XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

La elaboración de significado de la demostración: Una mirada desde la Teoría Cultural de la Objetivación

Edna Paola **Fresneda** Patiño
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia
phaoepfp022@gmail.com
Fanny Aseneth **Gutiérrez** Rodríguez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia
AsenethGR@gmail.com
Oscar Leonardo **Pantano** Mogollón
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia
pantaleonel@gmail.com

Resumen

En esta comunicación se presentan hallazgos de la manera cómo elaboran significado de la demostración en un contexto de continuidad de reales, un grupo de estudiantes para profesor de matemáticas. Para posibilitar la identificación de cómo se elabora significado de la demostración, es necesario caracterizarla haciendo énfasis en la influencia tanto del contacto con otros como del uso de algunas herramientas proporcionadas por el contexto. Posteriormente, se presenta el análisis del proceso de resolución de un grupo de estudiantes apoyado en la construcción de viñetas. Finalmente, se concluye acerca de las características e influencia de la interacción social y el uso de artefactos en la elaboración de significados de la demostración en un ambiente de resolución de problemas considerando las producciones y actividad matemática de los estudiantes objeto de estudio.

Palabras clave: elaboración de significado, artefactos, interacción social, demostración, aprendizaje.

Planteamiento del problema

De acuerdo a la teoría cultural de la objetivación la adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados. De este modo, “el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento sino en dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura” Radford (p. 113). Así, dicho proceso de adquisición del saber se desarrolla por medio del contacto del sujeto con dos fuentes distintas: los artefactos y la interacción social.

El primero de ellos (los artefactos), hace referencia al mundo material en el que se encuentra depositada la sabiduría histórica de la actividad cognitiva desarrollada por generaciones pasadas. Así, la actividad del sujeto se ve influenciada por los artefactos que el contexto en el cual se desenvuelve le brinda. Ejemplo de éstos es el libro de texto, la calculadora, el cuaderno del resolutor, etc.

La interacción social es la segunda fuente de elaboración de significados, es decir, el proceso mediante el cual dichos significados son negociados y compartidos para establecer un saber común. En esta se resalta la idea de ser con otros mediante acciones como comunicar, escuchar, argumentar, experimentar, entre otras.

En consecuencia, estas fuentes dan lugar al proceso de aprendizaje de la demostración más allá del sentido Bolzano. Es decir, conlleva a una serie de actividades como: argumentar, explorar, particularizar, conjeturar, visualizar, representar, etc. Tal que, el significado de la demostración se relaciona fuertemente con el objeto matemático estudiado.

A partir de los elementos teóricos puestos en consideración se da lugar a la siguiente pregunta, la cual orienta el trabajo presentado en este documento: ¿Cómo la interacción social y el uso de artefactos promueven la elaboración de significados de la demostración en un contexto de continuidad de reales?

Marco de referencia

La investigación que aquí se presenta se desarrolla a partir de los elementos teóricos propuestos en la Teoría Cultural de la Objetivación (Radford, 2006), la cual se vincula propiamente con una perspectiva sociocultural del aprendizaje. Desde esta teoría, el aprendizaje de las matemáticas en un ambiente de resolución de problemas puede verse reflejado a partir de dos aspectos diferenciados: aprender a hacer y aprender a ser en matemáticas.

Este último, se caracteriza por una concepción no mentalista del pensamiento dado que posibilita el encuentro del ser con el mundo y es allí donde tiene lugar el proceso de elaboración de significados. Dicho proceso ocurre a través de la interacción social y del uso de algunos artefactos como el cuaderno del resolutor.

En consecuencia, es factible que la vinculación de estos elementos permita la construcción de la demostración como un conocimiento matemático teniendo en cuenta tanto la postura del ser como la del hacer en matemáticas. Estas relaciones teóricas que se han establecido serán detalladas a continuación:

Una manera de entender la resolución de problemas en el aula de matemáticas, es cuando el objetivo del aprendizaje busca que el estudiante imite una práctica establecida. Es decir, memorice procedimientos, generalice situaciones aritméticas, encuentre patrones, aprenda un método algebraico de resolución de problemas, use fórmulas y algoritmos. Cuando esto ocurre Radford (2006, p. 114) lo denomina "aprender a hacer en matemáticas".

Ahora bien, cuando la resolución de problemas no es entendida como un fin, sino como un medio para alcanzar la reflexión cultural en la que se forman las capacidades humanas de los individuos, Radford (p. 114) lo denota como "aprender a ser en matemáticas". De este modo, "el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento sino en dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura" (p. 113). Esta idea de aprendizaje es distinta a la anterior y se explicará a continuación.

Para desarrollar la idea de aprendizaje enmarcada en la teoría cultural de la objetivación, se hablará primero de la concepción del pensamiento y posteriormente de la elaboración de significados.

El pensamiento es la base del aprendizaje, pues a través de éste se establece la relación entre el ser y el mundo. Sin embargo, éste no forma parte de las teorías didácticas actuales, puesto que se tiene la creencia de que éste es inobservable. Esto teniendo en cuenta la concepción mentalista del pensamiento, en la cual "el proceso real del pensamiento queda invisible así como los conceptos que éste usa y el material crudo del cual está compuesto" Radford (p. 105).

Por otro lado, para la Teoría cultural de la objetivación, el pensamiento como base del aprendizaje es completamente dependiente de recursos culturales para su propia operación. Así, éste es concebido como una práctica social (algo que se aprende haciendo). En resumen, "el pensamiento es considerado una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos" Radford (p. 107).

De esta manera, la idea de pensar asume una realidad ontológica (la existencia y la naturaleza del objeto). En ella, los objetos matemáticos son construidos a lo largo de la historia producto de la actividad matemática de los individuos. En otras palabras, "los objetos matemáticos son patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos" (Radford, p. 111).

De acuerdo con lo anterior, la relación entre el objeto y el sujeto es concebida como la re-flexión de éste último sobre el mundo que lo rodea. Por lo cual, ésta no es un acto interno sino que está mediatizada por la cultura y por la historia. En este sentido, "la re-flexión es un movimiento dialéctico entre una realidad (…) y un individuo que la refracta según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios" Radford (p.123).

Sin embargo, cabe aclarar que ésta re-flexión difiere de la reflexión vista como metacognición. Pues ésta última se considera como "la atención a aquello que ya está en nosotros" Radford (p.123). En este punto, es necesario resaltar que aunque dicha reflexión no es vista como un proceso de aprendizaje, si permite que éste se evidencie.

A su vez, ser en matemáticas exige un proceso de elaboración de significados, para éste la adquisición del saber se desarrolla por medio del contacto del sujeto con dos fuentes distintas: los artefactos y la interacción social, los cuales se definirán a continuación.

Artefactos

En cuanto al contacto del sujeto con los artefactos, denominado por Radford (p.124) como plano sujeto-objeto es posible afirmar, que los artefactos se caracterizan por potenciar la cognición humana, dado que llevan depositada en sí la sabiduría histórica de la actividad cognitiva de generaciones pasadas (Radford, 2006).

Vistos como objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc., constituyen elementos esenciales del pensamiento que le permiten al sujeto reflexionar sobre construcciones históricas y culturales. Así, la actividad del sujeto se ve orientada y moldeada por los artefactos que el contexto en el cual se desenvuelve le brinda. Un artefacto importante para el desarrollo de la investigación fue el cuaderno del resolutor, que se explicará a continuación.

Cuaderno del resolutor

En éste se encuentra consignada toda la información de los procesos desarrollados por los estudiantes en la resolución del problema. Lo anterior, organizado mediante relatorías de clase, metacognición y actividad matemática tratando de seguir la propuesta de Mason, Burton & Stacey (1988).

Está propuesta busca que el resolutor tome nota del proceso que va desarrollando detallando sus ideas, planteamientos y acciones, así como los objetivos de las mismas, lo cual pasa a convertirse en la experiencia matemática del resolutor. De esta forma, él puede estudiar y analizar sus elaboraciones, con el propósito de que no se pierda tanto lo que se está intentando hacer como la experiencia lograda en el proceso.

Ahora bien, estos artefactos no pueden por si solos dar a conocer la sabiduría puesta en ellos. Para esto es necesario no solo usarlos en actividades específicas sino además situarlos en el contacto con otras personas que puedan percibir esa inteligencia allí depositada y transmitirla a otros. Dicha interacción tiene lugar en el plano sujeto-sujeto (Radford, 2006, p. 124) y será descrita a continuación.

Interacción social

La segunda fuente de elaboración de significados es la interacción social. Allí se resalta la sociabilidad como un proceso que permite aprender a estar con otros, a escuchar y entender otras voces y otras conciencias, en conclusión aprender a ser con otros.

A partir de ello se posibilita que los estudiantes desarrollen habilidades como probar, comunicar, examinar, explorar, representar, resolver, etc. Lo que conlleva a una conceptualización dinámica de las matemáticas, donde se combina tanto el resolver un problema como el aprender un contenido matemático determinado.

Ahora bien, posiblemente los elementos teóricos expuestos anteriormente y enmarcados en la Teoría Cultural de la Objetivación influyen en el proceso de demostración, el cual se explicará en el siguiente apartado.

El proceso de demostración

El proceso de demostración en educación matemática no es concebido únicamente como una cadena lógica de argumentos y proposiciones que validan un enunciado usando de manera exclusiva axiomas, definiciones o teoremas (Grupo Mescud, 2008). En este sentido, es posible afirmar que la demostración es un proceso que se mueve en el contexto de ser en matemáticas de acuerdo a lo propuesto por Radford (2006).

En consecuencia, la demostración debe ser concebida como un proceso cognitivo social que va más allá de las categorías de pensamiento inductivo y deductivo (Grupo Mescud, 2008). Esto implica acciones como: representar, visualizar, argumentar, interactuar y explorar entre otras. Además, el significado asignado al proceso de demostración está estrechamente relacionado con el objeto matemático sobre el cual se desarrolla, en cuyo caso se enfoca en la continuidad de reales.

De este modo, la elaboración de la demostración debe permitir confrontar ideas de continuidad valiéndose de distintas representaciones (tabular, algebraica, gráfica, etc.). Así, se asumen diferentes estructuras matemáticas como las de densidad, cardinalidad y convergencia (Romero y Sanjuán, 2009, Rudin, 1976).

Metodología

La metodología de trabajo se basó en la recolección de la información mediante instrumentos tales como: videograbaciones de clase, sus respectivas transcripciones, las observaciones no participantes y los cuadernos del resolutor. Estos últimos se sustentan en la propuesta de Mason, Burton y Stacey (1989).

El análisis de los datos se llevo a cabo teniendo en cuenta los planteamientos de Gavilán, García y Llinares (2009), apoyado en la elaboración de viñetas entendidas como informes que vinculan información de diferentes fuentes. En éstas se integran inferencias e interpretaciones del investigador que se asocian a la evidencia de la práctica. Allí se incluye el lugar cronológico en el que se desarrolla la actividad del estudiante, las tareas desarrolladas por los mismos, así como la organización del contenido matemático y las inferencias del investigador, entre otras.

Esta investigación se llevo a cabo con un grupo de estudiantes del espacio de formación Problemas del Continuo, que hace parte de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Para el análisis que se presenta se tomó un grupo de estudiantes conformado por Loly, Ángela, Katherine, Cindy y Jonathan. Para ello se propuso la siguiente situación: *"Sea A el conjunto de los números en el intervalo [0,1] cuya expansión decimal es de sólo 0, 5 y 9".*

Resultados

Elaborando significado de la demostración

El grupo de estudiantes en el intento de demostrar que 0.9 periódico es el máximo del conjunto, inicialmente construye una demostración formal basándose solamente en elementos teóricos. Acuden así al profesor con el fin de que él la valide, siendo éste quien les ayuda a reconocer la falta de comprensión y dominio de diversos conceptos y procedimientos involucrados, así como la relación de éstos con la situación.

En otro momento, tratando de demostrar esta misma conjetura los estudiantes recurren a tres procedimientos propios con el fin de establecer criterios que posteriormente se convertirán en argumentos para la demostración.

En las sesiones de clase del 13 y 18 de agosto, el grupo está intentando demostrar formalmente que 0,9 periódico es el máximo del conjunto. Para ello, hacen uso de referentes teóricos enfocados en relaciones de orden y sus propiedades (reflexiva, antisimétrica y transitiva). Lo anterior, lleva al grupo a cuestionarse con ayuda del profesor sobre diversas nociones y conceptos, tales como: qué tipo de relación de orden se establece entre los elementos del conjunto, qué es una relación de orden parcial, entre otras. De esta forma, se hace evidente que los estudiantes no tienen claridad sobre estos aspectos, por lo tanto se dificulta vincularlos a la situación.

{1} Ángela: Entonces buscamos un referente teórico sí o no.
{2} Loly: Un libro para justificar.
{3} Ángela: Para poder demostrar en general que 0,9 es el mayor del conjunto. […] Eso es de cardinalidad y de orden

{4} Ángela: Entonces deberíamos buscar lo que dice el libro respecto a una relación de orden […] 0,9 es menor que el 0,9 periódico luego 0,9 no va a ser mayor que el otro,
{5} Loly: Bueno pues es demostrar que este número [0,9] existe en el intervalo.
{6} Ángela: Bueno y ahí, cómo demostramos eso.
{7} Loly: Bueno pues digamos que a, b y c son números del intervalo.
{8} Cindy: pero qué es lo que vamos a mirar, ¿qué b es mayor que c? o que se relaciona
{9} Profesor: Bueno, cuál era la conjetura.
{10} Katherine: Demostrar que 0,9 periódico es el más grande del conjunto entonces probamos reflexividad, antisimetría y transitividad.
{11} Profesor: Cuando uno prueba reflexividad, antisimetría, y transitividad está probando efectivamente que hay una relación de orden o un orden parcial. Ahora ¿hay un orden en esta conjetura que ustedes tienen?
{12} Loly: Primero va el cero, luego el cinco y luego el nueve.
{13} Profesor: O.K entonces aquí está probando que 0,9 periódico es más grande que los de expansión finita 0,9.
{14} Loly: Que hay un orden.
{15} Profesor: Es un orden, pero que sea un orden, me garantizaría que ¿el máximo es 0,9 periódico?¿Cuál es la relación de orden ahí?
{16} Loly: Que hay un cero, luego hay un cinco y luego hay […]
{17} Profesor: Pero eso sería de los decimales que podemos usar, pero por ejemplo, si yo quiero comparar 0,50 con 0,59 ¿ahí no hay un orden?

Transcripción 1. Una primera "demostración".

En el caso de comunicaciones, se recomienda que contemple, al menos, los siguientes aspectos: planteamiento del problema o tema objeto de estudio, antecedentes y fundamentación teórica, diseño y metodología, resultados, discusión de resultados, conclusiones, limitaciones del estudio y, en su caso, prospectiva.

El grupo de estudiantes tratando de demostrar que 0,9 periódico es el máximo del conjunto, hace uso de referentes teóricos evidenciando que la teoría sobre relaciones de orden es un posible camino de ataque de la situación problema (ln. 1-4).

De esta forma, los estudiantes intentan establecer una conexión entre la conjetura y las relaciones de orden. Sin embargo, los estudiantes no logran establecer esa conexión y centran su trabajo en establecer una demostración formal. Allí se hace evidente que los estudiantes no vinculan la demostración que pretenden construir con los elementos propios de su situación (ln. 4-8). En consecuencia, se da una discusión en la cual es posible observar que no hay suficiente claridad a cerca de lo que se pretende demostrar, es decir, sobre la tesis de su demostración.

No obstante, el grupo de estudiantes realiza la "demostración" y acude al profesor con el fin de que éste la valide. Es así como en la interacción que tienen lugar entre el grupo de estudiantes y el profesor, éste último intenta retomar la conjetura como el elemento a partir del cual se desarrolla la demostración (ln.9-10). Por tal razón, surgen unos cuestionamientos del profesor hacia los estudiantes sobre la relación de orden que se puede evidenciar en el conjunto. Los argumentos dados por los estudiantes son muy débiles dado que no hay comprensión sobre los conceptos expuestos en el libro de texto.

De este modo, los conceptos y procedimientos son aplicados tal y como se encuentran en el libro, lo que limita la elaboración de significado de la demostración en la situación. En consecuencia, el profesor busca centrar el trabajo con respecto a la conjetura inicial, dado que en este momento los estudiantes se encuentran alejados en la consecución de su objetivo. Esto se hace evidente en el momento en el que el profesor les expresa a los estudiantes que el hecho de que haya un orden parcial en el conjunto no garantiza la existencia del máximo (ln. 15).

Es posible inferir que la falta de comprensión de la demostración se debe al uso de conceptos y procesos ajenos al grupo. En este sentido, la interacción del grupo no gira en torno a construir una demostración propia sino a aplicar una ya construida en otro contexto. De esta manera, es evidente que cada estudiante tiene una percepción distinta a cerca de los elementos inmersos en la demostración.

Continuando con el proceso, los estudiantes se encuentran con el hecho de que el 1 pertenece al conjunto dado que es una de las condiciones planteadas en la situación misma. Tal que el grupo se empieza a cuestionar sobre la posibilidad de que el 1 sea el máximo del conjunto.

Posteriormente, en la sesión del 25 de agosto el grupo con ayuda del profesor está tratando de establecer como argumentos los procedimientos matemáticos utilizados para encontrar la relación existente entre 0,9 periódico y 1. De esta manera, encuentran tres criterios que les permiten afirmar con certeza la relación de equivalencia entre estos elementos del conjunto.

Cabe resaltar que dichos criterios fueron apareciendo durante el proceso de resolución a través tanto de la interacción que se daba en el grupo, así como del uso de conocimientos y nociones previas puestas en práctica por ellos al momento de enfrentarse a la situación.

{1} Profesor: […] ¿Qué criterios de que un número sea más grande que otro, puede haber?
{2} Ángela: ¿Dividiéndolo no?, si uno lo divide, y le da 1 es porque son iguales.
{3} Cindy: La diferencia.
{4} Profesor: La diferencia, y hay otra cosa que hicieron ¿qué fue?
{5} Cindy: Pasar un número decimal a fraccionario [señala su cuaderno]
{6} Profesor: En los tres casos qué está pasando.
{7} Ángela: Pues que en este nos da 1 [señala su cuaderno] En este también nos da uno.
{8} Cindy: ¿y en el otro?
{9} Loly: En el de resta da cero. Entonces tenemos tres cosas que nos dicen que 0.9 es igual a 1.

Transcripción 2. Construyendo argumentos a través de la interacción social.

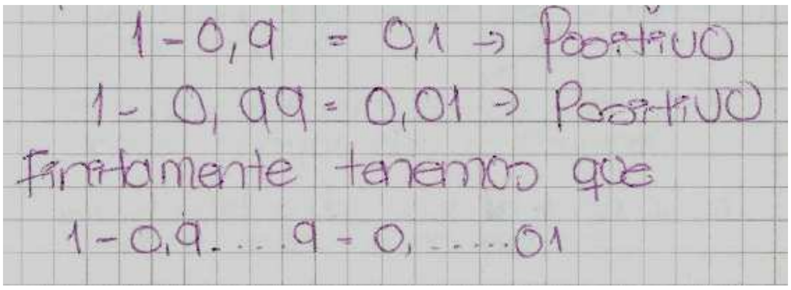

Figura 1. Cuaderno de Ángela (pág. 19). Hace referencia al uso de la resta en el proceso de resolución.

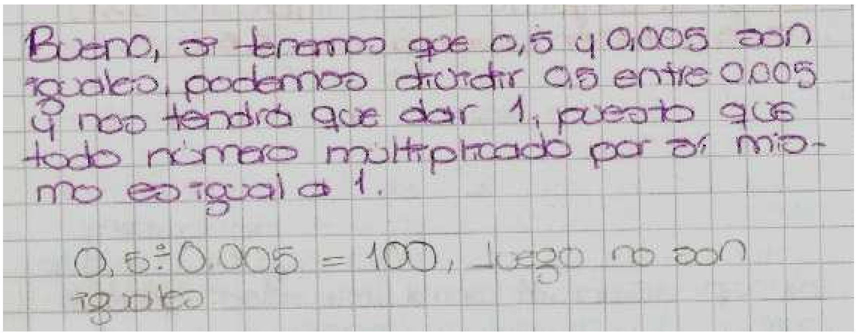

Figura 2. Cuaderno de Ángela (pág. 6). Se presenta la validación de estrategias para comparar números decimales.

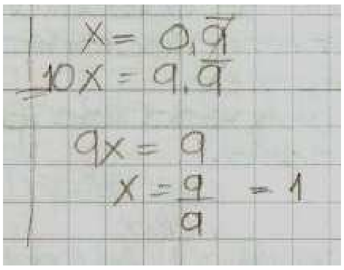

Figura 3. Cuaderno de Ángela (pág. 19). Se muestra el método empleado para la conversión de números decimales a fraccionarios.

Como se ve a lo largo de la transcripción a partir de la interacción dada entre el profesor y el grupo de estudiantes, estos últimos durante el proceso han desarrollado unos procedimientos propios (división, resta y conversión de racionales) que les han permitido enfrentarse a la situación (figuras 3,4 y 5). En este sentido, la intervención del profesor está encaminada a que se conviertan en criterios que permitan dar mayor solidez a los argumentos puestos en juego para establecer la relación existente entre 0,9 periódico y 1 (ln. 1).

Es posible afirmar que la interacción social en la construcción de la demostración permitió el surgimiento de procedimientos propios que posibilitaron comprender las acciones desarrolladas en el proceso de demostración (ln. 2-5). Dado que fueron negociados y compartidos por los integrantes del grupo, logrando así establecer un quehacer y un saber comunes.

En este sentido, a partir de la interacción y la puesta en común de conocimientos previos se logró darle significado no sólo a aquello que se estaba realizando sino además al propósito de dichas acciones. Así, la demostración logra adquirir un mayor significado dado que no es vista desde la formalidad sino como una elaboración propia.

Además, esta interacción permitió a los estudiantes no sólo desarrollar una ejemplificación sistemática, sino a partir de ello comprender claramente un hecho que inicialmente fue confuso y atascó su proceso de resolución. Éste hecho hace referencia a la relación de orden existente entre dos elementos del conjunto (0,9 periódico y 1), siendo éste un suceso que en su momento generó dificultad en el quehacer del grupo. No obstante, el descubrimiento y uso de dichos procedimientos logró establecerse como un argumento matemático que daba solidez a la conjetura.

Así, los estudiantes utilizaron argumentos matemáticos propios para validar sus acciones, dejando de lado la formalidad. Así como la idea de que aquello que está puesto en los libros es único, verdadero e irrefutable y que las acciones y estrategias propias tienen menor valor, utilidad e importancia.

Por otro lado, es importante resaltar que en este momento toda la atención y la reflexión se centra en los procesos de ejemplificación propios desarrollados por los estudiantes. De tal forma que el profesor solamente se encarga de establecer un puente entre los procesos desarrollados por el grupo, las matemáticas científicas y la situación particular sobre la que se está trabajando.

Además, cabe mencionar que tanto la interacción entre el grupo como el uso de ejemplos, le permite a los estudiantes apropiarse de los conceptos y procesos puestos en juego en el ataque de la situación. A partir de ello, éstos están en situación de dar cuenta claramente y con solidez tanto de la manera en que se está llevando el proceso, como de los elementos inmersos allí. De esta forma, se posibilita que el grupo siga sin inconvenientes su ruta de resolución planteada y logre así cumplir con el objetivo propuesto.

Una vez identificados los procedimientos utilizados por el grupo para darle validez a la conjetura planteada, en la clase del 29 de octubre los estudiantes inician la construcción de la demostración. Para ello, empiezan a elaborar un diagrama identificando los elementos implícitos en ésta (hipótesis, teoremas, definiciones, etc.).

Además, el diagrama tiene como propósito que los estudiantes identifiquen claramente como se vinculan las implicaciones en la demostración, de manera que la cadena lógica de argumentos y proposiciones valide el enunciado. Así, logran elaborar el texto formal de la demostración.

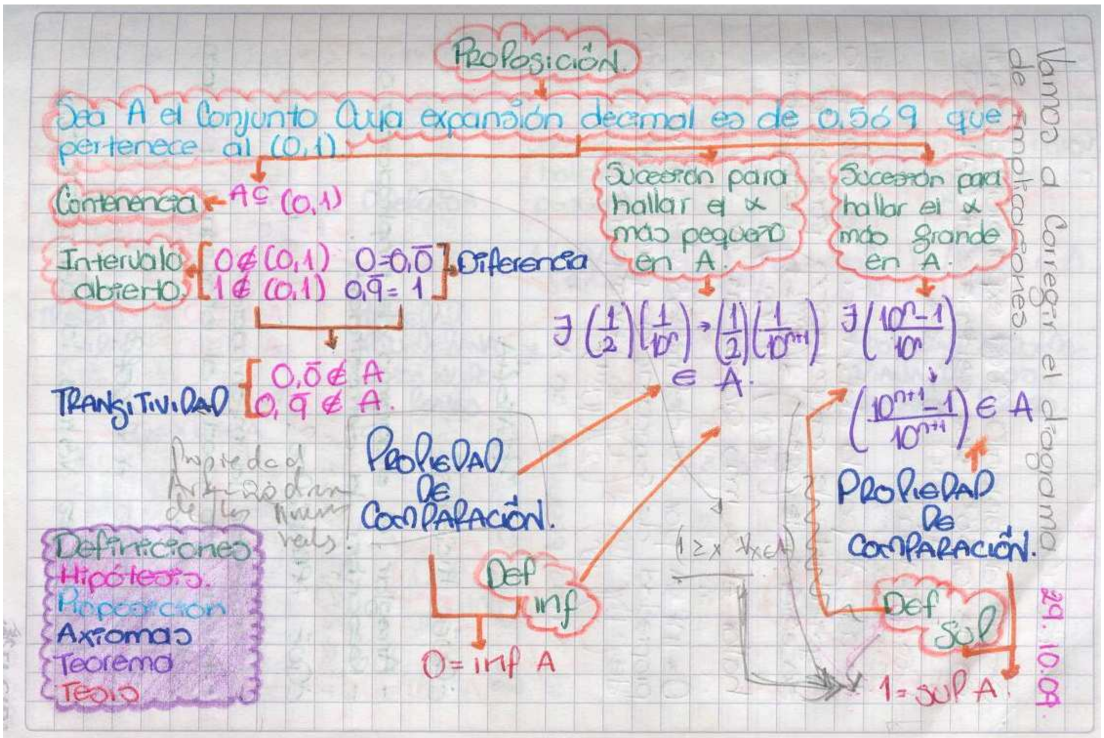

Figura 4. Cuaderno de Ángela (pág. 19). Se muestra el diagrama que permitió consolidar la demostración formal.

Continuando con la interacción social, el grupo empieza a situar los criterios establecidos a lo largo del proceso relacionándolos con las condiciones dadas en la situación como se ve en la figura 6. De esta manera, los conocimientos y procedimientos construidos a lo largo del proceso se consolidan y son dotados de sentido. Dado que al ser una construcción propia, cada integrante del grupo está en capacidad de dar cuenta de la relación y la utilidad de éstos en la demostración.

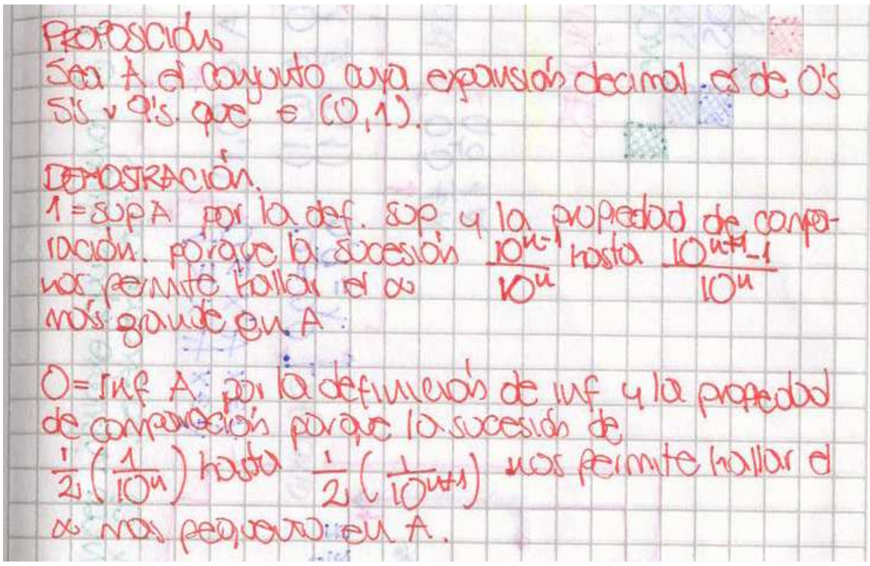

Figura 5. Cuaderno de Katherine (pág. 19). Hace referencia a la demostración de la conjetura inicial.

Finalmente, el grupo de estudiantes a través de un proceso constante de interacción logran demostrar formalmente la conjetura planteada como se ve en la figura 7. En este momento es posible hablar de una elaboración de significado de la demostración, dado que a pesar de que ésta se basó en una variedad de conceptos, teoremas, definiciones, procedimientos, entre otros; los estudiantes estuvieron en capacidad de plasmar todo esto en un párrafo de cuatro renglones de forma breve y concisa.

A su vez, el significado dado a la demostración se evidencia en la capacidad de los estudiantes al aplicarla en una situación análoga. Así, los estudiantes reconocen que la demostración no se da de forma instantánea como una repetición mecánica de procedimientos, sino que por el contrario requiere de procesos visualizar, representar, argumentar, comunicar. Los cuales son producto de un proceso constante de interacción social.

Conclusiones

Desde la perspectiva de la teoría cultural de la objetivación el libro de texto es un artefacto que le permite al resolutor el encuentro con la construcción histórica del objeto realizada por la comunidad científica. Además, éste moldea la actividad matemática del estudiante en tanto que plasma un contexto histórico-social determinado que le da forma y sentido.

De manera análoga, de acuerdo a la investigación desarrollada, en el proceso de resolución el grupo de estudiantes analizado reconoce que el uso del libro de texto debe estar acompañado de una serie de acciones que le permitan apropiarse de la actividad matemática, transformándola y aplicándola según sus necesidades. Esto, se observa cuando el grupo de estudiantes imita una demostración presente en un libro de texto, la cual esta inmersa en un contexto distinto (ver transcripción 1).

Por otra parte, las acciones llevadas a cabo por el grupo de estudiantes analizado surgen de forma espontánea convirtiéndose en estrategias grupales propias. Estas acciones se convierten en prácticas compartidas a través de un proceso de negociación e interacción en el cual los procedimientos son inicialmente individuales.

A su vez, es importante resaltar que en este caso dichas prácticas al ser desarrolladas en el proceso de resolución permiten al grupo identificar relaciones a partir de las cuales posiblemente se logren consolidar tanto los argumentos como los elementos funcionales y estructurales de la demostración. En el grupo estudiado, esas acciones son procedimientos propios de los estudiantes tales como: división, resta y conversión de racionales, los cuales se convirtieron en el criterio que permitió no perder la ruta en su proceso de demostración (Ver Transcripción 2 y figuras 1,2 y 3).

Además, podría considerarse que el uso de los libros de texto permite reconocer que en el proceso de aprendizaje no se parte de cero dado que hay una construcción previa. Así, dichos artefactos mediatizan la práctica social por medio de la cual tiene lugar el aprendizaje (Radford, 2006). A su vez, mediante el trabajo desarrollado por el grupo analizado se evidenció que los artefactos por sí solos no pueden hacer clara la inteligencia depositada en ellos. En consecuencia, podría considerarse necesario usarlos en el proceso de resolución en compañía de alguien que tenga la capacidad de leer esa inteligencia depositada en los libros de texto.

De esta manera, la interacción social cobra sentido tanto en el proceso de resolución como en el aprendizaje adquirido por el grupo de estudiantes analizado, dado que permite el descubrimiento y la aparición de nuevas estrategias y aprendizajes propios. Esto, considerando que no todos los miembros del grupo poseen y desarrollan las mismas estrategias.

En consecuencia, estas estrategias deben negociarse para establecer un saber y un quehacer común, donde las prácticas se comparten tomando sentido y permitiendo así la elaboración de significados de la demostración por parte del grupo de estudiantes considerado. Así, dicha elaboración puede traducirse en el enriquecimiento del aprendizaje y del proceso de resolución que lo produce como se evidencia en el quehacer matemático de los estudiantes analizados.

Ahora bien, en este caso específico un elemento esencial en la elaboración de significados de la demostración es concebirla como un objeto matemático susceptible de ser construido, como se puede evidenciar en las figuras 4 y 5. Por tal razón, es factible entenderla como una construcción que se apoya en procesos de particularización, generalización, representación, experimentación, comunicación, entre otros. En algunos casos (como el presentado), la demostración puede llegar a apoyarse y cobrar sentido mediante el uso de procedimientos aritméticos como la resta y la división, etc.

Finalmente, es importante mencionar que la teoría empleada en el desarrollo de este trabajo brinda elementos novedosos para la actividad matemática desarrollada en el aula de clase. Teniendo en cuenta que la atención no se centra sobre los objetos cognitivos, sino por el contrario, sobre el sujeto y su quehacer en un proceso de resolución. De esta manera, el proceso de construcción del conocimiento privilegia la naturaleza social del sujeto.

Sin embargo, es importante reconocer que el tipo de estudio realizado no permite establecer conclusiones generales. Lo anterior dado que las conclusiones presentadas son específicas a la población analizada, al objeto matemático estudiado y al proceso de resolución desarrollado.

Referencias y bibliografia

Gavilán, J., García, M. & Llinares, S. (2009). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. Revista Enseñanza de las Ciencias, Número 25 (2), 157-170.

Grupo MESCUD. (2008). Proyecto de Investigación: El Proceso de Demostración como instrumento de aprendizaje en la formación de profesores, Grupo Mescud, Colombia.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1989). Pensar Matemáticamente, Editorial Labor S.A. Madrid, España.

Radford, L. (2006). Elementos de Una Teoría Cultural de la Objetivación. Revista Latinoamericana de Matemáticas. (Número Especial) 103-129.

Rudin, W. (1976). Principles of Mathematical Analysis (3ra Edición). Bogotá, McGraw Hill Book Company.

Romero, J. & Sanjuán, A. (2009). Continuidad y ruptura en el proceso de demostración: Un estudio de caso, Grupo Mescud, Colombia.