XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

Introducción a la probabilidad utilizando la simulación en Excel

Giovanni **Sanabria** Brenes
Instituto Tecnológico de Costa Rica - Universidad de Costa Rica
Costa Rica
gsanabriab@yahoo.com

Félix **Núñez** Vanegas
Instituto Tecnológico de Costa Rica - Universidad de Costa Rica
Costa Rica
fnunez@itcr.ac.cr

Resumen

El presente taller tiene como objetivo que el participante obtenga una mejor comprensión del concepto de probabilidad y una interpretación correcta a la Ley de los Grandes Números. Las actividades planteadas adoptan el enfoque frecuencial de la definición de probabilidad, en donde a través de la simulación de algunos experimentos aleatorios utilizando Excel y desde una perspectiva Brousseauneana, se aproximan las probabilidades teóricas de algunos eventos.

Palabras clave: didáctica, probabilidad frecuencial, ley de los grandes números, experimentación, simulación.

1. Introducción

En aquellos problemas en los que la definición clásica de probabilidad no es utilizable, como en aquellos en donde los eventos no son equiprobables o bien el número favorable de casos es desconocido o infinito, la experiencia práctica juega un papel muy importante. Así por ejemplo, si queremos calcular la probabilidad de que salga escudo o corona al lanzar una moneda cargada, es útil realizar el experimento en forma práctica. No obstante, hará falta lanzar la moneda muchas veces y podría resultar tedioso y poco práctico dicho procedimiento.

Por otro lado, cuando a los estudiantes de un curso de probabilidades se les enuncia dicha definición, los ejemplos que se realizan en clases hacen pensar que el concepto quedó claro. Empero, cuando se les pregunta de si al lanzar un moneda no cargada, 10 veces, en cuántas ocasiones piensan que caerá escudo, la respuesta nos asombra. La mayoría dice que 5 veces

escudo y consecuentemente 5 veces corona. Al respecto, consultar Núñez (2010).

Lo anterior hace pensar que hay una mala interpretación del concepto de probabilidad y de la Ley de los Grandes Números.

Ante estas situaciones, se ha desarrollado una propuesta acerca del concepto de probabilidad utilizando el enfoque frecuencial o estadístico, en donde se usen los resultados obtenidos de la experiencia misma, con el fin de, por un lado, satisfacer las necesidades teóricas y prácticas de una definición de probabilidad, y por el otro, que aclare al estudiante el concepto de probabilidad teórica a través de la experiencia misma.

No obstante, como se mencionó más arriba, llevar a cabo experimentos concretos en el aula podría resultar muy tedioso y demandar mucho tiempo. Por ejemplo, lanzar una moneda 100 veces o bien 500, podría demandar mucho de la clase y podría tornarse muy aburrido. Es por ello que dicha propuesta brinda algunas estrategias que simulen experimentos utilizando Excel, dado que en la mayoría de las computadoras está instalado este software, lo cual permite concentrarse en los aspectos medulares de los conceptos.

El taller va dirigido a estudiantes universitarios, pero podría adaptarse fácilmente a una población de enseñanza media, y fue planteado en principio como una propuesta didáctica en el III Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED, realizado en el INBio Parque, Heredia, Costa Rica, en setiembre 2010, bajo el nombre "Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial" (Sanabria & Núñez, 2010), y le hemos dado forma para llevarlo al aula como un taller con la esperanza de que los participantes adquieran los conceptos propuestos y les sean de gran utilidad, no sólo en el cálculo de algunas probabilidades y en el desarrollo de sus clases sobre estos temas, sino también, por medio de la simulación de eventos aleatorios en Excel, adquieran un concepto más sólido e intuitivo de la probabilidad y la Ley de los Grandes Números.

2. Objetivos del taller

Objetivo general

Establecer un concepto intuitivo de la probabilidad y la Ley de los Grandes Números por medio de la simulación de eventos aleatorios en Excel.

Objetivos Específicos

- Describir los conceptos básicos de la probabilidad: Espacio muestral, evento, eventualidad, tipos de eventos y eventos compuestos
- Analizar la correcta aplicación de la Ley de los Grandes Números
- Simular eventos aleatorios en Excel
- Resolver problemas que involucran el cálculo de probabilidades por medio de la simulación utilizando Excel
- Resolver el problema de Monty Hall por medio de la simulación utilizando Excel

3. Características y requerimientos del taller

Duración del taller: 4 horas

Público meta: participantes del XIII CIAEM

Requerimiento: laboratorio de computadoras con Excel 2007 en español

Cupo: depende del número de computadoras del laboratorio.

4. Fundamentos teóricos

3.1 Fundamento matemático

Dado un experimento probabilístico, sea Ω el espacio muestral y A un evento. Si el experimento se repite n veces, se define X(n) como el número de veces que ocurre A de las n. La Ley de los grandes números, establece que para n grande, se cumple que:

$$P(A) \approx \frac{X(n)}{n}$$

Formalmente esta resultado se describe en el siguiente teorema.

Teorema (Ley de los Grandes Números). Dado un experimento, sea A un evento y X(n) el número de veces que ocurre A en n de estos experimentos, entonces para todo ε >0 se tiene que

$$P\left(\left|\frac{X(n)}{n} - P(A)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

para n suficientemente grande. Es decir, existe un n a partir del cual la probabilidad de que la diferencia entre ((X(n))/n) y P(A) sea mayor a ε es cero.

La idea es, en primera instancia, identificar el valor de ((X(n))/n) como la probabilidad frecuencial del evento A. Así, la Ley de los Grandes Números establece condiciones para que la probabilidad frecuencial se acerque a la probabilidad teórica. La probabilidad frecuencial permite introducir la simulación de experimentos aleatorios y es rica en intuición.

3.2. Fundamento pedagógico

Basado en una perspectiva constructivista, Brousseua (1986) abordó el problema de la didáctica de la matemática a través de la teoría de situaciones. Para él, el profesor debe diseñar situaciones didácticas (problemas) en la que la solución encontrada sea el conocimiento que se desea establecer. Se debe plantear el problema al estudiante y lograr que se dé la devolución, es decir, que el estudiante se interese en el problema y donde se le devuelve la responsabilidad de su propio aprendizaje. Esto se hace en situación adidáctica, puesto que al estudiante se le pone a distancia con la intención de enseñarle algún conocimiento. En esta etapa se dan situaciones de formulación y validación, en la que el estudiante ensaya, falla, corrige y se supera. Una vez que ha resuelto el problema, el profesor en la etapa de instiutcionalización, enuncia el resultado obtenido por el estudiante.

Inspirada en esa concepción brousseauneana, hemos desarrollado este taller. En ese sentido se diseñaron una serie de situaciones problema que tienen la finalidad de que al resolverlas, el participante obtenga un conocimiento particular tanto del concepto de la probabilidad como el de la Ley de los Grandes Números. Luego este conocimiento será institucionalizado por los profesores encargados del taller, y finalmente se proponen situaciones problema con el fin de profundizar los saberes adquiridos.

Por otro lado, el uso de la tecnología en la etapa de formulación podría ser muy importante en la solución del problema probabilístico planteado, específicamente, el uso de la computadora. Al adoptar la definición clásica de probabilidad, se presenta el problema de saber cuál es el número de casos favorables, y nos enfrentamos entonces a los problemas de conteo, que por demás está decirlo son difíciles. De acuerdo con Antibí citado por Núñez (2005) la solución tradicional a este tipo de problemas se hace de manera escueta y carece del rigor con que se resuelven problemas de otros dominios de la matemática, lo cual dificulta controlar la solución dada. Por lo general no se está seguro de si el cálculo realizado está correcto. Por otro lado, Sanabria (2010) brinda una propuesta de cómo abordar los problemas de conteo, justamente por considerarlos difíciles. No obstante, estas estrategias están dirigidas a una población universitaria con ciertas competencias. Cuando se utiliza el enfoque frecuencial, al menos se está seguro de los casos totales, puesto que provienen de la experiencia misma, y de esta forma se tendría una buena aproximación de la probabilidad teórica de un determinado evento y a su vez se podrían confrontar los resultados de un conteo con la probabilidad frecuencial hallada en ese mismo problema.

La simulación viene a ayudar a acercarse a dicha probabilidad. Cuando la probabilidad frecuencial de un evento se calcula con una muestra de tamaño n, se tendrá un valor distinto al que se obtendría con otras muestras del mismo tamaño, habrá algunas fluctuaciones, aunque se concentrarán alrededor de un valor específico. Es sabido que dichas diferencias o cambios en dichas probabilidades se pueden reducir si el tamaño de la muestra es considerablemente grande. Es importante que el estudiante descubra este hecho por sí mismo, a través de un descubrimiento en la solución de un problema propuesto. Es por ello que la simulación de un experimento aleatorio, utilizando un software, viene a significar una gran ayuda en la comprensión del concepto de probabilidad.

5. Guía del Taller

5.1 Conceptos Básicos

Se describen brevemente y ejemplifican los principales conceptos básicos de probabilidad.

Los conceptos utilizados son:

- Espacio muestral: es el conjunto de todos los posibles resultados, este se denota: Ω
- Eventualidad: es un resultado particular, es decir un elemento de Ω.
- Evento: es un conjunto de resultados, es decir un subconjunto de Ω.
- Ocurrencia de un evento. Se dice que un evento ocurre si sucede una y solo una de sus eventualidades.
- Evento casi seguro: Ω
- Evento casi imposible: φ

Ejemplo 1. Considere el experimento "Tirar un dado". El espacio muestral es: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Observe que 6 es una eventualidad. Algunos eventos son:

A: el resultado del dado es impar

B: el resultado del dado es mayor a 4

Note que $A=\{1,3,5\}\subseteq\Omega$, $B=\{5,6\}\subseteq\Omega$. Si el resultado del dado es 3 entonces se dice que el evento A ocurre, el Evento B no ocurre.

Teorema. (Eventos Compuestos) Si A y B son eventos entonces: $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$ y $A\triangle B$ son eventos.

Ejercicio 1. Se tiene una canasta con 15 bolas enumeradas del uno al quince. Las bolas con número del 1 al 7 son rojas y las demás son verdes. Considere el experimento que consiste en elegir una bola al azar de la canasta. Dados los eventos:

A: la bola elegida es verde

B: la bola elegida es roja

C: la bola elegida tiene un número par

Describa la ocurrencia de los eventos $B\cup C$, $A\cap C$, $C-A$ y $C\triangle B$.

5.2 Acercamiento al concepto de probabilidad

Dado un experimento, la probabilidad o medida de posibilidad de que ocurra un evento determinado A será un número entre 0 y 1, que se interpreta como un porcentaje. Así si la probabilidad de A es 0.8, esto indica que el evento tiene un 80% de posibilidad de ocurrir.

¿Cómo determinar intuitivamente la probabilidad de que ocurra un evento? Para que la probabilidad sea útil debe existir una correspondencia entre la probabilidad y la realidad, es decir si el experimento se repite varias veces, la frecuencia relativa observada con que ocurre un evento debe ser cercana a la medida de la posibilidad de que ocurra ese evento. Está frecuencia relativa observada se le llamará probabilidad frecuencial, la cual se espera que, bajo ciertas condiciones, se aproxime a la probabilidad de que ocurra el evento (llamada probabilidad teórica)

Ejemplo 2. Dado el fenómeno de lanzar un dado, ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 6? Se lanza un dado 100 veces y se observa que en 15 veces se obtiene un 6, por lo tanto la probabilidad frecuencial observada de obtener un 6 es $((15)/(100))= 15\%$ que es cercana a la probabilidad teórica de $(1/6)=16.6\%$, la cual en un curso de probabilidad básico se ve cómo obtener.

Ejercicio 2. Aproxime la probabilidad de que

- Al lanzar dos monedas se obtengan dos caras
- Un número de tres dígitos elegidos al azar sea divisible por 3

5.3. ¿Funciona o no la probabilidad frecuencial?

Se discuten en parejas los siguientes problemas:

- **(¿Juegas o no?**) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Karla, Jorge y Anthony desean determinar si vale la pena jugar el juego, para ello deciden que cada uno juegue veinte veces DADOS A SEIS obteniendo los siguientes resultados:

	# de veces que se ganó	Probabilidad frecuencial de ganar	¿Vale la pena Jugar?
Karla	7	(7/(20))=35%	NO
Jorge	10	10)/(20))=50%	Es indiferente
Anthony	12	12)/(20= 60%	SI

  Se puede apreciar que los resultados obtenidos utilizando la probabilidad frecuencial son muy distintos. Tal parece que algunas probabilidades frecuenciales no se acercan al valor real de la probabilidad. ¿Cuál es realmente la probabilidad de ganar DADOS A SEIS?

- **(¡El falso determinismo!)** Un software asegura que detecta el 90% de los fraudes bancarios que ocurren en las tarjetas. Ante esto el Banco de Los Sueños decide adquirir el software para detectar los fraudes que le ocurre a sus clientes en las tarjetas. Sin embargo, en el primer momento de uso, el software no detectó un fraude. El banco decide demandar a la empresa, pero al revisar el software, resulta que los cálculos están bien hechos. ¿Qué está sucediendo entonces?

Los dos últimos ejemplos revelan que no necesariamente la probabilidad frecuencial se va a acercar a la probabilidad real. Entonces ¿qué condiciones deben cumplirse para que la frecuencia relativa observada se acerque a la probabilidad teórica?

5.4. La Ley de los Grandes Números

Considere un experimento, sea A un evento. Esta ley indica que si el experimento se repite un número suficientemente grande de veces, entonces la probabilidad frecuencial de Aserá muy cercana al valor real de la probabilidad. Donde el número de veces que se repite el experimento depende de la variabilidad de sus resultados.

Ejercicio 3 (Verificando la Ley de los grandes números). Al lanzar una moneda no cargada se sabe que hay un 50% de probabilidad de que salga escudo. Se desea simular esta situación utilizando Excel. Para ello utilice la función ALEATORIO.ENTRE(min;max) la cuál devuelve un número entero aleatorio entre los enteros min y max. Se va a considerar el 1 como CORONA y el 2 como ESCUDO, así ALEATORIO.ENTRE(1;2) simula el resultado al lanzar una moneda.

a) Simule 10 lanzamientos de la moneda en Excel, ¿La probabilidad frecuencial de que

salga escudo obtenida es cercana al 50%? Discuta su resultado con sus compañeros.

b) Simule 200 lanzamientos de la moneda en Excel, ¿La probabilidad frecuencial de que salga escudo obtenida es cercana al 50%? Discuta su resultado con sus compañeros.

c) Compare los resultados obtenidos en los puntos anteriores con la Ley de los grandes números

Ejercicio 4. Considere nuevamente el problema ¿Juegas o no?

a) ¿Cuál es la causa de las distintas respuestas obtenidas por Karla, Anthony y Jorge?

b) Simule 100 veces este juego por medio de Excel. Para ello utilice la función SI(cond;res1;res2) que devuelve el res1 si se cumple la condición cond, de lo contrario devuelve el resultado res2.

c) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial observada de ganar el juego? (Sugerencia: utilice la función CONTAR.SI(condición,rango) que determina la cantidad de celdas en el rango que cumplen la condición).

d) ¿Vale la pena Jugar DADOS A SEIS?

En el ejercicio anterior la probabilidad frecuencial no está lo suficientemente cerca de la probabilidad teórica. Esto se debe a que, a diferencia del ejercicio trasanterior, hay mayor variabilidad en los resultados del experimento. Es decir, lanzar un dado tiene más resultados que lanzar una moneda, por lo que se requiere un número mayor de repeticiones del experimento para que la probabilidad frecuencial este suficientemente cercana a la probabilidad real.

Ejercicio 5. Considere nuevamente el problema ¡El falso determinismo!

a) Simule en Excel si el programa detecta o no 10 fraudes. Para ello simbolice cada fraude con un número aleatorio entre 0 y 1 por medio de la función ALEATORIO(). Si este número es menor igual a 0.9 se considera que el fraude fue detectado.

b) Realice la simulación anterior varias veces. Para ello basta actualizar las celdas dando ENTER en una celda vacía.

c) ¿El hecho de que exista una probabilidad alta (90%) de que el software detecte fraudes significa que se puede asegurar que va a detectar el primer fraude?

d) ¿Puede suceder que en los primeros 10 fraudes el programa no detecte 6?

e) ¿Qué utilidad tiene que el programa detecte el 90% de los fraudes?

Ejercicio 6. Suponga que hay una alta probabilidad de ganar un juego de apuestas, ¿esto significa que en las primeras partidas se gana? Si un jugador tiene una o algunas derrotas iniciales, ¿debe retirarse? Pero, ¿qué sucede si sigue jugando un número suficiente de veces?

Ejercicio. Suponga que hay una baja probabilidad de ganar un juego de apuestas con un premio de un millón de dólares. ¿Se puede asegurar que si apuesta entonces perderá? Si un

jugador gana el juego, ¿debe retirarse? , ¿qué sucede si sigue jugando un número suficiente de veces?

Ejercicio 7 (La ley de los grandes números: valores absolutos o relativos). Explore con Excel la siguiente afirmación: De acuerdo a la Ley de los grandes números, entre más veces se tira una moneda, más cerca se estará el número obtenido de escudos de la mitad del total los lanzamientos.

5.5 Resolución de algunos problemas

Ejercicio 8 (La bola de fútbol). En un refresco que compró Juan en la pulpería la MINITA, cercana a su colegio, se ganó una bola de fútbol. Sin embargo, al reclamar su premio en la MINITA, la encargada le indicó que el premio solamente se lo puede dar el camión repartidor y únicamente pasa el Martes entre 10am y 11am aleatoriatoriamente, y en la pulpería se queda exactamente 10 minutos. Dado que Juan está en clases ese día, decide elegir al azar un tiempo entre 10am y 11pm para fugarse de clases y esperar en la pulpería exactamente diez minutos para ver si logra encontrarse con el camíon repartidor. ¿Cuál es la probabilidad de que el martes obtenga su premio?

Ejercicio. (El Problema de Monty Hall). En un concurso se tienen tres puertas, detrás de una de ellas hay un auto y detrás de las otras hay una cabra. El participante debe elegir una de las tres puertas, sin abrirla. Después Monty, el presentador, abre una de las dos puertas restantes en la que hay una cabra. Así quedan dos puertas sin abrir una con auto y otra con cabra. Monty ofrece la posibilidad al presentador de cambiar su puerta o permanecer con su elección. ¿Qué es mejor, cambiar de puerta o no? (Este problema es uno de los más controversiales en probabilidad y se basa en un programa de televisión de los 70's).

6. Conclusión

A través del enfoque frecuencial, el abordaje del concepto de probabilidad resulta más natural y adecuado. A través de las simulaciones hechas en Excel, se logran realizar una cantidad considerable de repeticiones de un experimento con muestras cada vez más grandes, logrando con ello, acercarse a la probabilidad teórica del evento en cuestión, ahorrando tiempo. Por otro lado, esta forma de abordar el problema del concepto de probabilidad, permite dilucidar de si los casos favorables o totales están bien calculados, puesto que si es así, la simulación dará una buena aproximación, lo que haría revisar la solución hallada o bien confirmar que está correcta.

También, en la etapa de formulación, la simulación computacional ayudará al estudiante a atinarle a la solución del problema propuesta, logrando llegar al concepto que se desea establecer. La intuición puede fallar, y con la ayuda de la simulación del problema de Monty, pudimos darnos cuenta de que la probabilidad teórica del evento no era un 1/2.

El enfoque frecuencial, debe constituirse en una etapa previa para un abordaje más formal en busca de la probabilidad teórica.

Referencias y bibliografía

Antibí, A (2000). *Didáctica de las matemáticas, métodos de resolución de problemas*. San José, Costa Rica: Serie CABÉCAR.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. Traducción al castellano del artículo "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques" publicado en la revista *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2):33-115, y realizada por Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo.

Devore, J. (1998). *Probabilidad y Estádistica para Ingeniería y Ciencias*. México: International Thomson Editores, 4a ed.

Gómez, M. (2000). *Elementos de estadística descriptiva*. San José, Costa Rica: EUNED.

Murrillo, M. (2004). *Introducción a la matemática Discreta*. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Núñez, F. (2010). La enseñanza de la estadística en secundaria: Situación actual en Costa Rica, aproximación metodológica. En Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. *Memorias Primer Encuentro Nacional en la Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (1° ENEPE), del 16 al 18 de junio del 2010*. Puebla, México.

Núñez, F. (2005). Problemas de conteo: ¿Por qué son tan difíciles? Basado en las ideas de Andre Antibí. En Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica. *Memorias IV Congreso Internacional de la Matemática Asistida por Computadora (4to CIEMAC), 1,2 y 3 de diciembre de 2005*.. Cartago, Costa Rica.

Sanabria G. (2009). *Tópicos precedentes al estudio de la Teoría de Probabilidades*. Cartago, Costa Rica: Publicaciones, ITCR.

Sanabria, G. (2010). Una propuesta para la enseñanza de los Elementos de Análisis Combinatorio. En Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. *Memorias Primer Encuentro Nacional en la Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (1° ENEPE), del 16 al 18 de junio del 2010*. Puebla, México.

Sanabria, G. & Núñez, F. (2010). Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial. En Facultad de Ciencias Naturales, Universida Estatal a Distancia. *Memorias III Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED, realizado en el INBio Parque, Heredia, Costa Rica, 3 y 4 de setiembre 2010*. InBio Parque, Heredia, Costa Rica.

Walpole, R, Myers, R, Myers, S. (1999). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. USA: Prentice-Hall Hispanoamericana. S.A, Sexta Ed.