



Equação, conversão de duas linguagens: da natural para algébrica

Wagner Rodrigues **Costa**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
profwagnercosta@gmail.com

Resumo

O presente trabalho se propõe a investigar em que medida ocorre a influência de fatores na passagem da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau. Com intuito de alcançar nosso objetivo, adotamos como fundamentação teórica a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. A metodologia consistiu na elaboração e na aplicação de oito problemas em sete turmas de oitavo ano (antiga 7ª série). Cada um desses problemas possuía variações de congruência diferentes de modo a possibilitar a investigação da influência desses fatores na conversão. Os resultados evidenciam as dificuldades dos sujeitos converterem as equações da escrita natural para a algébrica quando os três fatores de não congruência estão presentes na questão. Identificamos, também, qual foi a influência mais comum que cada fator causou nos problemas.

Palavras-chave: congruência, representação semiótica, escrita natural, escrita algébrica, conversão

Introdução

O ensino de Álgebra assume um espaço bastante significativo na grade curricular das escolas brasileiras, uma vez que seu estudo está ligado ao desenvolvimento do raciocínio e à sua utilização como ferramenta para resolver problemas. Acerca dos resultados das avaliações em nível nacional, sabe-se que nos itens referentes à Álgebra, o índice de acerto fica em torno de 40% em muitas regiões do país (BRASIL, 1998). Isso faz com que, ao seu ensino, seja dedicado um tempo maior de aulas quando comparada a outras áreas da Matemática, como Geometria, por exemplo (ARAÚJO, 2001).

A excessiva manipulação algébrica, a repetição mecânica dos procedimentos são um dos focos do ensino da Álgebra, atualmente, em nossas escolas. Pensa-se que quanto mais o sujeito conhecer os procedimentos algébricos melhor compreenderá como se resolve equações. Diversas pesquisas (USISKIN, 1995; KIERAN, 1995; LOCKHEAD E MESTRE, 1997; ANDRÉ, 2007) confirmam a existência de dificuldades por parte dos alunos em aprender Álgebra. Usiskin (1995) apontou problemas na compreensão da noção de variável, decorrentes da mudança de concepção dessa idéia ao longo do tempo. Kieran (1995) observou dificuldades existentes, por parte dos alunos do *high school*, quando propôs a aplicação de problemas de equação em duas abordagens, aritmética e algébrica. Lockheed e Mestre (1997), apontaram a existência de dificuldades na tradução da linguagem escrita corrente para a linguagem matemática.

Dando continuidade ao aprofundamento sobre questões ligadas a Álgebra, o presente trabalho é um recorte de nossa dissertação de mestrado e se propõe a apresentar um dos resultados dessa pesquisa que investigou em que medida os fatores de não congruência influenciam na conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau.

A nossa proposta, nesse artigo, é investigar qual a taxa de sucesso na conversão da escrita natural para a algébrica quando esses três fatores sofrem variação, e nossa hipótese é que a conversão poderá ter sucesso ou não em função dos graus de congruência.

A teoria dos registros de representação semiótica

A teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval afirma que é necessário fazer uma distinção entre o objeto matemático e suas respectivas representações. Esta teoria tem seu valor do ponto de vista cognitivo, pois possibilita ao sujeito compreender que um objeto matemático tem várias formas de ser representado, bem como permite controlar a escolha de uma representação mais econômica na resolução de problemas.

Equação não é apenas $ax + b = c$ ou *o dobro de um número é seis*, bem como outras formas de representar uma equação, mas é um objeto que só pode ser percebido mediante sua representação. A necessidade de uma diversidade de representações semióticas para um mesmo objeto reside no fato de não tentar confundir o objeto matemático com sua representação.

Essa diferenciação necessária entre objeto e sua representação exige duas atividades cognitivas. Uma intimamente relacionada à representação do objeto matemático e outra, ao próprio objeto. É a *semióse* e a *noésis*. A primeira diz respeito à apreensão ou à produção de uma representação semiótica e, a segunda, aos atos cognitivos ligados à apreensão conceitual de um objeto. Para Duval (2004), não existe a possibilidade de existir um sem o outro. A *noésis*, enquanto construção mental, não é independente das representações semióticas. Segundo o autor, não existe *noésis* sem *semióse*. Para que o indivíduo represente um determinado objeto matemático faz-se necessário primeiro compreender a natureza desse objeto, suas propriedades, relações com outros objetos.

A funcionalidade cognitiva dessa abordagem encontra-se no fato de possibilitar, ao aluno, não somente ver seus erros, mas compreender e controlar os processos matemáticos que estão presentes nos problemas. Dessa forma, a teoria ganha sentido uma vez que se propõe a dar um tratamento aos objetos matemáticos do ponto de vista de sua formação e conceitualização.

Duval (2004) argumenta ainda que as representações semióticas são produções externas que estão ligadas diretamente a um sistema semiótico. Essas produções são acessíveis apenas aos sujeitos que têm o conhecimento do sistema semiótico utilizado.

Para Duval (2003), a compreensão em Matemática implica na existência de duas características peculiares. A primeira é a existência de um sistema semiótico, e a outra característica é a diversidade de sistemas semióticos presentes na Matemática. Um sistema semiótico é um conjunto de signos que possui uma finalidade de se comunicar e dar significado. Os sistemas semióticos utilizados podem ser a escrita algébrica, os numerais, a representação gráfica, a figural, entre outros.

Tratamentos e conversões

O tratamento e a conversão são tipos de transformações de representação semiótica que são imprescindíveis para a atividade matemática, do ponto de vista da aprendizagem. O tratamento é a transformação da representação inicial em outras equivalentes, sem mudar o tipo de registro (transformação interna). Podemos considerar como exemplo, a resolução de uma equação na linguagem algébrica,

$$3x + 5(x - 6) = x + 2(x + 1) + 3$$

$$3x + 5x - 30 = x + 2x + 2 + 3$$

$$3x + 5x - x - 2x = 2 + 3 + 30$$

$$5x = 35$$

$$x = 7$$

em que as cinco etapas da equação são equivalentes entre si, o registro algébrico é conservado, mas, no entanto, a representação inicial sofreu transformações até chegar em $x = 7$.

A conversão trata de uma transformação de uma dada representação em outra representação e em outro registro, mas conservando a referência ao mesmo objeto. Uma função afim do tipo $y = -3x + 4$, representada na forma algébrica, pode ser representada num registro gráfico.

Podemos converter uma equação em linguagem natural como “*O triplo de um número é 8*” para a linguagem algébrica $3x = 8$, escrever a representação algébrica de uma

função a partir de seu gráfico.

De acordo com Duval (2003), a operação de tratamento dá importância à forma, e por conta disso é a transformação mais utilizada pelos professores como mecanismo de justificativa. Pelo fato de ser procedimental, a sua excessiva valorização pode levar o aluno a associar o objeto a uma única representação e acabar por não dissociar objeto de representação.

Mas é na operação de conversão que é permitido ao sujeito fazer a diferença entre a representação do objeto e o próprio objeto, pois ele irá se deparar com várias representações para um mesmo objeto. Logo, ela é uma das atividades cognitivas essenciais para a compreensão em matemática, do ponto de vista de Duval (2003). O fato de existir uma diversidade de registros de representação semiótica, dá à conversão a sua devida importância no processo de construção do conhecimento, pois ajudará o aprendiz a reconhecer a existência de várias representações para um mesmo objeto.

Alinhando-se à conversão está a mobilização entre os vários tipos de registros de representação. Segundo Duval (2003), “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar, a todo momento, de registro de representação”. O que Duval salienta é que não se pode garantir aprendizagem focando o ensino apenas nos tratamentos. Estes são muito úteis para justificar procedimentos, porém a atividade da conversão permite ao sujeito ampliar a dimensão conceitual.

A atividade de conversão não é algo natural. Ela torna-se complexa, pois se depara com dois fenômenos. Um na heterogeneidade dos dois sentidos de conversão e o outro fenômeno nas variações de congruência ou de não-congruência entre as representações.

O primeiro fenômeno característico da conversão é o seu sentido. Converter um registro de **A** para **B** não demanda, necessariamente, o mesmo custo cognitivo de converter de **B** para **A**. Para converter a função de sua representação gráfica para a algébrica é necessário levar em consideração conhecimentos matemáticos que obrigatoriamente não serão requeridos para a conversão da representação algébrica para a gráfica.

Sobre o segundo fenômeno, Duval (1995) declara que o sucesso ou insucesso dos alunos na resolução dos problemas de matemática está ligado aos fatores de congruência e ao sentido da conversão. Três, são as condições a serem satisfeitas para que duas representações sejam congruentes:

- a) conservação da ordem das unidades de significado (OS);
- b) correspondência semântica entre as unidades de significado (CS);
- c) univocidade semântica terminal (US).

A conservação da ordem das unidades de significado se caracteriza quando a conversão entre dois registros de representação se dá no mesmo sentido.

No exemplo abaixo procuramos esclarecer melhor.

O dobro de um número mais sete é cinco.

Nesse problema, lemos da esquerda para direita e representamos a equação na linguagem algébrica neste mesmo sentido por $2x + 7 = 5$. Neste caso, há a conservação da ordem das unidades de significado.

A correspondência semântica das unidades de significado diz respeito a uma combinação binária existente entre as representações. No registro de partida, representado em linguagem natural, uma determinada palavra precisa está associada a apenas um signo. Nesse problema, não se verifica esse fator, pois a palavra dobro está associada a dois signos, ao número 2 e ao sinal de multiplicação.

O terceiro fator de congruência, a univocidade semântica, se refere a uma informação semântica num registro de representação que é mantida ao se fazer a conversão. Como exemplo podemos dizer que são aqueles problemas que, explicitamente, dizem qual o tipo de operação a ser realizada. Problemas como o dobro de um número é sete, informam que a operação a ser realizada é a multiplicativa.

Nossa hipótese é que a conversão entre dois registros de representação semiótica poderá ter sucesso ou não em função dos graus de congruência. Se atender aos três fatores de congruência o registro de saída transparecerá com o de chegada. Isso tornará as duas representações congruentes. Caso contrário, se a negativa de um desses fatores aparecer, ou seja, se eles forem conservados ou não, a conversão será não congruente e a variação de congruência se dará em função da variação dos fatores.

No problema seguinte, em destaque, analisando sua estrutura, percebemos a existência da não congruência.

Numa empresa, há sete vezes mais empregados do que diretores.

O sentido que lemos o texto (esquerda para direita) não é o mesmo que utilizamos para representar este problema na linguagem algébrica. A representação correta é $7D = E$, sendo D o número de diretores e E o número de empregados e não $7E = D$. Pelo fato de não atender à conservação da ordem das unidades de significado, o problema se classifica como não congruente.

O que percebemos é que cada sistema semiótico possui um conteúdo específico na representação dos objetos. Um registro em linguagem algébrica para representar equações irá exigir conhecimentos como expressões algébricas, operações básicas com sinais, o que não se verifica com um registro em linguagem natural.

Metodologia

Em nossa pesquisa trabalhamos com 217 sujeitos de oitavo ano de duas escolas privadas da cidade do Recife e aplicamos um teste com oito questões. Essas questões foram

elaboradas procurando analisar a influência dos fatores de não congruência na conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica em problemas de equações do primeiro grau.

Segundo a Teoria de Raymond Duval, as três condições que tornam um problema congruente são a correspondência semântica das unidades de significado, a univocidade semântica terminal e a conservação da ordem das unidades de significado. Nosso teste foi elaborado em função dessas condições.

Os fatores de não congruência foram variados com o intuito de perceber quais deles podem exercer mais ou menos influência na taxa de sucesso da conversão. Um dos problemas elaborados conserva a correspondência semântica das unidades de significado, não conserva a univocidade semântica terminal e nem a ordem das unidades de significado. Um outro problema foi elaborado não conservando a correspondência semântica das unidades de significado, conservando a univocidade semântica terminal e a ordem das unidades de significado, e assim sucessivamente. Ao todo temos oito ternas, e para cada terna elaboramos um problema.

A figura seguinte nos mostra as características estruturais dos oito problemas:

Número do problema	Correspondência semântica das unidades de significado (CS)	Univocidade semântica terminal (US)	Ordem das unidades de significado (OS)
01	conservar	conservar	conservar
02	não conservar	não conservar	não conservar
03	conservar	não conservar	conservar
04	conservar	conservar	não conservar
05	conservar	não conservar	não conservar
06	não conservar	conservar	conservar
07	não conservar	conservar	não conservar
08	não conservar	não conservar	conservar

Figura 1: Características dos problemas

Na tentativa de se manter um padrão nas questões do teste, escolhemos um dos problemas classificados por Marchand e Bednarz (1999). Estas autoras classificam os problemas em três tipos. Problemas de transformação, problemas de taxa e problemas de partilha. Em nossa pesquisa consideraremos apenas os problemas de partilha.

Os problemas de partilha são aqueles em que é conhecida uma quantidade total e esta quantidade é repartida em outras partes, sendo estas desconhecidas. As partes se relacionam levando em consideração o “número” de relações, a “natureza” dessas relações e o “encadeamento” dessas relações. Esses três funcionam como variáveis do problema que influenciam na resolução, segundo estas autoras.

No problema abaixo podemos analisar como as três variáveis aparecem na situação.

Três irmãos, Pedro, Toni e Carlos, possuem 17 selos. Pedro possui cinco selos a mais que Toni e Carlos, o triplo de Toni. Quantos selos possui cada um dos irmãos?

“*Pedro possui cinco selos a mais que Toni*” é uma relação e, “*Carlos, o triplo de Toni*” outra relação. Duas relações ao todo. A natureza das relações entre os dados pode ser aditiva, quando se lança mão de somas, multiplicativa, quando de multiplicações, ou ainda a natureza dessas relações pode ser mista, quando uma é aditiva e a outra é multiplicativa.

A primeira relação é aditiva (a mais) e a segunda, multiplicativa (triplo). Este é um problema com duas relações e de natureza mista.

Além do número de relações e da natureza entre essas relações, temos a variável do problema encadeamento das relações. Marchand e Bednarz (1999) afirmam que esse encadeamento pode ser de três tipos distintos. Ele pode ser classificado como “fonte”, “poço” e “composição”. Em nossa pesquisa consideraremos apenas o encadeamento fonte.

No encadeamento tipo fonte, as grandezas do problema são originadas em função de uma única grandeza. O problema citado acima é um exemplo desse tipo de encadeamento. “Toni” é a fonte desse problema, pois para encontrar a quantidade de Pedro e de Carlos primeiro se deve descobrir quantos selos Toni possui.

Em nossa pesquisa, fizemos algumas escolhas referentes às características do problema. Essas escolhas foram feitas de modo que as variáveis no problema se desse nos fatores de não congruência. Se não tivéssemos fixado o tipo de problema, neste caso, de partilha, poderia ser que a dificuldade do aluno estivesse em função do contexto e não dos fatores de não congruência.

A seguir, temos os oito problemas do teste, contemplando as características estruturais da figura 1.

Número do problema	Problema
01	Três amigos, Jorge, Paulo e Felipe, possuem, juntos, 140 bonecos. Jorge possui uma certa quantidade de bonecos. Duas vezes a quantidade de Jorge é a quantidade de Paulo. A quantidade de bonecos de Jorge, vezes quatro, é a quantidade de bonecos de Felipe. Quantos bonecos possui cada um?
02	Geraldo, Marcos e Tais vão a um orfanato de crianças carentes entregar uma contribuição financeira, voluntária, equivalente a R\$ 1 100,00. Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos e Tais com a metade do que contribuiu Marcos. Com quantos reais contribuiu cada um?
03	José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu uma certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?
04	A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Julio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio. Qual a idade de cada um deles?
05	Tiago, Jô e Alfeu são colecionadores de selos. Eles vão repartir 84 selos de modo que Tiago possua três vezes a quantidade de selos de Jô, e Alfeu a quinta parte de selos de Jô. Quantos selos cada um vai receber?
06	Os irmãos Juca, Rita e Márcia possuem juntos 120 brinquedos. Rita possui uma certa quantidade. O triplo da quantidade de brinquedos de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca. O quádruplo do número de brinquedos de Rita é a de Márcia. Quantos brinquedos possui cada um?
07	João, Ricardo e Mateus possuem juntos 126 bolas de gude. João tem o dobro de bolas de gude de Ricardo, e Mateus tem o quádruplo de bolas de gude de Ricardo. Quantas bolas de gude possui cada um?
08	Os amigos Maria, Roger e Caio compraram chocolates numa quantidade total de 68 chocolates. Roger comprou uma certa quantidade. O triplo da quantidade de chocolates de Roger é igual a quantidade de chocolates de Maria. A quarta parte dos chocolates de Roger é igual a de Caio. Quantos chocolates comprou cada um?

Figura 2: Lista dos problemas

Como pretendemos, nesse artigo, investigar qual a taxa de sucesso na conversão da escrita natural para a escrita algébrica, escolhemos o primeiro problema como referência, uma vez que ele é totalmente congruente, e comparamos com os demais. Nessa comparação, escolhemos todos os sujeitos que converteram o problema 01 totalmente para o registro algébrico (RACT) e analisamos seus rendimentos nas outras questões. Chamamos de RACT o registro algébrico de conversão total completa da equação em escrita natural para a algébrica, como no exemplo do protocolo número 12.

03) José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?

Handwritten solution showing the algebraic conversion of the problem. The total production is 1400. Variables are defined: José = x , Augusto = $2x$, Fábio = $4x$. The equation is $4x + 2x + x = 7x = 1400$. The solution is $x = 1400 : 7 = 200$. The final results are José = 200, Augusto = 400, and Fábio = 800.

Figura 3. Protocolo número 12

Observe que o sujeito representa o problema no registro algébrico por $x + 2x + 4x = 1400$, sendo x a parte de José, $2x$ a parte de Augusto e $4x$ a parte de Fábio.

Resultados

Na análise dos 217 protocolos, 45 sujeitos converteram o primeiro problema totalmente para o registro algébrico (RACT). Selecionamos esses mesmo sujeitos, e determinamos qual foi a taxa de sucesso de cada um nas demais questões. O que estamos chamando de sucesso são as conversões algébricas totais. Esperava-se um número maior de sujeitos realizando a conversão dessa questão, haja vista, ser congruente. No entanto, cerca de 20% dos sujeitos a faz corretamente para o registro algébrico. A figura a seguir, nos fornece o resultado da relação entre os fatores de não congruência e a conversão total das representações.

NÚMERO DO PROBLEMA	FATOR(ES) DE NÃO CONGRUÊNCIA NÃO CONSERVADOS	NÚMERO DE SUJEITOS QUE FIZERAM A CONVERSÃO TOTAL (RACT)
02	CS - US - OS	25
03	US	28
04	OS	36
05	US - OS	25
06	CS	34
07	CS - OS	32
08	CS - US	27

Figura 4: Número de RACT em cada questão

Na figura acima, podemos perceber que o número de sujeitos realizando a conversão total,

em relação a primeira questão, diminuiu. Foram os mesmos sujeitos, no entanto, mostraram dificuldades em converter o problema em escrita natural para o registro algébrico. É como se essas duas representações não deixassem transparecer um registro no outro, fazendo com que os sujeitos convertessem de modo parcial para o registro algébrico. Em relação à segunda questão, totalmente não congruente, cerca de 11% dos sujeitos da pesquisa fizeram a conversão correta para o registro algébrico. Possivelmente, os fatores de não congruência influenciaram na diminuição da taxa de sucesso. Uma dificuldade comum está registrada no protocolo abaixo.

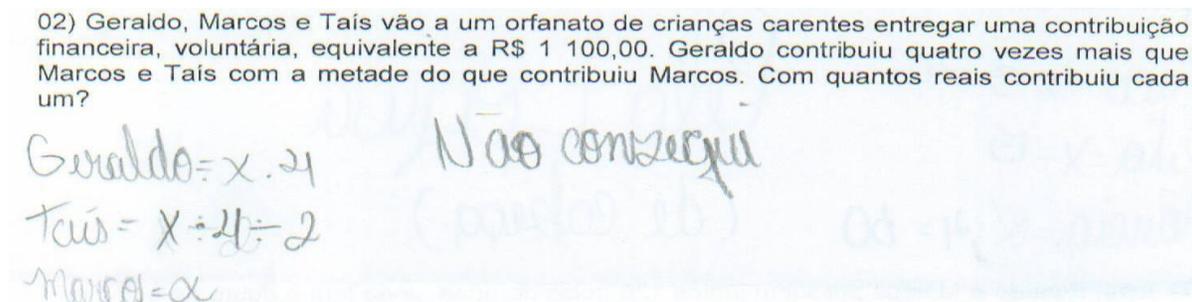


Figura 5. Protocolo 04

O sujeito identifica Marcos como a fonte do problema, encontra um signo algébrico equivalente para Geraldo, mas a quantia de Taís é encontrada em função de Geraldo e não de Marcos. O sujeito acerta no tipo de natureza, multiplicativa, e por certo, encontra a quantia de Taís obedecendo a ordem da leitura da esquerda para a direita. Por isso que o seu correspondente algébrico é “ $x \cdot 4 + 2$ ”.

Comparando os problemas 02 e 05, observa-se que eles possuem o menor RACT. É como se a dificuldade estivesse ocasionando a mesma diminuição na taxa de sucesso.

A figura acima também nos mostra que o número de RACT pode variar com a presença de um ou mais fatores de não congruência. Comparando os problemas com apenas um fator não conservados, que é o caso dos problemas 03, 04 e 06, observamos que a não conservação apenas do fator ordem das unidades de significado (OS) pode ter permitido ao sujeito compreender a existência de elementos algébricos na representação em escrita natural. Ou seja, quando se conserva a correspondência semântica (CS) e a univocidade semântica (US) os sujeitos tendem a ter mais facilidade na conversão. Conservar (CS) é manter a correspondência binária entre signos do registro em escrita natural e algébrica e conservar (US) é manter a mesma operação, em nosso caso, apenas multiplicação ou apenas divisão.

Comparando os problemas que possuem dois fatores não conservados entre si, os de número 05, 07 e 08, podemos inferir que a taxa de sucesso pode ter sido maior (problema 07) pela não conservação da (CS) e da (OS). Isso quer dizer que quando se conserva a (US), ou seja, quando há apenas uma operação, os sujeitos tendem a ter mais facilidade de

converter a equação da escrita natural para a algébrica.

Assim, podemos dizer que os fatores de não congruência podem influenciar na taxa de sucesso da conversão em problemas do primeiro grau da escrita natural para a algébrica.

Considerações finais

Diante do que foi colocado, percebemos a importância de considerar os três fatores de não congruência como elementos que influenciam na conversão das equações do primeiro grau da escrita natural para a algébrica. Além disso, podemos observar que essa influência se dá de modo variado e em função do fator que está sendo conservado. Isso quer dizer que a “passagem” da escrita natural para a algébrica nos problemas de partilha possui graus de dificuldades diversos, a depender da conservação do fator.

No entanto, nossa pesquisa, cujo objetivo foi investigar em que medida os fatores de não congruência influenciam na conversão da escrita natural para a algébrica nas equações de primeiro grau, não conseguiu obter detalhes nos registros em virtude de não ter havido uma entrevista com os sujeitos participantes. Outra limitação encontrada diz respeito a própria teoria. A primeira questão, totalmente congruente, deveria possuir um número elevado de conversões corretas para os registros algébricos. Dos 118 registros algébricos para essa questão, menos da metade, ou seja, 45 alunos, conseguiram fazer essa conversão. Podemos apontar, também, que a segunda questão era para possuir um número muito menor de conversões totais, pois essa questão, segundo a teoria, é a que possui uma menor taxa de sucesso. Apesar dessa taxa ser a menor ela é muito próxima das demais.

Além disso, a taxa de sucesso dos sujeitos foi analisada em problemas de partilha com duas relações e de natureza multiplicativa. E qual seria o resultado se os problemas fossem de partilha e tivessem mais de duas relações? Assim também, qual seria a taxa de sucesso dos sujeitos se a natureza fosse aditiva ou mista? Em relação ao livro didático, de que forma os fatores de não congruência são utilizados na conversão da escrita natural para a algébrica? Existe algum fator que é mais conservado do que o outro?

Essas e outras questões podem ser levantadas com o intuito de aprofundar novas pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem das equações do primeiro grau e contribuir para uma melhor compreensão desse conceito.

Referências

- BOOTH, L. Dificuldade das crianças que se iniciam em álgebra. In: **As idéias da Álgebra**. Organizado por Coxford, A. F & Shulte, A. P. São Paulo, Atual, 1995.
- BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (5^a a 8^a séries). Brasília: MEC / SEF, 1998.

COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.), **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papyrus, 2003.

_____. **Semiosis y pensamiento humano – Registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. (Peter Lang). Tradução: Myrian Vega Restrepo (1999). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía – Grupo de Educación Matemática. 2ª Edición. Santiago de Cali, Colombia: 2004.

KIERAN, C. Duas Abordagens Diferentes entre os Principiantes em Álgebra. In **As idéias da Álgebra**. Organizado por Coxford, A. F & Shulte, A. P. São Paulo, SP. Atual. 1995.

LINS, R. C. & GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas, SP. 5ª Edição. Papyrus, 2005.

LOCKHEAD, J. ; MESTRE, J. P. Das Palavras à Álgebra: corrigindo concepções erradas. In **As idéias da Álgebra**. Organizado por Coxford, A. F & Shulte, A. P. Tradução de Domingues, H. H. São Paulo, SP. Atual. 1995.

MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papyrus, 2003.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. São Paulo: Perspectiva, 2000.

USISKIN, Z. O Que É Álgebra Da Escola Média? In **As idéias da Álgebra**. Organizado por Coxford, A. F & Shulte, A. P. Tradução de Domingues, H. H. São Paulo, SP. Atual. 1995.