



Uma Jornada pela História do Símbolo de Igualdade com os Três Mundos da Matemática

Josias Nogueira **Badaró**

Universidade Bandeirante de São Paulo

Brasil

josiasbadaro@gmail.com

Rosana Nogueira de **Lima**

Universidade Bandeirante de São Paulo

Brasil

rosananlima@gmail.com

Resumo

Neste artigo, apresentamos os nossos estudos em busca dos significados que foram atribuídos ao símbolo de igualdade ao longo da história da notação algébrica sob a perspectiva dos Três Mundos da Matemática, propostos por Tall (2004). Nossa reivindicação é que o entendimento do significado de igualdade e a forma como este conceito foi representado resultam de um processo de evolução do conhecimento humano e do aumento da sua capacidade cognitiva que mantém uma relação com o desenvolvimento cognitivo conforme proposto nos Três Mundos da Matemática.

Palavras chave: educação matemática, símbolo de igualdade, história da matemática, Três Mundos da Matemática.

Introdução

Difícil imaginar que alguém tenha estudado Matemática e não tenha se deparado com o símbolo de igualdade. Não são poucas as vezes em que este símbolo é colocado na nossa frente, como a nos desafiar para resolvermos uma situação qualquer que nos é proposta. O conceito de igualdade e a forma como o representamos fazem parte da vida de todos que lidam com cálculos elementares ou cálculos complexos, e não se pode desprezar a importância que possuem, principalmente na aprendizagem da Aritmética e da Álgebra.

Dada a importância que o símbolo de igualdade tem para a Matemática, vimos a necessidade de um estudo que levante suas raízes históricas, de forma a buscar compreender quais os significados que esse símbolo teve desde o seu aparecimento até os dias atuais. Acreditamos que tal busca pode trazer subsídios para o entendimento das dificuldades em lidar com esse símbolo, encontradas na literatura de Educação Matemática.

Com esta pesquisa, temos por objetivo levantar os significados dados ao símbolo de igualdade durante o seu desenvolvimento histórico, e analisá-los à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. Durante esta pesquisa, vimos que o símbolo de igualdade tem uma longa história, repleta de influências da cultura na qual era utilizado, e com significados cada vez mais complexos na sua utilização. Da mesma forma que os significados, a representação gráfica do símbolo de igualdade foi sendo alterada ao longo do tempo, também por influência do meio social e do autor que o usava, seguindo conveniências de cada época, chegando ao ponto de que uma determinada representação gráfica tivesse significado inverso ao usual, dependendo de quem o utilizasse.

Apresentaremos esse rico desenvolvimento histórico, os significados que encontramos nessa jornada, e a relação entre eles e os mundos conceitual corporificado, proceitual simbólico e formal axiomático.

Método

A pesquisa relatada neste trabalho foi parte de um estudo maior, que procurou, tanto na história da notação algébrica quanto na literatura de Educação Matemática, elementos sobre o símbolo de igualdade que tornariam possível identificar os significados dele em cada um dos Três Mundos da Matemática (Badaró, 2010). Neste artigo, apresentamos resultados de uma pesquisa bibliográfica referente à história do símbolo de igualdade. Discussões sobre as pesquisas em Educação Matemática podem ser encontradas em outro artigo (Lima & Badaró, submetido).

A opção pela pesquisa na história do símbolo de igualdade foi feita em razão do nosso entendimento de que o momento atual que cada ser humano vive é sempre uma resultante das decisões que foram tomadas anteriormente pelo próprio indivíduo ou por outro alguém e, se quisermos entender porque as coisas são como são, precisamos voltar aos registros do passado para compreender os dias atuais. Da mesma forma, como o foco da nossa pesquisa está num símbolo matemático que existe a mais de 400 anos, para entendermos por que ele é da forma que o usamos hoje, precisamos voltar aos registros do passado, conhecer a sua história, predecessores, origens, significados e formas gráficas ao longo do tempo, isto é, entender o valor e os significados do símbolo de igualdade nos nossos dias começa por saber a sua história e a sua evolução através do tempo. Podemos aprender com o passado, entendendo como o símbolo de igualdade foi utilizado, buscando novos entendimentos para o estudo dele no presente.

As fontes de dados relacionados à história da Matemática e às formas de notação algébrica são livros de historiadores renomados e referências bibliográficas em curso de História da

Matemática. A escolha dos livros que seriam nossas fontes de dados foi feita, inicialmente, pela quantidade de vezes que os autores eram citados em trabalhos acadêmicos. Para obter a relação, foram utilizados mecanismos de procura na *internet*, especificamente desenvolvidos para procura de trabalhos acadêmicos¹, e foram selecionados dois autores: **Boyer**² com seu livro *História da Matemática*, e **Eves**³ com *Introdução à História da Matemática*.

Ao pesquisar a história do símbolo de igualdade, uma obra mostrou-se a principal referência sobre a história da notação matemática, tendo sido citada em todas as outras obras que encontramos sobre o assunto: *A History of Mathematical Notations*, publicada pela primeira vez no final da década de 20 do século passado por **Cajori**⁴. Esse livro teve reconhecimento mundial, sendo, ainda, a principal referência sobre o assunto: “[...] é simplesmente monumental e permanece insuperável em erudição e detalhes meticulosos” (Zund, 1999, p.190-191, tradução nossa). Dessa forma, as obras desses três autores compuseram a principal base de dados para a nossa pesquisa no que se refere à história do símbolo de igualdade.

Para a análise desses dados, utilizamos o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, que pretende explicar o desenvolvimento cognitivo da Matemática.

Os Três Mundos da Matemática

Como estamos analisando os dados à luz de um novo quadro teórico, é importante apresentar os diferentes mundos e como eles foram usados dentro da análise que fizemos.

Durante os estudos que resultaram no livro *Advanced Mathematical Thinking*, em 1991, Tall apresentou reflexões e a possível formatação de um quadro teórico que integraria corporificação, encapsulamento de um processo em um objeto e prova formal em Matemática. Tall propõe a existência de pelo menos três diferentes tipos de Matemática: uma construída por meio da identificação das propriedades e suas coerências; outra, do encapsulamento de processos em conceitos; e a terceira baseada num conjunto de definições teóricas e provas, de acordo com a visão formalista da Matemática, elaborada por Hilbert. Esta discussão o guiou para desenvolver o referencial teórico que integra a corporificação, a encapsulação de um processo em um conceito e uma prova formal em Matemática, afirmando que cada um desses tipos de Matemática habita três diferentes mundos da Matemática (Tall, 2004).

No “Mundo Conceitual Corporificado” ou simplesmente “Mundo Corporificado”, no qual “corporificado” vem da noção de “dar um corpo” a uma ideia abstrata, temos a percepção do mundo, não somente do mundo físico, mas do nosso próprio mundo de entendimentos e de experiências sensoriais que nos habilitam a reconhecer e até mesmo prever (ou imaginar)

¹ Google Acadêmico: <http://scholar.google.com.br/schhp?hl=pt-BR>

² Carl Benjamin **Boyer** (1906-1976), matemático e historiador norte-americano.

³ Howard Whitley **Eves** (1911-2004), matemático e historiador norte-americano.

⁴ Florian **Cajori** (1859-1930). Matemático nascido na Suíça, mas migrou ainda jovem para os EUA, onde desenvolveu carreira de matemático e historiador.

concepções que não existem no mundo externo, como, por exemplo, a ideia de que uma linha é perfeitamente reta, que só encontramos no pensamento matemático.

O mundo corporificado não trata apenas da manipulação física de objetos, mas também de imagens de situações concretas, de situações mentais construídas pela percepção que temos e pelas observações que efetuamos. Tais situações possibilitam perceber propriedades matemáticas nesses objetos, e agir sobre eles para entender o que significam (Lima, 2007).

Neste mundo, a verdade é estabelecida pela realização de um experimento para ver se o resultado esperado acontece. A verdade fica estabelecida porque é visível.

No mundo corporificado, quando o sinal de igualdade é encontrado, ele é relacionado a coisas concretas, como indicar o resultado de uma contagem ou o lugar onde a resposta de uma expressão deve ser colocada.

Acompanhando o desenrolar do crescimento cognitivo, Tall (2004) apresenta o “Mundo Proceitual Simbólico”, ou simplesmente “Mundo Simbólico”, que é o mundo dos símbolos que utilizamos para calcular e fazer manipulações.

Neste mundo, ampliam-se os significados dados no mundo corporificado aos conceitos matemáticos, e, para que algo seja aceito como verdade, são necessários cálculos e manipulação dos símbolos que o habitam. Nesse ponto do desenvolvimento cognitivo, os indivíduos passam a perceber que os símbolos podem representar processos e conceitos de maneira imbricada. Eles deixam de ser apenas uma indicação de ação ou de demanda de um processo, e passam a encapsular **processos** e **conceitos**, os “proceitos” (Gray e Tall, 1994).

No mundo simbólico, o símbolo de igualdade passa a representar um “proceito”; portanto, no seu âmago, processos e conceitos. Encontramos um exemplo dessa situação no significado do símbolo de igualdade relacionado a uma equação, na qual ele representa tanto o conceito de equação, como o processo de resolução da mesma. Além disso, nesse mundo, a verdade é estabelecida pelo cálculo com números e manipulações com os símbolos algébricos.

Na continuação do desenvolvimento do pensamento matemático, começam a surgir situações em que o indivíduo passa a ter condição de “fazer Matemática”. Essa situação Tall (2004) caracteriza como sendo pertencente ao “Mundo Formal Axiomático” ou simplesmente “Mundo Formal”. O conhecimento que habita esse mundo é aquele que está baseado em provas reconhecidas, em propriedades expressas, em definições formais e em axiomas.

O mundo formal caracteriza-se pela construção axiomática dos diferentes campos da Matemática, além de utilização da linguagem formal e das definições formais para os conceitos, a partir das quais são feitas deduções e demonstrações. A presença ou não desse mundo em sua totalidade, no trabalho de um indivíduo com a Matemática, está ligada ao desenvolvimento cognitivo que ele alcançou e ao conhecimento da Matemática que ele obteve ao longo desse desenvolvimento.

Nesse mundo, a verdade é estabelecida pela prova formal, pelo cotejo com os axiomas. Transitar pelos conhecimentos desse mundo não apenas possibilita o uso da Matemática, mas também a construção da mesma, ou seja, desenvolvimento de novos conhecimentos matemáticos.

O símbolo de igualdade no mundo formal extrapola o entendimento que lhe é dado no mundo simbólico, passando a ser entendido como a indicação de uma verdade, resultado de uma prova, ou então, algo que ainda precisa ser provado para alcançar essa situação.

Com o estudo dos significados do símbolo de igualdade apresentados na história da notação algébrica, esperamos encontrar subsídios para que possamos compará-los com as características de cada um dos Três Mundos da Matemática.

História do Símbolo de Igualdade

Quando iniciamos o levantamento da história do símbolo de igualdade na Matemática, percebemos que o processo histórico desse símbolo foi iniciado muito antes dele ter sido cunhado, e se consagrou muito tempo depois dele ter sido utilizado pela primeira vez.

Na história da notação algébrica do símbolo de igualdade, pudemos acompanhar a própria evolução da Matemática. Independentemente do momento histórico ou da situação em que foram utilizados, pudemos constatar que os símbolos, ao longo da história, carregaram os significados que os matemáticos estavam pensando quando fizeram uso deles. Os significados ao longo da história da notação do símbolo de igualdade não só existiram como evoluíram junto com o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O símbolo gráfico que utilizamos hoje em dia para o símbolo de igualdade é antigo (tem mais de 450 anos), mas conviveu, por muitos séculos, com outras formas de representação, até que prevalecesse e chegasse até nós.

Cajori (2007a) aponta que, antes mesmo de Robert Record ter publicado, em 1557, o símbolo de igualdade na forma como é utilizado hoje ($=$, ou duas retas paralelas), havia outras formas de representação da igualdade matemática, por meio de símbolos. No papiro Rhind, ou de Ahmes, foi encontrado um símbolo com o significado “dá” que tem formato semelhante ao símbolo atualmente em uso. Na obra de Diofanto, é possível encontrar o símbolo “ $\iota\sigma$ ” para indicar a igualdade. No manuscrito indiano encontrado em Bakhshali (cidade hoje pertencente ao Paquistão), que se estima tenha sido feito entre os séculos II e III da era cristã, a igualdade era representada por “pha” (फ़) que se originou da palavra *phala* (फल – fruto em sânscrito), com o significado “o resultado de um cálculo”. Num trabalho do árabe al-Qalasâdî, do século XV d.C., para representar o símbolo de igualdade, foi utilizada a letra “ \cup ” (*lam*) de “*adala*”, que significa igualdade (Fink, 1900, p. 89).

Já na Europa, até por volta do século XV da nossa era, os símbolos eram pouco utilizados. Regiomontanus, Paccioli e Bombelli, algumas vezes, utilizaram um traço ($—$) para representar

uma igualdade, enquanto Cardano, simplesmente deixava um espaço em branco no lugar que deveria ser a indicação da igualdade.

Mas foi em 1557 que Recorde publicou pela primeira vez o símbolo que hoje utilizamos para indicar a igualdade, que, na verdade, era um pouco maior do que o que utilizamos hoje: “ ”.

Depois dele, outros símbolos ainda foram utilizados:

Xylander: “||” ; Digges: “ \equiv ” ; Andrea: “ \equiv ” ; Hérigone: “2|2” ou “ \square ” ;

Descartes: “ ∞ ” ; Dulaurens: “ \square ” ; Buteo: “[” ; Swedenborg: “//” ; Nicole: “ \equiv ” ; Reyher: “|” ; Bellavitis: “ \equiv ” ; De Morgan: “==” ; Pasquier: “ \equiv ” .

Também era comum a impressão do símbolo de igualdade com a utilização adaptada de tipos mais comuns, como o algarismo 1: $\overline{1}$ ou $\overline{1}$.

Significados

Depois de relacionar e formar uma cronologia dos símbolos de igualdade, procuramos significados dos símbolos, relacionando-os com as épocas em que foram utilizados, e buscando enquadrar estes significados com cada um dos Três Mundos da Matemática.

Quando analisamos o símbolo “ $\overline{1}$ ” , encontrado no Papiro Rhind e “ $\overline{1}$ ”, utilizado por Diofanto, identificamos que eles indicam o resultado da sentença que os precede, tanto que o símbolo do papiro Rhind, traduzido literalmente, significa “*isso dá*”, indicando que, na sequência, seria apresentado o resultado da expressão numérica que o antecede.

Como nessa época os indivíduos trabalhavam basicamente com os números, especialmente os naturais, e, no nosso entendimento, a ideia de fazer contas em Aritmética é corporificada, esse significado de colocar o resultado depois do símbolo de igualdade também é habitante do mundo corporificado.

Segundo a nossa análise, o símbolo, “ $\overline{1}$ ” (pha), utilizado no manuscrito Bakhshali, também se enquadra na situação acima, isto é, tem características do mundo corporificado, mas vale destacá-lo pela origem do símbolo na palavra *phala*, que significa *fruto*. Acreditamos que a utilização dessa palavra, na forma abreviada, indicava que o valor colocado após o símbolo representava o fruto (resultado) de uma expressão que o precedia.

Antes de partirmos para a análise dos símbolos originados na Europa Ocidental, trazemos o símbolo “ $\overline{1}$ ” utilizado por al-Qalasâdî, que nasceu na região de Andaluzia, na Espanha, mas era de origem árabe, tendo feito a sua formação em países com predomínio muçulmano, como Argélia e Egito. O símbolo “ $\overline{1}$ ”, que al-Qalasâdî utilizou, pode ser entendido como uma forma sincopada da palavra árabe “*adala*” que significa igualdade.

Os árabes fizeram, ao longo dos séculos, grandes investimentos na pesquisa dos conhecimentos matemáticos dos Gregos e dos Hindus, e, além de se tornarem depositários desses

conhecimentos, fizeram contribuições ao desenvolvimento da Matemática: “Resolveram equações cúbicas por construção geométrica, aperfeiçoaram a trigonometria até um alto nível e conseguiram avanços menores e por toda Matemática, a Física e Astronomia” (Cajori, 2007b, p. 168). Apesar disso, dada a pouca familiaridade deles com símbolos, e dado que o símbolo adotado por al-Qalasâdî é uma letra, entendemos que se tratava apenas de uma simplificação da escrita, nada indicando que pudesse estar colocado, nesta forma de indicar a igualdade, algo mais do que uma representação corporificada.

Quando, na nossa jornada, chegamos aos símbolos utilizados por matemáticos da Europa Ocidental para indicar a igualdade, encontramos, de início, duas situações que acreditamos serem semelhantes: o uso de um traço e o uso de espaço.

Alguns autores (Regiomontanus, Paccioli, Bombelli, por exemplo) utilizam um traço “—” para indicar a igualdade, enquanto Cardano simplesmente deixava um espaço em branco. Entendemos que tais representações ainda não caracterizavam o uso real de um símbolo para indicar a igualdade, pois o traço e o espaço em branco parecem indicar apenas a resposta de uma proposição ou expressão anteriormente formulada. Tais representações estão caracterizadas como recursos do mundo corporificado, pois parecem apenas querer indicar um registro físico de separação entre o fim da proposição e o início da resposta. O espaço e o traço não parecem representar um conceito e um processo.

No nosso entendimento, a diversidade de símbolos que surgiram depois do “=” criado por Robert Recorde, desde meados do século XVI até o século XIX, (Xylander “||”; Digges “≋”; Andrea “∩”; Hérigone “⊥”; Dulaurens “⊓”; Buteo “⌈”; Swedenborg “//”; Nicole “—”; Reyher “|”), são resultados da evolução da notação algébrica, já que alguns matemáticos desse período estavam abandonando a álgebra retórica e a álgebra sincopada, procurando apresentar as suas descobertas utilizando símbolos.

Em Cajori (2007a), esses símbolos são apresentados em situações que podem estar associadas a significados do mundo corporificado quando utilizados em representações para indicar o resultado, e também representavam a evolução do pensamento matemático, ocupando lugar em demonstrações dos novos conhecimentos que iam sendo apresentados. Nessa condição, esses símbolos também traziam significados do mundo formal, pois tais demonstrações se valiam do conhecimento Matemático que já existia, baseando-se em axiomas e formulações do pensamento avançado da época. Para exemplificar a situação descrita acima, vamos destacar a análise dos símbolos adotados por Hérigone “2|2” e Descartes “∞”.

Entendemos que, quando Hérigone utilizou o símbolo “2|2”, estava com o pensamento com características do mundo corporificado. A representação da igualdade colocada dessa maneira mostra que o autor tinha a preocupação de fazer uma apresentação da igualdade de maneira concreta, utilizando um símbolo que já trazia na sua notação a própria igualdade, querendo lembrar ao leitor que o símbolo colocado entre duas expressões ou termos estava ali para indicar que eram iguais, tanto quanto 2 é igual a 2. Mais clara essa conclusão fica quando verificamos os

símbolos que ele utilizava para representar “maior que” e “menor que”: “ \succ ” e “ \prec ”, respectivamente.

Quanto ao símbolo utilizado por Descartes “ \sphericalangle ”, aparentemente reutilizado dos símbolos da Astronomia, parecia indicar algo mais do que uma simples igualdade. Para ele, foi necessário simbolizar a igualdade com algo do cosmos e, quem sabe, baseando-se na filosofia grega, num objeto do Universo regido por leis e regularidades. Pela variedade e qualidade da sua obra, acreditamos que Descartes chegou a um desenvolvimento cognitivo do conhecimento matemático que tanto podia utilizar o símbolo de igualdade com as características do mundo corporificado, quanto utilizá-lo com características do mundo formal nas demonstrações dos novos conhecimentos matemáticos que produzia.

Da mesma forma, a conclusão sobre o símbolo de Hérigone não impede que, embora com estrutura notacional bastante corporificada, possa ter sido utilizado em situações que pudessem ser identificadas com características do mundo formal, como, por exemplo, na demonstração de um teorema. Essa condição vale para todos os símbolos que encontramos, e saber se o uso de um símbolo se restringiu a um determinado mundo, ou poderia ter sido utilizado em todos eles, exigiria uma análise da obra completa de todos os matemáticos que citamos, o que não é o objetivo deste trabalho.

Já no século XIX, Bellavitis utilizou também um símbolo da Astronomia, “ Ω ”, que representa a constelação de Libra ou Balança. Novamente, a utilização desse símbolo parece indicar a força que o autor queria dar para o equilíbrio representado pela igualdade, o que significa que este símbolo foi usado com características semelhantes ao símbolo de Descartes, isto é, corporificadas.

Por sua vez, De Morgan, em 1842, ao utilizar “ $=$ ”, trouxe uma nova definição, acrescentando um novo significado para o símbolo. No seu trabalho, ele fazia uma contribuição ao desenvolvimento da Teoria dos Logaritmos, e duplicou o símbolo de igualdade para indicar que duas situações deveriam acontecer ao mesmo tempo. Pretendia, dessa forma, expressar tanto o comprimento e a direção de uma linha quanto a quantidade de revoluções que essa linha deveria cumprir.

Encontramos, na utilização feita por De Morgan do símbolo de igualdade, uma situação que possui as características tanto do mundo corporificado quanto do mundo formal. Do mundo corporificado, vemos a representação utilizando dois símbolos para identificar que existem duas igualdades; e do mundo formal, encontramos a características de uma nova construção na Matemática, tanto do símbolo novo quanto da definição dos novos conceitos que ele representa; não só da dupla indicação de igualdade, mas também da nova definição, uma contribuição para o desenvolvimento da Teoria dos Logaritmos.

Também Pasquier, em 1920, quando criou o símbolo “ \equiv ” com um duplo sinal de igualdade, para indicar uma “igualdade por definição”, estava utilizando recursos do mundo formal, pois apresentava uma nova definição para o símbolo de igualdade. Num trabalho sobre

séries, ele utilizou esse símbolo para indicar relações entre os coeficientes das potências em que o símbolo “ \equiv ” indicava que a igualdade não é aritmética, sendo apenas formal.

De maneira proposital, deixamos para o fim o símbolo “=”, e voltando no tempo, reencontramos com Robert Recorde e o seu símbolo para a igualdade: “ ===== ”, que apareceu pela primeira vez no livro *Whetstone of Witte*, de 1557, que se propunha a ensinar aritmética e álgebra para pessoas sem conhecimento anterior. Recorde escreveu um livro repleto de esquemas com chaves, tabelas, desenhos de quadrados e cubos, explicações por meio de diálogos entre professor e aluno, orientações passo a passo, e com uma linguagem acessível ao povo em geral. Em mais da metade do livro, Recorde utilizou um traço sob o último número para indicar o lugar da resposta, tal qual é comum até hoje nas séries iniciais das nossas escolas.

Em um livro de pouco mais de 300 páginas, somente depois da página 200 é que Recorde introduziu o símbolo “=” para indicar a igualdade e, ao lado da frase

“Porei, como muitas vezes uso no trabalho, um par de paralelas, ou retas gêmeas, de um comprimento assim: ===== , porque duas coisas não podem ser mais iguais” (p. 197),

que utilizou para justificar a escolha, e completou que era para não ficar repetindo a palavra “aequalis”. Isso ocorreu quando ele passou a explicar o que eram e mostrar tipos de equações.

Com essas constatações, entendemos que o símbolo de “=” foi criado por Recorde com o intuito de diferenciar a situação de igualdade quando apresentou em seu livro os conteúdos de Aritmética, da parte que trabalhava com conceitos algébricos de equação. Isso nos leva a concluir que ele tratava a igualdade utilizada na equação com conceitos do mundo simbólico e, por conseguinte, o símbolo “=” foi criado nesse contexto.

Durante a nossa análise dos símbolos de igualdade ao longo da história da notação algébrica, foi surgindo a ideia de que haveria, por volta do final do século XVI e início do século XVII, um período que nos parecia caracterizar uma mudança importante e disseminada entre os matemáticos da época. Embora estivéssemos olhando apenas para o símbolo de igualdade, percebemos que a generalização do uso de símbolos por parte dos matemáticos da Europa Ocidental indicava uma tendência de mudança, não somente na notação, mas também na forma do pensamento algébrico. De acordo com esse pensamento, encontramos, em Eves (2008), a afirmação de que o século XVII representa o que ele chamou de “A Alvorada da Matemática Moderna”. Como é nosso entendimento que a Matemática resulta de um processo de evolução do conhecimento humano e do aumento da sua capacidade cognitiva, podemos imaginar que os matemáticos que viveram antes desse período tiveram participação nesse processo de evolução.

Focando na participação de Robert Recorde nesse processo, percebemos que ele demonstrava uma preocupação em resgatar e levar ao povo o conhecimento matemático em Aritmética, Álgebra e Geometria, tomando a iniciativa de publicar suas obras na língua inglesa e

com títulos bastante estimulantes: *No Terreno das Artes; Caminho para o Conhecimento; O Castelo do Conhecimento; A Pedra de afiar da inteligência.*

A invenção, em meados do século XV, da impressão por tipos mecânicos móveis ajudou a popularizar os livros e, dessa forma, ajudou a impulsionar a divulgação do conhecimento matemático nas sociedades da época. Essa forma de impressão facilitava a criação e reutilização de tipos, o que levou cada vez mais a utilização dos símbolos para representação desse conhecimento. Já apresentamos neste trabalho os símbolos utilizados por Descartes e Bellavitis, adaptados de símbolos da Astronomia, mas entendemos que o exemplo mais marcante dessa prática aparece nas adaptações realizadas para representar o símbolo de igualdade de Recorde, com a utilização do algarismo 1: “ \equiv ” : “ \equiv ”.

Entendemos que, com o início da popularização do conhecimento da Matemática, novos indivíduos tiveram oportunidade de desenvolver o conhecimento e, num processo de retroalimentação, divulgar tal conhecimento para a população em geral.

Isso faz com que o símbolo inventado por Recorde tenha sofrido, ao longo do tempo, uma constante mudança em relação ao significado original. Com a universalização do uso desse símbolo, a cada avanço da Matemática em que seja necessário representar uma situação de igualdade, o símbolo “ $=$ ” ganha um novo significado.

Discussão

Neste artigo, apresentamos uma análise dos significados do símbolo de igualdade encontrados ao longo da história da notação algébrica e a relação desses significados em relação a cada um dos Três Mundos da Matemática.

Quando iniciamos a nossa longa jornada em busca dos significados do símbolo de igualdade em cada um dos Três Mundos da Matemática, não tínhamos como prever nem estimar os resultados da nossa pesquisa.

Mas, à medida em que a pesquisa se aprofundava nos significados encontrados, o nosso entendimento sofria uma evolução, saindo de um mundo em que tínhamos a necessidade de ver materializados os significados obtidos nos registros que encontramos na história da notação algébrica, para uma condição de reflexão num mundo em que o pensamento e as conclusões aconteciam sem a necessidade de um apoio corporificado.

Dessas reflexões, veio um entendimento da evolução que ocorreu na notação algébrica, como reflexo da evolução da Matemática, ou, mais objetivamente, do pensamento matemático.

Percorrendo a história da notação algébrica, percebemos que a evolução do símbolo de igualdade ocorreu durante de gerações. O formato do símbolo era alterado, e os significados que ele representava eram acumulados no mesmo símbolo. Entendemos que essa forma de desenvolvimento é própria do ser humano e do conhecimento que acumula ao longo do tempo.

Como vimos, para que os registros do símbolo de igualdade chegassem ao formato atual, foram necessários muitos séculos, num longo e diversificado processo, inerente ao desenvolvimento de cada povo, de cada civilização. Muitos símbolos, representações gráficas simplificadas de conceitos, muitas vezes não tão simples, também viveram um processo de transformação tanto na forma quanto no conteúdo que representavam.

Nessa condição, encontra-se o conceito de igualdade, que foi utilizado em todas as formas de notação algébrica, e, quando passou a ser representado por um símbolo, também sofreu transformações na forma e no conceito que representava. Esse símbolo tem tanta representatividade que acompanha a evolução da Matemática e, com isso, incorpora, frequentemente, novos significados.

Se olharmos para o quadro evolutivo descrito acima e compararmos com a descrição dos Três Mundos da Matemática, veremos que existe uma similaridade de situações que não acreditamos seja apenas coincidência.

O quadro teórico dos Três Mundos da Matemática não procura explicar o desenvolvimento evolutivo da Matemática, mas, sim, o desenvolvimento cognitivo dos indivíduos em relação à aprendizagem e o uso que fazem da Matemática; mas, quando olhamos para a descrição acima e vemos a maneira como o desenvolvimento da Matemática e da notação algébrica aconteceu, podemos relacionar esse processo evolutivo com o que acontece com um indivíduo em relação à própria Matemática.

Olhando para a história, o início da Matemática tem extraordinária similaridade com o mundo corporificado. Não havia nada além das ideias relacionadas ao uso concreto da contagem. Com a evolução, as situações do cotidiano foram tornando as ideias mais complexas, o que nem sempre permitia que as situações matemáticas fossem visualizadas. Então, passou-se a provar que as ideias estavam corretas sem a necessidade de uso de recursos físicos. Eis aí a similaridade com o mundo corporificado; e mais, quando nos damos conta do desenvolvimento da Matemática que ocorria, percebemos, nesses momentos, as características do mundo formal.

Se aplicarmos o mesmo raciocínio para o símbolo que representa a igualdade, percebemos que ele percorre a mesma trajetória.

Nos usos iniciais, o símbolo de igualdade era utilizado para representar o resultado de operações, o indicativo da resposta. Era visto apenas como o indicador do fim de um processo, sem reconhecimento de um conceito associado ao processo. Dessa forma, entendemos que o símbolo de igualdade era utilizado com as características do mundo corporificado.

Quando a evolução da Matemática passou a exigir prova da veracidade das representações, descolando-se da necessidade de comprovação física, o símbolo de igualdade passou a ser o indicativo não somente da resposta, mas passou a representar, associado ao processo que era demonstrado, o conceito de igualdade. Nessa situação, identificamos as características dos mundos simbólico e formal.

Por fim, quando olhamos para o indivíduo e para o uso que ele faz do símbolo de igualdade, percebemos que ocorre a mesma situação descrita acima, ou seja, o símbolo de igualdade está presente em todos os Mundos da Matemática.

Referências

- BADARÓ, J. N. (2010). *Significados do símbolo de igualdade numa jornada por Três Mundos da Matemática*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.
- BOYER, C. B. (1974). *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher.
- CAJORI, F. (2007a). *A History of Mathematical Notations*. New York: Cosimo.
- _____. (2007b). *Uma História da Matemática*. Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.
- EVES, H. (2008). *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp.
- FINK, K. (1900). *A Brief History of Mathematics*. Chicago: The Open Court Publishing Company.
- GRAY, E.; TALL, D. O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26, (p. 115-141).
- LIMA, R. N. (2007). *Algébricas no Ensino Médio: uma Jornada por diferentes Mundos da Matemática*. São Paulo: [s.n.]. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- LIMA, R. N.; BADARÓ, J. N. (submetido). Revisiting Students' meanings for the equality symbol. In *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Ancara: PME.
- RECORDE, R. (1557). *The Whetstone of Witte*. London: [s.n.].
- TALL, D. O. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. (D. O. Tall, Ed.) Kluwer.
- _____. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen, Norway: [s.n.]. (p. 281–288).
- _____. (2007). *Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education*. [S.l.]: [s.n.].
- ZUND, J. D. (1999). *American National Biography*. Oxford: [s.n.], v. 4.