GeoGebra – atividade 01

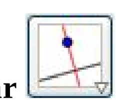
1 – Objetivos:

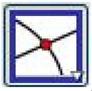
- Promover a familiarização dos alunos com o *software* GeoGebra.
- Inserir funções no ambiente do *software* GeoGebra.
- Determinar a imagem de valores do domínio de uma função.
- Ampliar a compreensão dos conceitos abordados em sala de aula por meio da visualização e manuseio propiciada pelo *software* GeoGebra.

2 – Apresentação e desenvolvimento das atividades:

1) Na caixa de **entrada de comandos** (abaixo na tela do ambiente do GeoGebra) insira a função f(x) = x^3 - 2*x + 1 em seguida tecle *enter*, perceba que aparecerá a função. OBS.: o acento circunflexo significa potência e o asterisco multiplicação.

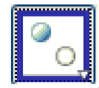
2) Na barra de ferramentas na opção  (2ª janela), escolha a opção **novo ponto** e clique sobre o eixo x, perceba que esse ponto é dependente do eixo x não pode sair dele, pode apenas ser movimentado sobre ele, a esse ponto será atribuído o símbolo A; (esse ponto também aparecerá na zona algébrica com suas coordenadas)

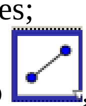
3) Na barra de ferramentas selecione a opção **reta perpendicular**  (4ª janela), em seguida clique no ponto A e no eixo x; (aparecerá uma reta perpendicular ao eixo x interceptando o ponto A)

4) Na segunda janela da barra de ferramenta selecione a opção **interseção de dois objetos** , selecione o traçado gráfico e a reta perpendicular, obteremos assim o ponto B;

5) Na opção reta perpendicular (4ª janela) selecione o ponto B e o eixo y;

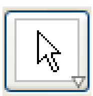
6) Com a ferramenta ponto de intersecção (2ª janela) selecione interseção entre duas linhas, o eixo y e a última reta perpendicular encontrando assim o ponto C (que pertence ao eixo y);

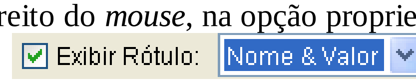
7) Na última janela da barra de ferramentas selecione a opção , **exibir/ esconder objeto** e selecione as retas perpendiculares;

8) Na terceira janela selecione a opção , segmento definido por dois pontos em seguida selecione o ponto A e o ponto B. (verá que será criado um seguimento de reta do ponto A ao ponto B);

9) Faço agora um seguimento do ponto B ao ponto C, utilizando o mesmo procedimento do item anterior;

10) Com o botão direito do *mouse Click* em cima do seguimento AB selecione a opção propriedades, aparecerá uma janela, escolha o opção estilo esse estilo é o estilo do seguimento selecionado escolha a opção tracejado, faça o mesmo para o seguimento de B até C;

11) Em seguida escolha a opção **mover** (1ª janela), primeira opção da barra de ferramentas ;

12) Nos pontos A e C, *click* com o bota o direito do *mouse*, na opção propriedades em **exibir rótulo** selecione a opção **nome e valor**, veja 

; Com a opção mover *click* no ponto A e movimente-o ao longo do eixo x. Com esta ferramenta, determine a imagem dos seguintes valores de x, (-1; 0; 1,5; 2; 3,4).

13) Ainda com a mesma ferramenta, obtenha os interceptos x e y da função apresentada, se existirem.

Noção intuitiva de limite e continuidade de uma função utilizando o *software* GeoGebra – Atividade 02

1 – Objetivos:

- Visualizar graficamente o limite de uma função, bem como os limites laterais manuseando a ferramenta "**mover**" (comando da 1ª caixa de ferramentas);
- Estudar a existência ou não do limite no ponto;
- Verificar a continuidade de uma função em um determinado ponto;
- Esboçar funções definidas por mais de uma expressão utilizando o "**Se**", no comando de entradas;
- Descobrir valores que tornam a função contínua fazendo uso da ferramenta "**Seletor**" (comando da 10ª caixa de ferramentas) do GeoGebra e de manuseio com a ferramenta "**mover**" (comando da 1ª caixa de ferramentas);

2 – Apresentação e desenvolvimento das atividades

1) Seja a função dada por $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

2) Para construir o gráfico de uma função como essa, devemos inserir na caixa de entrada o seguinte comando: se [x<1, 2*x, 1] e tecle *Enter* no final.

3) Observem o gráfico obtido da função f. O que acontece com os valores de y, quando:

3.1 os valores de x tendem a 1 pela direita? (inserindo um ponto no eixo x a direita de 1, encontrando sua imagem e arrastando com a ferramenta mover)

$\lim_{x \to 1^+} f$ = ____

Que passos do *software* GeoGebra devem ser usados nesta investigação?

____

3.2 os valores de x tendem a 1 pela esquerda?

$\lim_{x \to 1^-} f$ = ____

4) De acordo com os itens anteriores o limite de f existe, quando x tende a 1? justifique.

$\lim_{x \to 1} f$ = ____

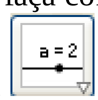
5) De acordo com o item anterior, o que você diria sobre a continuidade dessa função? Justifique.

Ao construir esses gráficos com o GeoGebra, você verifica alguma limitação desse *software*?

3 – Apresentação e desenvolvimento das atividades

1) Considere a família das funções definidas por $f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \leq 1 \\ 2x - 3, & x > 1 \end{cases}$.

2) Utilizando o GeoGebra construa o gráfico da função. (Dica: faça como na atividade 01.

Antes de inserir as funções, insira o "**seletor**" k, para isso, clique em 

(5ª janela), que é o penúltimo grupo de ferramentas do GeoGebra. Renomei o "**seletor**" para k e mantenha a variação de -5 a 5).

2.1 Movendo o "**seletor**" K, é possível investigar para qual valor de k a função $f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \leq 1 \\ 2x - 3, & x > 1 \end{cases}$ é contínua? Caso sim, determine este(s) valor(es). Caso não, justifique e indique o(s) ponto(s) de descontinuidade.

2.2 De acordo com o gráfico, para k = -1, o que acontece com a função nessa situação? Existe o limite de f quando x tende a -1? Justifique sua resposta.

Construindo a ideia de Derivadas, a partir de retas tangentes, utilizando o *software* GeoGebra – atividade 03

1 – Objetivos:

- Construir a ideia de derivadas a partir de retas tangentes;
- Entender a ideia de função derivada;
- Construir o gráfico da função derivada a partir da função principal.

2 – Apresentação e desenvolvimento das atividades:

1) Insira a função $f(x) = x^3 - 2x + 4$ na caixa de entrada.

2) Na opção *seletor (10ª janela)*, clique na janela geométrica. Na caixa exibida, atribua o valor de **a** variando de -5 (min) a 5 (max). Em seguida, clique em aplicar.

3) Insira o ponto A no gráfico colocando na caixa de entrada a expressão A = (a, f(a)), em seguida tecle *Enter*.

4) Utilizando a opção reta tangente (4ª janela) *tecle* no gráfico da função e no ponto A, assim obterá a reta tangente (b) ao gráfico neste ponto.

5) Na opção inclinação (8ª janela) *tecle* na reta tangente, assim obterá o valor de m que corresponderá a sua inclinação neste ponto.

6) Na caixa de entrada, insira o ponto B com as seguintes coordenadas (a, m). Com o botão direito do mouse no ponto B, ative a opção habilitar rastro.

7) Movimente o parâmetro (com a opção mover, 1ª janela) **a** e observe a curva obtida pelo rastro deixado.

7.1) Quais as grandezas que estão variando para gerar a curva acima? Elas estão em correspondência biunívoca

____

7.2) A curva resultante da união dos pontos deixados pelo rastro, corresponde ao gráfico de uma função? Justifique.

____

Faça esse mesmo procedimento para as seguintes funções abaixo:

$f(x) = x^4 + 2x$ d) $f(x) = x^3 - 5$

Introdução do conceito de Integral definida, utilizando o *software* GeoGebra – atividade 04

1 – Objetivos:

- Apresentar a integral definida a partir da interpretação intuitiva do cálculo da área de uma região **S** limitada pelo eixo x, uma função f contínua, positiva e não constante e as retas x = a e x = b, por meio da soma inferior e soma superior de áreas de retângulos com base na definição:

Se y = f(x) for não negativa e integrável em um intervalo fechado [a, b], então a **área sob a curva y = f(x) desde a até b** será a integral de f de a até b,

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{máx\ \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i;$$

(THOMAS, Et. Al., p. 350)

2 – Apresentação e desenvolvimento das atividades:

2.1 Insira a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$ na caixa de entrada;

2.2 Na caixa de ferramentas, selecione a opção **novo ponto** (2ª janela), clique no gráfico em dois lugares diferentes (considerando x(A) e x(B) tais que sua imagem seja maior ou igual a zero conforme o teorema supracitado);

2.3 Na penúltima caixa de ferramentas, escolha a opção seletor, em seguida, clique na zona geométrica. Na caixa exibida, faça esse valor variar de – 50 a 50, nomeio de n e aplique;

2.4 Obter uma aproximação da área S inserindo um polígono regular inscrito em S formado pela soma de n retângulos formados abaixo do gráfico entre os pontos A e B cuja soma das áreas é obtida insirindo na caixa de entrada o seguinte comando **somainferior[f(x), x(A), x(B), n]** e teclando *Enter* (como resultado obterá o valor a);

2.5 Mova n e observe o que faz o comando somainferior?

____

2.6 O que significa esse valor de n?

____

2.7 Agora vamos calcular uma outra aproximação da área S tomando por base a partição de A, B com o ponto de máximo da função em cada retângulo. Para isso, insira o comando **somasuperior[f(x), x(A), x(B), n],** na caixa de entrada, e tecle *Enter* (obterá b); Que diferença e conclusões você tira sobre este recurso do *software* e a investigação da área S?

____

2.8 Por último, vamos calcular o valor da integral definida no intervalo [a,b] inserindo, na caixa de entrada, o seguinte comando **integrall[f(x), x(A), x(B)]** (obterá o valor c); E agora, teça considerações sobre os resultados obtidos nos itens anteriores (2.4 e 2.5)

____

2.7 Para uma melhor visualização dos valores, na primeira caixa de ferramentas com a ferramenta *mover*, desloque os resultados encontrados arrastando-os para um local onde não tenha região hachurada;

Apêndice B

Informação geral	
Título da oficina	ATIVIDADES COM GEOGEBRA PARA O ENSINO DE CÁLCULO
Nome dos autores	Frank Victor Amorim, Giselle Costa de Sousa e Jesus Victoria Flores Salazar
Instituição dos autores	UFRN e IFRN
País dos autores	Brasil
Número de horas mais convenientes	(2)
Nível de escolarização para o qual será dirigido	Ensino Superior
Número máximo de pessoas	30
Equipamentos audiovisuais ou informáticos necessários	Projetor multimídia e laboratório de Informática com GeoGebra instalado