(CO) Elementos de Geometria F.I.C. – explorando duas provas distintas do teorema de Pitágoras

Regina de Cassia Manso de **Almeida**
Universidade Federal Fluminense – Colégio Universitário Geraldo Reis
Brasil
rem@vm.uff.br

Resumo

Este artigo advém do meu trabalho de pesquisa com livros-texto de matemática. O texto escolar nos desafia quando se tem por alvo ir construindo um entendimento do conteúdo da matemática escolar em seu processo histórico-cultural. Nesse sentido é que submeti à análise a presença do teorema de Pitágoras, em livros-texto de geometria plana elementar, relatando aqui parte do estudo referente aos *Elementos de Geometria* F.I.C.: justamente, fatores característicos do modo pelo qual o teorema de Pitágoras é demonstrado, revelam o lugar chave que a proporcionalidade, a correlação geometria-aritmética-álgebra e os diferentes modo de prova ocupam na abordagem dos conteúdos elementares em matemática. A partir daí estabeleço algumas inferências.

Palavras-chave: livros-texto, matemática elementar, demonstração, correlação geometria-aritmética-álgebra

Introdução

O teorema de Pitágoras é um assunto atual nos conteúdos dos livros de matemática para o ensino básico e comumente consta dos livros elementares em sua forma algébrica $b^2 + c^2 = a^2$, indicando a relação métrica entre os lados de um triângulo retângulo. Sendo característico, nesse caso, a abordagem voltada a aplicações práticas, a resolução de problemas a qual se adequa às propostas de ensino hoje em voga.

Mas o texto escolar nos desafia quando se tem por alvo ir construindo um entendimento do conteúdo da matemática escolar em seu processo histórico-cultural (Schubring, 2005; Carvalho, 2006). Nesse sentido é que submeti à análise a presença do teorema de Pitágoras, em livros-texto de geometria plana elementar, relatando aqui parte do estudo referente aos *Elementos de Geometria* F.I.C.: justamente, fatores característicos do modo pelo qual o teorema de Pitágoras é demonstrado, revelam o lugar chave que a proporcionalidade, a correlação geometria-aritmética-álgebra e os diferentes modo de prova ocupam na abordagem dos conteúdos elementares em matemática. A partir daí estabeleço algumas inferências.

Examinei um exemplar dos *Elementos de geometria*, livro da série de publicações F.I.C. editado em Paris no ano de 1933, sem número de edição; versão para o português de Eugenio de Barros Raja Gabaglia. A sigla F. I. C. indica uma série de publicações com origem, em 1660, nas escolas francesas da congregação *Frères de l'Instruction Chrétienne*. No Brasil, esse compêndio foi indicado no período 1923-1931 pelos programas do Colégio Pedro II tendo, entre nós, longa permanência visto que há edições tardias datadas dos anos 50.

Temos sob análise um livro tipo elementos de geometria que trata de geometria plana elementar e se caracteriza pela estrutura dedutiva teorema-problema - cada livro ou capítulo tem início com as definições ao que se segue a série de proposições e respectivas provas - sendo esta uma característica do livro tipo elementos de geometria, que ao longo de séculos constituíram parte do acervo escrito da matemática escolar. Os *teoremas* têm por objetivo demonstrar que um objeto que sabemos existir possui ou não possui uma propriedade; os *problemas* propõem que se demonstre a existência das figuras geométricas. Com efeito, o livro tipo elementos de geometria remete ainda ao fato de que os conteúdos escolares que hoje de modo geral estão englobados nos livros de matemática, têm um percurso histórico marcado pela divisão em três grandes ramos – geometria, aritmética e álgebra - gerando ao longo de séculos as publicações designadas como, elementos de. Historicamente, temos essa organização temática dos conteúdos da matemática em geometria, aritmética, trigonometria, álgebra, entre outros casos (......., 2008a).

O Elementos de Geometria, F.I.C. apresenta duas provas distintas do teorema de Pitágoras – uma com base em semelhança de figuras e a outra pela equivalência de áreas – fato que leva a questionar: como a presença de duas provas distintas para o teorema de Pitágoras está justificada no contexto dedutivo do livro? Essa busca na verdade me levou a reconhecer a abordagem do livro notavelmente operando com um conjunto de definições e demonstrações que, em suma, explicita que as relações métricas estabelecidas a partir de igualdades proporcionais caracterizam a prova, no primeiro caso; revela ainda a correlação entre os três grandes ramos da matemática. Já no segundo, a abordagem está marcadamente filiada ao método geométrico euclidiano de prova.

Contexto da primeira prova do teorema de Pitágoras – semelhança de figuras

A demonstração do teorema de Pitágoras pela semelhança de figuras, consta do *Livro III*: *Figuras semelhantes*, item *VI – Relações numericas das linhas nos triângulos*. Preliminarmente, o texto apresenta as definições que associam segmento de reta e medida numérica, ou seja, associam geometria e aritmética,

> 245. Chama-se *quadrado* de uma linha o quadrado do numero que exprime o comprimento d'essa linha.
> Chama-se *somma*, *differença*, *producto*, *quociente* ou *razão* de duas linhas, a somma, a differença, o producto, o quociente ou razão, dos números que exprimem os comprimentos d'essas linhas com relação á mesma unidade. (p. 103)

Segue-se a definição de projeção, passo necessário no encaminhamento da prova em curso e, logo após, uma observação que deve ser examinada atenciosamente. Note que as identidades algébricas $(a \pm b)^2$ e $(a + b)(a - b)$ comumente denominadas nos livros atuais de matemática para o ensino básico como produtos notáveis, denominam-se fórmulas algébricas no *Elementos de Geometria F.I.C.* Não raro, venho constatando tais ocorrências neste e em outros livros-textos desta mesma época ou mais antigos e mesmo posteriores. Assim, a nomeação dos objetos matemáticos em uso nos livros-textos apresenta-se como uma problemática que demanda pesquisa.

Com a observação, abaixo, o encaminhamento da abordagem explicita como se estabelece a correlação geometria-aritmética-álgebra.

246. Observação. No estudo das relações numericas, frequentemente se empregam as seguintes fórmulas algebricas :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Os symbolos a e b podendo representar linhas, as fórmulas acima se enunciam como se segue :

1º *O quadrado da somma de duas linhas* é igual ao quadrado da primeira, mais o quadrado da segunda, mais duas vezes o producto d'essas duas linhas.

2º *O quadrado da differença de duas linhas* é igual ao quadrado da primeira, mais o quadrado da segunda, menos duas vezes o producto d'essas duas linhas.

3º *A somma de duas linhas, multiplicada pela differença*, é igual ao quadrado da primeira linha, menos o quadrado da segunda, isto é, igual á differença dos quadrados d'essas linhas.

Figura 1. Fórmulas algébricas, *Elementos de Geometria*, F.I.C.,1933, p. 104.

Vejamos: conforme as definições de abertura no tópico Relações numéricas das linhas no triângulo, citadas anteriormente, quando as operações aritméticas referem segmentos de reta (linhas), ou seja, objetos geométricos, elas indicam que se opera com o número que exprime os respectivos comprimentos dos segmentos. Complementarmente, ainda pela observação em pauta, as igualdades que indicam relações numéricas, ou seja, operações com números, podem ter a e b representando também segmentos de reta (linhas), objetos geométricos. Voltaremos à importância dessa passagem que pode ser esquematizada assim:

segmento de reta – valor numérico associado – representação algébrica associada

ou seja, fica estabelecida a correlação geometria-aritmética-álgebra.

Em seqüência, o desenvolvimento do assunto implica no conceito de média proporcional entre segmentos com o que se estabelece a proporcionalidade entre a altura e a projeção, sobre a hipotenusa, dos lados que formam o ângulo reto, no caso do triângulo retângulo. Essa passagem é fundamental porque justamente as igualdades que daí resultam, passam a ser vistas como igualdades numéricas ou algébricas.

Constam do extrato, abaixo, os índices (*nº 224*) e (*nº 220*) que justificam a prova, ou seja, justificam a semelhança dos dois triângulos, revelando o caráter dedutivo da abordagem. Temos o item "n^{o} 220. Chamam-se polygonos semelhantes os que têm os ângulos respectivamente iguaes, e os lados homologos proporcionaes" (p. 92) e o item "n^{o} 224. Dois triângulos retângulos são semelhantes quando têm um angulo agudo igual" (p. 94). Note que essa é outra característica do livro tipo Elementos de Geometria, o texto é indexado e, com isso, torna-se recursivo: a demonstração de um teorema está permeada por índices que reenviam a proposições já vistas.

Theorema.

247. *N'um triangulo rectangulo :*

1° *Cada lado do angulo recto é media proporcional entre sua projecção sobre a hypotenusa e a hypotenusa inteira;*

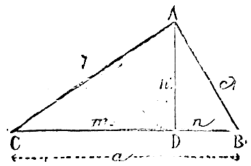

Fig. 181.

2° *A altura é media proporcional entre os dois segmentos que ella determina sobre a hypotenusa.*

Seja ABC um triangulo rectangulo, e seja AD a perpendicular abaixada do vertice do angulo recto sobre a hypothenusa

1.° Os triangulos rectangulos CAB e CDA são semelhantes por terem um angulo agudo commum C (n° 224); podemos pois dizer (n° 220)

a, hypotenusa do primeiro triangulo, está para b, hypotenusa do segundo, como b, opposto ao angulo B no primeiro triangulo, está para m, seu homologo no segundo :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$$

Assim tambem, os triangulos CAB e ADB são semelhantes, e dão :

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$$

2.° Os triangulos CDA e ADB, semelhantes cada um a CAB, são semelhantes entre si, e dão a proporção

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

Logo...

Figura 2. Teorema, Elementos de Geometria, F. I. C., 1933, p. 105.

Os dois escólios que se seguem completam a demonstração do teorema de Pitágoras. Conforme o *Escholio I*, temos as igualdades estabelecidas pelas três proporções, acima, que levam, conforme o *Escholio II*, a uma prova que resulta de operações com estas mesmas igualdades.

248. Escholio I. *Em todo triangulo rectangulo,*

O quadrado d'um lado do angulo recto é igual á sua projecção sobre a hypotenusa, multiplicada pela hypotenusa inteira;

O quadrado da altura é igual ao producto dos dois segmentos da hypotenusa.

Com effeito, das tres proporções acima, fazendo os productos dos meios e dos extremos, deduz-se :

$$b^2 = am \qquad c^2 = an \qquad h^2 = mn$$

Figura 3. Escholio I, *Elementos de Geometria*, F.I.C., 1933, p. 105.

249. Escholio II. *O quadrado da hypotenusa d'um triangulo rectangulo é igual á somma dos quadrados dos lados do angulo recto.*

Com effeito, addicionando membro a membro as igualdades $b^2 = am$ e $c^2 = an$, obtem-se :

$$b^2 + c^2 = am + an$$
$$= a(m + n) = aa = a^2$$

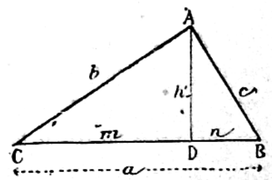

Figura 4. Escholio II, *Elementos de Geometria*, F.I.C., 1933, p. 105.

O texto apresenta ainda os casos das relações métricas dos lados no triângulo qualquer, além de apresentar os casos das relações métricas entre os lados e as medianas e entre os lados e as diagonais.

As justificativas para a prova do teorema de Pitágoras, conforme o primeiro encaminhamento, recaem sobre as relações proporcionais que definem a semelhança de triângulos. Atualmente esta é a abordagem comum nos livros de matemática quando se apresenta o teorema de Pitágoras. Com efeito, o Elementos de Geometria F.I.C. mostra uma propriedade dos triângulos, no caso, uma propriedade do triângulo retângulo ou, ainda, o teorema Pitágoras sendo escrito algebricamente a partir da proporcionalidade e, com isso, sendo provado por operações com igualdades algébricas. Mas o texto da geometria F.I.C. mostra ainda que o teorema de Pitágoras pode ser provado sem o conceito de semelhança, possibilitando ainda demais considerações sobre os conteúdos escolares.

Contexto da segunda prova do teorema de Pitágoras – a equivalência de áreas

A segunda prova do teorema de Pitágoras, pela equivalência de áreas, consta no *Livro IV*, *Avaliação das superfícies*, item *II – Relações entre as superfícies*. Inicialmente, o Livro IV apresenta a definição de superfície, área e igualdade entre superfícies,

> *Superfície* é a extensão a duas dimensões: comprimento de largura.
> *Área* de uma figura é o número que exprime a relação entre a superfície d'essa figura e a respectiva unidade.
> Duas superfícies são *iguaes* quando, superpostas, coincidem; e são equivalentes quanto têm a mesma extensão, a mesma área. (p. 149)

Após apresentar alguns teoremas sobre a área de figuras planas, o item II – Relações entre as superfícies, retoma as identidades algébricas já citadas, mas em novos termos, como mostram os enunciados dos seguintes teoremas,

> 325. *O quadrado construído sobre a somma de duas linhas é igual à somma dos quadrados construidos sobre essas duas linhas, mais duas vezes o retctangulo com essas mesmas linhas* (n° 246).
> 326. *O quadrado construído sobre a differença de duas linhas é igual à somma dos quadrados construidos sobre essas duas linhas, menos duas vezes o retctangulo com essas mesmas linhas* (n° 246).
> 327. *O quadrado construído sobre a somma e a differença de duas linhas é igual à differença dos quadrados construidos sobre essas duas linhas* (n° 246).

Vejamos, como exemplo, a prova do teorema 325,

Theorema.

325. *O quadrado construido sobre a somma de duas linhas é igual á somma dos quadrados construidos sobre essas duas linhas, mais duas vezes o rectangulo construido com essas mesmas linhas* (nº 246) :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

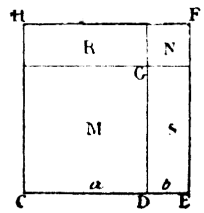

Fig. 238.

Sejam CD e DE, ou a e b, duas rectas quaesquer, e CF o quadrado construido sobre a somma d'essas linhas. No interior, formemos o quadrado M tendo a como lado, e prolonguemos os lados além do ponto G.

A figura total comprehende quatro partes, a saber : os quadrados M e N, cujos lados são respectivamente a e b, e os rectangulos R e S que têm por dimensões esses mesmos comprimentos.

Logo o quadrado construido sobre a somma...

Figura 5. Teorema, *Elementos de Geometria*, F.I.C.,1933, p. 105.

Observemos, o texto vai dizer quadrado *construído sobre* a soma de duas linhas (grifos meus), enquanto anteriormente, foi dito, o *quadrado da soma* de duas linhas (grifos meus), e esse modo distinto de dizer tem correlação com os dois contextos distintos em que consta o teorema de Pitágoras.

Veja, a seguir, o extrato com a segunda prova do teorema de Pitágoras. O asterisco (*) no antepenúltimo parágrafo esclarece que no triângulo ACE e BHC a altura é a distância entre a reta que contém a base do triângulo e a outra que lhe é paralela.

Theorema de Pythagoras.

328. *O quadrado construido sobre a hypotenusa d'um triangulo rectangulo é igual á somma dos quadrados construidos sobre os catetos.*

Seja o triangulo rectangulo ABC, e sejam M, P e Q, os quadrados construidos sobre os tres lados. Tiremos ADF perpendicular a CB; tiremos tambem BH e AE, e consideremos os dois triangulos ACE e BCH.

O angulo em C, quer n'um, quer n'outro d'esses triangulos, se compõe do angulo n augmentado d'um angulo recto, os lados CA e CE do primeiro triangulo são iguaes respectivamente a CH e CB do segundo, como lados dos quadrados P e M. Portanto estes triangulos são iguaes.

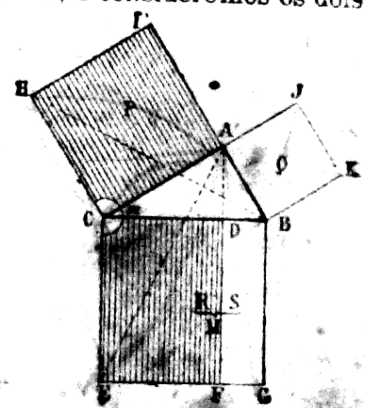

Fig. 241.

O primeiro triangulo ACE é a metade do rectangulo CEFD ou R, que tem a mesma base CE e a mesma altura CD; o segundo triangulo BCH é a metade do quadrado P, que tem a mesma base CH e a mesma altura CA*.

Portanto, o rectangulo R e o quadrado P são equivalentes, por terem metades iguaes. Da mesma maneira poderia provar-se que o rectangulo S é equivalente ao quadrado Q. Temos pois R + S ou M = P + Q.

Logo *o quadrado construido sobre a hypothenusa*...

Figura 6. Teorema de Pitágoras, *Elementos de Geometria*, F.I.C.,1933, p. 105.

Note que a prova se desenvolve pela equivalência de áreas, envolvendo igualdade entre ângulos, entre triângulos e retângulos e que, assim, estamos operando no contexto conceitual em que as propriedades das figuras que determinam o desenvolvimento da prova, não estão associadas a valor numérico, sendo este aspecto um diferenciador básico das duas abordagens.

Concluindo

Enquanto a primeira prova do teorema depende de cálculos, a segunda tem um caráter mais geométrico, mais conceitual, e remete à prova clássica deste teorema, a que consta dos Elementos de Euclides (300 a.C.). Esta diferença crucial se estabelece porque que em vez de usar o conceito de *comprimento* para os segmentos (sendo o comprimento um número real), foi utilizado o conceito de *mesmo comprimento* e, como sabemos, dois segmentos têm o mesmo comprimento se eles são congruentes, sendo este o procedimento característico do que chamamos método geométrico euclidiano de prova. (grifos meus) Isso, porque em Euclides não há número independente dos conceitos geométricos, exceto os números inteiros positivos, usados para a contagem. Daí o modo euclidiano e geométrico de dizer – o quadrado sobre a soma dos lados - que se distancia da forma algébrico-operacional que caracteriza a demonstração pela semelhança de figuras.

O texto da geometria F.I.C., ao trazer um encaminhamento para o processo de algebrização da geometria elementar, mostra como a proporcionalidade ocupa um lugar central no desenvolvimento dos conteúdos escolares. O que caracteriza os livros atuais é o teorema de

Pitágoras aparecer na geometria em que os números reais são dados. Assim, traduzido algebricamente o teorema "adquiriu um caráter de ferramenta adequada à resolução das questões propostas pelo livro" (....., 2008b, p.2).

Moise, quando comenta que a abordagem pela geometria métrica é comum nos cursos elementares por ser mais simples, diz que frequentemente isso é feito sem se notar e que não é fácil ver o que está acontecendo. Porém, um momento de reflexão nos convencerá de que sempre que você designa uma figura, por exemplo, o triângulo retângulo de lados 5, 3, 4, você está fazendo geometria métrica, quer tenha ou não feito tal escolha.

Em estudos a partir do texto escolar, as evidências que aí encontramos exigem que busquemos um quadro explicativo. Com isso nos defrontamos com a natureza histórica do problema – os conteúdos escolares resultam de uma contínua produção humana, ao longo de milênios se modificando e, somente sob esta perspectiva, tornam-se desnaturalizados.

Referências Bibliográficas

Almeida, R. C. M. *Demonstrações em geometria plana em livros-texto no Brasil a partir do século XIX*. (2008). Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (Departamento de Educação). Tese de Doutorado.

______ , R.C.M. O texto de demonstração e a presença de questões a resolver em livros do tipo Elementos de Geometria. (2008). *Anais do IV HTEM - Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática***.** Rio de Janeiro, p.1-8. (ISBN: 978-85-61545-02-4).

Carvalho (2006). A Turning Point in Secondary School Mathematics in Brazil: Euclides Roxo and the Mathematics Curricular Reforms of 1931 and 1942. *International Journal for the History of Mathematical Education*, v. 1, n. 1, p. 69-86.

Moise, E. (1963) *Elementary geometry from an advanced standpoint.* Massachussetts: AddisonWesley Publishing.

Schubring, G. Conflits between generalization, rigor, and intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany. (2005). New York: Springer.