



O estudo de frações e seus cinco significados

Patricia Aparecida de Oliveira **Drechmer**
Secretaria de Estado e Educação do Paraná
Brasil
pati.drechmer@gmail.com
Susimeire Vivien Rosotti de **Andrade**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Brasil
susivivien@hotmail.com

Resumo

Os fatores de motivação desse trabalho, têm origem no baixo desempenho dos alunos frente a problemas que envolvam o conceito de frações. Com o objetivo de efetivar a aprendizagem do conceito, foi elaborado um caderno temático que aborda as frações sob cinco óticas diferentes: número, relação parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo que, segundo alguns pesquisadores, quando adequadamente abordados contribuem para uma aprendizagem mais significativa. O material elaborado foi direcionado para as Salas de Apoio em Matemática, escrito em linguagem infantil, em forma de pequenas histórias. Foram abordadas em seu enredo, questões multidisciplinares, além de atividades relacionadas a cada um dos cinco significados. Assim, foi utilizado o respectivo caderno temático com alunos que frequentam Sala de Apoio de Matemática do Colégio Eleodoro Ébano Pereira do município de Cascavel - PR durante o primeiro semestre de 2009, em nove encontros que totalizaram 18 horas. Observou que os mesmos passaram a apresentar maior interesse pelas aulas, participando de todas as etapas do processo, e demonstrando melhor compreensão do conceito de frações.

Palavras chave: Frações, educação matemática

Introdução

O presente trabalho foi desenvolvido como parte integrante do programa PDE – Programa de Desenvolvimento Educacional, uma política educacional promovida pelo Estado do Paraná, com o objetivo de promover a formação continuada dos professores atuantes na rede. Foi desenvolvido entre 2008 e 2009, e teve como objetivo estudar as dificuldades encontradas pelos alunos no trato com frações.

É bastante comum expressar grandezas e medidas na forma fracionária, como por exemplo ‘meio copo de leite’, ‘um quarto de hora’, ‘ $\frac{3}{4}$ de polegadas’ ou ‘uma fração de segundos’. Entretanto, a experiência nos mostra que o conceito de fração ainda é pouco compreendido pelos alunos, ficando muitas vezes restrito à linguagem oral.

O fraco desempenho dos estudantes diante do assunto está relacionado com a complexidade do assunto. Segundo Campos e Rodrigues (2007), sua compreensão envolve uma variedade de aspectos que se configuram como obstáculos ao seu domínio pois, apesar destes serem uma extensão do conjunto dos números naturais, as tentativas de estabelecer paralelos entre os procedimentos relacionados aos dois conjuntos ora são válidos, ora não são. Por exemplo, quando se pretende multiplicar duas frações, multiplicamos respectivamente, numeradores e denominadores, da mesma forma como faríamos caso estivéssemos trabalhando com números naturais. Isto não acontece quando estamos desenvolvendo a soma de duas frações, que neste caso, precisamos primeiramente convertê-las em frações com mesmos denominadores, utilizando para esta conversão, o conceito de frações equivalentes. Todo este procedimento, quando não é adequadamente conceituado e compreendido, se transforma em regras desconexas e sem sentido cujos resquícios acompanham o estudante durante toda vida acadêmica.

Por isso, o estudo de frações deve merecer atenção especial por parte dos professores e pesquisadores em Educação Matemática. Devemos oportunizar ao aluno o contato com situações diversificadas que venham contribuir para a construção e efetiva compreensão do conceito de frações. Diante disto, a busca por mecanismos que contribuam para uma aprendizagem mais efetiva do conceito de frações é legítima. Assim, pretende-se estudar nesta oportunidade a implementação de um caderno temático desenvolvido para o ensino de frações, que contemple os cinco significados sugeridos por Nunes et al (2003): número, relação parte-todo, medida, operador multiplicativo e quociente.

Este caderno temático foi direcionado para Salas de Apoio em Matemática, utilizando linguagem infantil e a técnica de contação de histórias. Este artigo descreve a implementação deste material, assim como as principais conclusões.

O artigo foi dividido em: Fundamentação Teórica, Desenvolvimento do projeto, Conclusões e Referências. Na ‘Fundamentação Teórica’ serão abordadas a complexidade do ensino de frações, os processos de construção do conceito, assim como a abordagem de tais questões feita pelos livros didáticos. No item ‘desenvolvimento do projeto’ serão descritos o público alvo, o material elaborado, a implementação do mesmo feita aula a aula, assim como o comportamento dos alunos durante esta fase. No item ‘Avaliação’ são apresentadas as observações dos alunos, e, finalmente, a ‘Conclusão’ do projeto, onde serão apresentados os resultados alcançados. O Material elaborado pode ser encontrado no endereço eletrônico <http://www.pde.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=325>.

Frações e seus diferentes significados

Tanto do ponto de vista do professor como do parecer do aluno o conceito de frações implica em grandes esforços, sem muitas vezes, ser efetivamente compreendido. Esta defasagem pode ser incrivelmente duradoura, como evidenciaram os pesquisadores Campos e Rodrigues (2007); Merlini (2005); Teixeira (2008); entre outros. Tem sido verificado que alunos de nível médio e superior também apresentam dificuldades e demonstram não conhecer os aspectos relevantes do conceito de número racional, o que acarreta prejuízos à compreensão de novos conceitos matemáticos.

Com base nisso, Nunes et al. (2003), abordam o conceito de frações sob a ótica de seus cinco significados: número, relação parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo. Segundo as autoras, os cinco significados das frações quando adequadamente abordados, contribuem para uma aprendizagem mais significativa deste conceito. São eles descritos em seguida.

• **Número:** Uma fração $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$, pode assumir o significado de número e ser posicionada na reta numérica. Esta abordagem quase não é utilizada pelos livros didáticos, o que prejudica a organização do conceito, pois o aluno tende a não identificar a fração como um número. É importante que ele reconheça este significado, visualizar seu posicionamento na reta numérica, e compreender que este número também pode ser representado como um decimal.

• **Relação Parte-Todo:** Esta ideia representa um todo dividido em partes iguais, onde cada uma dessas partes é representada como $\frac{1}{n}$. A relação parte-todo implica em um procedimento de dupla contagem, onde o denominador representa o número de partes que este todo foi dividido e o numerador quantas partes foram consideradas. Esta ideia é muito abordada pelos livros didáticos, sendo muitas vezes utilizada como uma estratégia para a introdução do conteúdo de frações.

• **Medida:** Neste caso, a ideia é de comparação entre duas grandezas, como exemplo verifica-se o cálculo da probabilidade de um evento, que é obtido através da razão entre o número de casos prováveis e o número de casos possíveis desse evento ocorrer. Assim, a chance de ocorrer de tal evento varia entre 0 e 1, sendo este número, na maioria dos casos uma fração. Da mesma forma podemos abordar o conceito de porcentagem.

• **Quociente:** O significado quociente é empregado quando em uma determinada situação, a divisão é o recurso empregado para a solução do problema, ou seja, quando a situação $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, é utilizado para escrever $a \div b$. Este aspecto do conceito de fração é pouco explorado pelos materiais didáticos.

• **Operador Multiplicativo:** A fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, observada pela ótica do operador multiplicativo, atua como fator transformador de um número ao ser multiplicando por 'a' e logo em seguida, dividindo por 'b'. O número resultante deste processo pode ser maior ou menor que o número em seu estado inicial, dependendo do quociente $\frac{a}{b}$.

Com o objetivo de entender melhor as concepções que os professores atuantes nas 3^{as} e 4^{as} séries, Teixeira (2008) analisou as três coleções de livros didáticos (A Conquista da Matemática; Porta Aberta e Projeto Pitangá). Das três coleções estudadas, apenas uma contemplava os cinco significados de frações, embora superficial para os significados número e quociente.

Merlini (2005) constatou situação semelhante ao estudar coleções de livros didáticos de Matemática de 5^{as} e 6^{as} séries, cujo critério de escolha foi a acessibilidade. Os livros estudados foram: Matemática e Realidade; Matemática para todos e Matemática: Pensar e Descobrir. A pesquisadora verificou que o significado Operador Multiplicativo foi o que mais se destacou, o significado parte-todo apareceu só nos livros de 5^a série. Os significados número e quociente aparecem pouco em todos os livros, enquanto que o significado medida não foi observado em nenhum dos volumes. Isso pode sugerir que os autores não estavam preocupados em trabalhar

com as diferentes situações que dão sentido ao conceito de frações, os quais podem favorecer a aprendizagem do conceito de fração.

Teixeira (2008) verificou que 86,5% dos professores entrevistados utilizam o livro didático como subsídio para o ensino de frações. O pesquisador alerta para a possibilidade desses professores serem influenciados pelo material, que tendem a valorizar os significados operador multiplicativo e relação parte-todo e desprezar os demais significados de frações. Pode ser concluído que, se o livro didático for o principal apoio do professor, nem todos os significados do conceito de fração serão explorados em sala de aula.

Diante do exposto, sentiu-se a necessidade de elaborar um caderno temático para o ensino de frações que contemple os cinco significados sugeridos por Nunes et al (2003). Este material será direcionado para as Salas de Apoio de Matemática, com o objetivo de subsidiar o professor em sua prática escolar e buscar mecanismos que contribuam para a aprendizagem mais efetiva do conceito de frações.

Desenvolvimento do Projeto

Aplicação do caderno temático ocorreu no ano de 2009 e o universo de estudo foi formado por 15 alunos matriculados nas 5^{as} séries do Colégio Eleodoro Ébano Pereira, sendo os mesmos também participantes do programa Sala de Apoio em Matemática. A seleção desses alunos foi feita a partir da verificação de insucesso em relação à frações, conteúdo este já ministrado pelo professor em sala regular, sob a ótica sugerida pelo livro didático utilizado no estabelecimento.

Assim, o caderno temático foi escrito em sete capítulos, cada um contendo uma pequena história escrita em linguagem infantil, onde os conceitos matemáticos eram abordados e discutidos por seus personagens. Para a apresentação de cada conceito eram utilizados argumentos multidisciplinares como: O jogo de damas, sistemas de medidas, História do Brasil, taxa de impostos, porcentagem e questões ambientais. No final de cada capítulo são sugeridas atividades que foram retiradas de livros didáticos, dissertações e teses.

Ressalta-se que foi estudada através de uma pesquisa qualitativa, a reação dos alunos participantes do projeto frente a nova abordagem do conceito de frações. Foram analisados: a) o interesse dos alunos pelas aulas; b) a participação dos alunos nas atividades propostas; c) a compreensão do conceito de frações.

A implementação do projeto ocorreu na Sala de Apoio de Matemática do Colégio Eleodoro Ébano Pereira durante o primeiro semestre de 2009, em nove encontros que totalizaram 18 horas.. A metodologia utilizada foi a técnica de contação de histórias e a utilização de recursos auxiliares quando necessário.

A implementação do projeto ocorreu de acordo com as informações abaixo.

Encontro 1	O projeto foi iniciado através da técnica “contação de histórias”, utilizando o texto do capítulo 1 da produção didática, intitulada “Era uma vez...”. A primeira história utiliza o jogo de damas para a introdução do conceito de frações. Neste capítulo a noção de fração é apresentada aos alunos. Expressões do tipo “metade”, “pedaço”, “parte”, “divisão”, “partição”, “fração” foram abordadas pelos personagens e serviram para introduzir o vocabulário próprio. Estas expressões foram discutidas em sala e, desta forma o conceito de frações começou a ser estruturado. A expressão “das doze pedras do jogo, encontramos apenas oito” utilizada no texto, serviu como base para a apresentação do significado parte-todo. Esta citação também serviu para conceituar o
-------------------	---

	numerador e o denominador das frações. Os números fracionários encontrados em livros de receitas também foram citados no texto e utilizados na construção do conceito. O quadro negro foi utilizado como recurso auxiliar. Na sequência, foi apresentado aos alunos o item 1.2 “Você sabia que.. o Jogo de Damas”, apresentando a origem do jogo de damas e suas regras. A turma foi dividida em duplas e a aula foi finalizada com o recurso do jogo. Esta aula foi muito bem aceita. Muitos alunos ainda não conheciam as regras do jogo de damas, entretanto, depois de explicitadas, participaram da atividade e, de acordo com os depoimentos, julgaram muito interessante.
Encontro 2	A segunda aula do projeto foi inicializada com o item 1.3 “Relembrando o que aprendemos”, quando foi questionado sobre a relação parte-todo. Os alunos souberam explicar de forma clara e coerente este conceito. Em seguida, foi dada continuidade ao assunto, utilizando para tal a unidade 1.4 da produção, intitulada “Agora as atividades: o significado parte-todo”, onde é apresentada aos estudantes uma coletânea de atividades relacionadas com este significado, retiradas dos livros didáticos e trabalhos pesquisados. Os alunos participaram da aula, demonstrando a compreensão do assunto estudado.
Encontro 3	No capítulo 2: “Marteladas Matemáticas – O significado Número” são citadas as medidas fracionárias em polegadas que encontramos em alguns canos e tubulações da construção civil, assim como o significado da polegada como unidade de medida. Nesta ocasião, foi levado para a sala de aula tubos, canos e conexões em PVC, onde os alunos puderam verificar as inscrições das frações em polegadas ($1/2''$, $3/4''$, etc...), assim como era descrito no texto da história. No quadro-negro foi fixada a cópia feita em papel de uma régua expressa em polegadas onde os diâmetros dos canos foram sobrepostos, e a partir daí, foi explorado o conceito ‘número’, ou seja, a divisão do numerador pelo denominador, resultando em um número decimal que represente a fração estudada. Nesta ocasião, expressões como “três quartos” e “três dividido por quatro” foram comparadas e associadas e conceituadas como sinônimas. Na sequência, foi discorrido sobre o sistema de medidas baseados nas dimensões do corpo humano, como o palmo, a jarda, o pé e as milhas contidas no item 2.2. No fim da aula os alunos desenvolveram as questões sugeridas no item 2.3. A aula foi finalizada com a discussão e correção das mesmas no quadro.
Encontro 4	O capítulo 3: “Os Quintos dos Infernos - Significado ‘Operador Multiplicativo’”, apresenta como recurso ilustrativo a expressão, “<i>vá para os quintos dos infernos</i>”, originada na época do Brasil colonial para designar a fração de impostos paga ao Rei de Portugal (um quinto), sobre o ouro extraído do Brasil. Este capítulo se inicia apresentando ao estudante a origem da expressão, assim como sua justificativa histórica. Como recurso foram utilizados slides da Igreja e Convento de São Francisco, em Salvador, para ilustrar as riquezas deste período no Brasil. Em seguida, questões envolvendo o conceito do operador multiplicativo são propostas, e os alunos foram instigados a resolvê-las. Por exemplo: “Se um quinto do ouro produzido no Brasil ia para Portugal, e se um minerador produzia 10 kg de ouro, quanto desta quantia, deveria ser pago na forma de impostos?” Com base nestas observações era desenvolvido o conceito do “Operador Multiplicativo” que, na sequência, foi estendido para outras situações. Para finalizar as reflexões foram comparados, como o texto sugere, a taxa de impostos paga na época do ciclo do ouro no Brasil e a arrecadada nos dias de hoje. Na sequência, algumas das atividades do item 3.2 foram selecionadas e desenvolvidas pelos alunos, que apresentaram ciência do conceito abordado.
Encontro 5	Através da técnica ‘contação de histórias’ foi apresentado o capítulo 4:

	“Porcentagem e Reciclagem – O Significado ‘Medida’”, onde este significado foi discutido e a porcentagem foi utilizada. O capítulo se inicia apresentando a porcentagem na forma de frações, ou seja, ao se afirmar que teremos um desconto de 40% sobre um determinado produto, significa dividir o todo em 100 partes iguais, das quais 40 são consideradas. Por exemplo, se uma mercadoria custa R\$ 400,00 e tem 40% de desconto, calculamos $\frac{40}{100}$. $400 = 160$, ou seja, o desconto é de R\$160,00. Em seguida, a questão da reciclagem é abordada, foram apresentados aos alunos vários tipos de materiais recicláveis como: latas de alumínio, garrafas plásticas, papel, papelão, etc.... De acordo com o texto, dentre 100 latas de alumínio produzidas, 89 são recicladas (89%); dentre 100 quilos de papel, 40 são reciclados (40%), etc... A intenção foi relacionar a porcentagem com o estudo de frações de forma significativa. Em seguida, foi abordada a geração do lixo, sua coleta e tratamento. Para tanto, foi utilizado slides de lixões e de rios que recebem esgoto e foi percorrido sobre o impacto ambiental destes materiais sobre a natureza, além do tempo de degradação de cada material. Foi atribuída grande importância para a seleção e reciclagem do lixo residencial e práticas que podemos ter para favorecer o meio ambiente. Em seguida, foi pedido aos alunos que desenvolvessem atividades selecionadas do item 4.4. Os alunos apresentaram grande interesse, sensibilizaram-se com as questões ambientais e levantaram vários questionamentos.
Encontro 6	Para o desenvolvimento desta aula, foram levados três pacotes de balas para a sala, e foi pedido para que as balas fossem divididas igualmente entre 4 pessoas. Os alunos sugeriram abrir os pacotes para dividi-las em partes iguais e logo após o capítulo 5, “A Divisão e o Significado Quociente”, foi abordado. No texto, os personagens se deparam com a seguinte situação: como dividir três ‘coisas’ entre quatro pessoas? A situação problema dos pacotes de balas foi sugerida no texto e assim como na sala de aula, os personagens resolvem abrir os pacotes e dividir as balas igualmente entre eles. O texto reforça a ideia de que “fração” também significa “divisão”, ou seja, 20 balas dividido entre 4 pessoas é igual a 5, ou $\frac{20}{4} = 5$. Em seguida, o conceito ‘Quociente’ foi explorado no quadro negro, sugerindo outras situações em que o significado quociente poderia ser empregado. Na sequência, os exercícios do item 5.2 foram desenvolvidos e os alunos não encontraram dificuldades na resolução destas atividades.
Encontro 7	A história do capítulo 6, “Sábado é dia de Pizza – Frações Equivalentes, adição e subtração”, inicia apresentando a seguinte situação: duas pizzas são divididas em seis e oito pedaços respectivamente. Um dos personagens comeu dois dos pedaços menores e um dos maiores, e precisa responder quanto, de uma pizza inteira, ele comeu. O personagem deduz que comeu $\frac{2}{8}$ da primeira pizza, e $\frac{1}{6}$ da segunda, e como pretende saber o quanto de pizza comeu ao todo, se dispõe a somar as duas quantidades. O personagem é apresentado tentando resolver o problema da soma da seguinte forma: $\frac{2}{8} + \frac{1}{6} = \frac{3}{14}$. Os alunos não apresentaram objeção ao cálculo, e a princípio, concordaram com a solução encontrada pelo personagem. Entretanto, no decorrer da história, o significado dos denominadores é lembrado, e os alunos entendem que não podem somá-los, pois representam as partes que cada uma das pizzas (ou o todo) foi dividida. Então, o conceito de frações equivalentes é construído com a ajuda dos personagens, que sugerem que as pizzas sejam ‘re-divididas’, de forma que ambas fiquem com o mesmo denominador. No exemplo das pizzas, o personagem percebe que dividir uma pizza em 8 pedaços e comer 2 é a mesma coisa que dividir a pizza em 24 pedaços e comer 6. Da

	mesma forma, dividir a pizza em 6 pedaços e comer um significa dividir em 24 pedaços e comer 4. Os alunos concordaram, então, que $\frac{2}{8} + \frac{1}{6}$ equivale a $\frac{6}{24} + \frac{4}{24}$ e, desta forma, concluíram que $\frac{6}{24} + \frac{4}{24} = \frac{10}{24}$, então $\frac{2}{8} + \frac{1}{6} = \frac{10}{24}$. O texto reforça que, sempre que precisamos efetuar a adição ou a subtração de números fracionários, precisamos lembrar que, antes de tudo, devemos ‘cortar’ o nosso objeto de estudo (o todo) em ‘pedacinhos do mesmo tamanho’, ou seja, utilizando o conceito de frações equivalentes, devemos transformar as frações de forma que tenham denominadores iguais, e só depois devemos fazer a operação. Na sequência, os exercícios do item 6.3 foram propostas. Os alunos apresentaram dificuldades no desenvolvimento das questões, necessitando ser lembrados várias vezes sobre o significado do denominador da fração. Em geral, tentavam somar as frações e, depois de serem alertados, procuravam encontrar a fração equivalente àquela proposta, muitas vezes não apresentando sucesso.
Encontro 8	Durante o encontro foi apresentado o método do mínimo múltiplo comum para encontrar as frações equivalentes. Com este recurso, os alunos passaram a ter uma melhor desenvoltura com os cálculos, facilitando o processo. Foi verificado que os alunos que participavam do projeto apresentavam melhor compreensão do assunto, quando comparados aos alunos da sala de aula regular. Procuravam encontrar de uma forma intuitiva uma fração equivalente que tinha o mesmo denominador. Quando não conseguiam, utilizavam o método do mínimo múltiplo comum. Os alunos da sala regular priorizavam o método do mínimo múltiplo comum, mesmo sem entender exatamente o significado deste recurso. Durante esta aula, os exercícios foram desenvolvidos. Os alunos, apesar de utilizar o método do mínimo múltiplo comum, ainda apresentaram algumas dificuldades. Por isto, o assunto foi estendido até o próximo encontro.
Encontro 9	A aula foi iniciada retomando as atividades anteriores, que não haviam sido finalizadas. As atividades foram corrigidas no quadro, com a ajuda dos alunos, o que reforçou o conteúdo aprendido. Em seguida, foi abordado o capítulo de fechamento do material, intitulado “O pé de jabuticabas”, que apresenta uma síntese, em forma de uma pequena história contada pelos personagens principais.

A avaliação do projeto foi feita com base nas observações durante a fase de implementação. Foi verificado que os alunos passaram a apresentar um grande interesse pelas aulas de frações, fato inédito, por parte de alguns deles. A técnica da contação de histórias foi bem aceita, os alunos participaram de todas as etapas do processo, interagindo com o professor e demais colegas.

A contextualização colaborou no processo de compreensão do conceito, ajudando a dar sentido ao conteúdo abordado. Em relação a soma de frações, os alunos apresentavam melhor compreensão do assunto, pois já entendiam melhor o significado do numerador e o denominador da fração. Procuravam, de uma forma intuitiva, encontrar uma fração equivalente que tinha o mesmo denominador para efetuar a soma.

Como professora, posso afirmar que a implementação do trabalho foi muito compensadora e prazerosa, e penso em utilizá-la novamente nos anos seguintes.

Considerações Finais

A técnica de contação de histórias foi muito bem aceita pelos alunos, que participaram ativamente da narração, interagindo e dando suas opiniões, entretanto, não são comuns os trabalhos que utilizam este recurso dentro do ensino de Matemática.

O material, ao que parece, atingiu seu objetivo. Os alunos gostaram dos textos e passaram a participar das aulas e as atividades propostas, foi verificada uma melhor compreensão do assunto, principalmente quando comparados com alunos que frequentavam apenas a sala de aula regular.

O recurso do jogo foi muito bem aceito. Os alunos passaram a pedir que fosse repetido em outras oportunidades.

A contextualização foi importante referencial para a apreensão do conceito, ajudando a dar sentido ao conteúdo abordado, pois os alunos utilizavam várias vezes os exemplos sugeridos pelo caderno temático para respaldar suas conclusões.

A maior dificuldade se deu em relação a soma e diferença de frações, este foi o único assunto que precisou ser retomado várias vezes, sempre atentando para o significado do denominador. Apesar disso, foi verificado que os alunos que participaram do projeto apresentaram melhor compreensão do conceito que àqueles que não fizeram parte, principalmente quando foi levado em consideração a desenvoltura e familiaridade com o assunto. Enquanto os alunos da sala regular priorizavam o método do mínimo múltiplo comum para encontrar a fração equivalente, mesmo sem entender exatamente o que este recurso representava, os alunos que participaram do projeto procuravam deduzir de forma lógica a fração equivalente, o que sugere que o material proporcionou subsídios para tal raciocínio.

O trabalho desenvolvido indica que o estudo de frações utilizando os cinco significados do conceito, quando utilizados de forma significativa ao aluno, pode melhorar significativamente o relacionamento entre o aluno e o conteúdo, favorecendo a aprendizagem de forma significativa e efetiva, como afirma Nunes et al (2003).

Bibliografia e referências

- Campos, T. M. M.; Rodrigues, W. R.. *A ideia de unidade na construção do conceito do número racional*. REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática. V. 2.4, p. 68-93, RFSC, 2007.
- Merlini, V. L. *O conceito de frações em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª série do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
- Nunes, T.; Bryant, P.; Pretzlik, U.; Hurry, J. *The effect of situations on children's understanding of fractions*. Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, June, 2003.
- Teixeira, A. M. *O professor, o ensino de fração e o livro didático: um estudo investigativo*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.