O Pensamento Matemático Avançado e o ensino de logaritmos

Adriana Tiago Castro dos **Santos**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Brasil
adriana_tiago_castro@yahoo.com.br
Barbara Lutaif **Bianchini**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Brasil
barbara@pucsp.br

Resumo

Este artigo tem como finalidade apresentar resultados de nossa pesquisa realizada em 2010 com estudantes do 3º ano do Ensino Médio que visa o ensino de logaritmo utilizando a calculadora como estratégia de ensino. Utilizamos como metodologia de pesquisa os pressupostos da Engenharia Didática. As análises foram realizadas à luz dos processos do Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (1991). As análises dos resultados em conjunto com a observação das discussões feitas pelos sujeitos durante o desenvolvimento da atividade permitiu-nos constatar que as duplas apresentaram dificuldade em realizar manipulações aritméticas e justificar as suas respostas utilizando a linguagem materna. Utilizaram a calculadora científica para refletir sobre os resultados e explorar o conceito de logaritmo. Os processos do Pensamento Matemático Avançado envolvidos nos protocolos dos sujeitos foram: a descoberta por meio de investigação, mudança de representação, intuição, generalização, síntese e a abstração.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Avançado, Logaritmos, Calculadora, Ensino Médio, Educação Matemática, Função Logarítmica.

Introdução

O presente estudo tem como propósito apresentar resultados de nossa pesquisa realizada com estudantes do 3º ano do Ensino Médio cujo objetivo é o ensino de logaritmo utilizando a calculadora científica como estratégia de ensino.

A palavra logaritmo significa "número de razão" e foi adotado por Napier (1550-1617) seu inventor. Os logaritmos eram utilizados pela comunidade científica como instrumento de cálculo para reduzir multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração com o objetivo de tornar os cálculos numéricos mais rápidos e precisos nos campos da Astronomia, Engenharia entre outros.

Embora o ensino de logaritmo pautado como instrumento de cálculo não é mais utilizado na escola, a função logarítmica e a função exponencial permanecerão sempre uma parte importante do ensino da Matemática, pois as variações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza e da análise. (EVES, 2008)

As Orientações Curriculares do Ensino Médio (BRASIL, 2006) recomendam que na abordagem do tema não seja enfatizada um trabalho exaustivo dos logaritmos, mas que sejam apresentados aos estudantes situações-problema que ilustram o modelo exponencial e logarítmico. Tais aplicações podem ser encontradas em tópicos da Matemática Financeira (juros e correção monetária), crescimento populacional, entre outros.

O documento recomenda ainda o uso de tecnologias como recurso para subsidiar a aprendizagem da Matemática. E aponta importância de contemplar a formação escolar em dois sentidos: a matemática como ferramenta para entender a tecnologia e a tecnologia como ferramenta para entender a matemática.

> Considerando a Matemática para a Tecnologia, deve-se pensar na formação que capacita para o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas, dois instrumentos de trabalho bastante corriqueiros nos dias de hoje. No trabalho com calculadoras, é preciso saber informar, via teclado, as instruções de execução de operações e funções, e isso exige conhecimentos de Matemática. (BRASIL, 2006 p. 87)

Na concepção da Tecnologia para a Matemática segundo as Orientações Curriculares do Ensino Médio, é importante possibilitar ao estudante o "pensar matematicamente" neste sentido, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas e criam estratégias para resolver problemas. Tais ações são descritas por Dreyfus (1991) como processos que desenvolvem o Pensamento Matemático Avançado.

O uso das tecnologias (calculadoras, *softwares* matemáticos etc.) como estratégia pedagógica e com objetivos previamente estabelecidos podem contribuir para o desenvolvimento desses processos e assim facilitar a compreensão de um conceito matemático.

Concordamos com as autoras Borba e Selva (2010) no que se refere ao uso da calculadora que:

> Entre as possibilidades de uso da calculadora em sala de aula, a exploração conceitual é das mais importantes, uma vez que, por meio desse instrumento, os alunos podem ser levados a pensar sobre princípios, regras e propriedades dos conceitos matemáticos. (BORBA; SELVA, 2010, p. 206)

Bianchini e Machado (2010) relatam que o uso da calculadora em sala de aula tem sido discutido por pesquisadores da Educação Matemática desde o século passado, no entanto seu emprego não se encontra incorporado em grande parte das salas de aula.

As pesquisadoras realizaram um trabalho de assessoria em conjunto com professores de Matemática do Ensino Fundamental em uma escola particular de São Paulo com o propósito de implantar a calculadora como mais um instrumento de auxílio para o ensino e aprendizagem de matemática. Foi feito um trabalho de sensibilização dos professores com atividades de familiarização com calculadoras simples. Esse trabalho constou de atividades matemáticas que evidenciavam vantagens do uso da calculadora para sua resolução. Os professores aplicaram essas atividades com seus alunos. A análise dos protocolos revelou a falta de qualquer validação dos resultados obtidos. Após este trabalho, os professores passaram a incentivar seus alunos a validar seus resultados por meio da calculadora, e assim constataram que alguns professores foram sensibilizados e passaram a utilizar a calculadora em suas aulas.

Os processos do Pensamento Matemático Avançado

Dreyfus (1991) aponta que os processos mentais e psicológicos estão intimamente ligados, ou seja, esses aspectos raramente são separados. Assim as imagens mentais e matemáticas estão interligadas, e essa ligação entre esses processos é relevante para entender a aprendizagem e o Pensamento Matemático Avançado.

O autor compara o processo de aprendizagem matemática com o processo de pesquisa em que ambos os casos o individuo necessita manipular mentalmente, investigar e descobrir sobre objetos. Tais processos são extremamente complexos e possuem a essência sobre o que é o Pensamento Matemático Avançado. Embora a matemática avançada seja focada nas abstrações de definição e dedução, não há uma distinção clara entre o Pensamento Matemático Avançado e o elementar, é possível abordar tópicos da matemática avançada de uma forma elementar. A relevância está em como esses tópicos são abordados. É necessário que haja uma interação entre os processos envolvidos nas diferentes formas de representação de um mesmo conceito, na generalização e na abstração.

O Pensamento Matemático Avançado consiste em uma listagem de processos tais como a representação, visualização, indução, análise, observação, classificação e síntese são processos componentes em interação. É importante que o professor de matemática esteja consciente desses processos para que compreenda algumas das dificuldades que os estudantes possam vir a enfrentar.

Neste contexto, elaboramos uma sequência de atividades com objetivo de analisar quais processos do Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (1991) podem estar presentes nos protocolos dos estudantes e se o uso da calculadora científica contribui para facilitar o processo de abstração do conceito de logaritmo.

Procedimentos Metodológicos

Como referencial metodológico, utilizamos os pressupostos da Engenharia Didática segundo Artigue, Douady e Moreno (1995) que é composta por quatro diferentes fases: análises prévias, análise a *priori*, experimentação, análise a *posteriori* e validação.

Nossa sequência didática foi organizada em 4 sessões de trabalho e foi aplicada durante 8 encontros de 2 horas.

Na 1ª e 2ª sessão contemplamos atividades matemáticas que englobaram conteúdos de potenciação, radiciação e função exponencial. Na 3ª e 4ª sessões foram propostas atividades sobre logaritmos e função logarítmica. Apresentaremos neste artigo as análises da 3ª sessão.

Algumas atividades matemáticas do instrumento de pesquisa foram inspiradas em situações de aprendizagens propostas no Caderno do Professor de Matemática do 1º ano do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2009). Este material foi distribuído para os professores da rede Estadual de Educação do Estado de São Paulo em 2009 e faz parte do projeto "São Paulo Faz

Escola - Uma proposta curricular para o Estado" implantado pela Secretaria Estadual de Educação no ano de 2008. Cada aluno recebe o material denominado Caderno do Aluno em que constam situações de aprendizagem para serem desenvolvidas durante as aulas a cada bimestre.

Os sujeitos de nossa pesquisa foram 6 alunos (com faixa etária de 16 anos) do 3º ano do Ensino Médio matriculados no período noturno de uma escola da rede pública estadual de São Paulo. Estes alunos foram convidados pela professora-pesquisadora, a primeira autora deste artigo, a participar dos encontros realizados no período vespertino.

Os encontros foram realizados na sala de informática da escola denominada pela Secretaria Estadual de Educação como "Acessa Escola". A sala possui 27 computadores conectados a uma rede e com acesso à internet. Durante todo o processo os alunos trabalharam em dupla que denominaremos D1, D2 e D3. Não houve ausência dos sujeitos durante os encontros.

Apresentação e análise das atividades da Sessão III

A seguir as atividades da Sessão III cujo objetivo é apresentar situações-problema que necessitam utilizar o conceito de função exponencial e logarítmica. Durante a seção, ao propor as atividades abaixo, pretendemos ressaltar a importância do estudo dos logaritmos para os alunos promovendo uma discussão sobre o tema, utilizando a calculadora científica. O processo de conjecturar, elaborar e testar hipóteses, generalizar, investigar, mudança de representação, são processos que poderão estar presentes nas atividades desta seção.

Na Figura 1 apresentamos a primeira atividade em que iniciamos o estudo dos logaritmos.

1) A população **N** de um determinado município cresce exponencialmente, desde a sua fundamentação há 20 anos, de acordo com a expressão $N = \mathbf{3000.10^{0,1t}}$, sendo **t** em anos. Responda:

a) O Valor de **N** quando o município foi fundado;

b) O valor de **N** dez anos após a fundação;

c) O valor de **N** nos dias atuais;

d) Depois de quanto tempo, após a fundação a população atingirá a marca de 3000000 habitantes, se o ritmo de crescimento continuar assim?

e) Depois de quanto tempo, após a fundação, o valor de N atingirá 600 000?

f) Você conseguiu chegar na expressão $10^{0,1t} = 200$?

g) Observe que $10^2 = 100$ e que $10^3 = 1000$ então deve haver um número n entre 2 e 3 tal que $10^n = 200$, usando a calculadora científica tente encontrar um valor estimado para n. (use 3 casas decimais)

h) Agora aperte a tecla log e depois o número 200. Qual é a sua conclusão?

*Figura 1***.** Atividade 1 – Sessão III.

A seguir apresentamos o diálogo entre a dupla D2 em que constatamos os processos do Pensamento Matemático Avançado: conjecturar, observar, investigar e generalizar.

Ao fazer a leitura da situação-problema apresentada conforme Figura 1, o primeiro comentário que a dupla D2 fez entre si foi:

F: Qual valor que teremos que substituir o valor de **t** ou **N?**

H: Vamos ler novamente.

F: Ah, se é uma função exponencial e a variável é o expoente, e **t** é o tempo, acho que temos que multiplicar **t** por 0,1.

H: Verdade, mas "será que **t** igual a 0 ou a 1?"

H: Mas olha aqui, se no momento que o município foi fundado...

F: Olha só, se vamos multiplicar por 0, e todo número elevado a zero é igual a 1, assim, a população inicial é de 3.000.

H: É verdade! Então vamos fazer "0,1. 0" que é o valor inicial.

No diálogo, a dupla fez a conjectura de que os valores a serem substituídos no item (a) estavam apenas entre 0 e 1. Testaram suas hipóteses e conseguiram chegar à solução do problema. Observamos a existência da dificuldade inicial em reconhecer que o t era a variável dependente. Os itens (b) e (c) foram resolvidos sem apresentar dificuldades. Segundo a dupla D2 o crescimento obedecia a um padrão, a cada dez anos e era multiplicado por dez, o resultado seria o valor total da população. Podemos citar que o processo de descoberta deste padrão pode ser descrito ao observar o crescimento da população, o que gerou um crescimento muito rápido. Percebemos que a observação, investigação e a generalização foram os processos presentes neste diálogo.

No item (d) a dupla transformou a solução do problema em notação científica, argumentou que os cálculos eram mais fáceis, pois deveriam somente somar os expoentes base 10. No entanto, como previmos em nossa análise *a priori* a dupla revelou dificuldade no item (e) no cálculo aritmético, pois ficou dúvida para isolar a variável t. A mudança de representação foi um dos processos do Pensamento Matemático Avançado que esteve presente no protocolo desta dupla.

Chegaram à seguinte equação: $200 = 10^{0,1t}$ e comentaram entre si: Como vamos transformar o número 200 em potência de base 10? A aluna F concluiu que o número só pode estar entre 2 e 3 no expoente. Depois que leram o item (g) confirmaram que o número no expoente estava entre 2 e 3 e utilizaram a calculadora científica para encontrar o valor procurado. Os números que utilizaram foram: 2,55; 2,33; 2,30; 2,301 e logo determinaram o valor do expoente, desta forma chegaram à solução do problema. Ressaltamos que a dupla mostrou-se entusiasmada para encontrar o número desconhecido e quando o encontrou, o entusiasmo aumentou.

Acreditamos que este momento de entusiasmo pode propiciar a aprendizagem por descoberta, um dos processos do Pensamento Matemático Avançado. No item (h) após conhecerem a tecla log, disseram: "Ah, professora, essa tecla é fantástica, pois calcula os valores dos expoentes". Neste momento, explicamos um pouco sobre o impacto da descoberta do logaritmo na sociedade científica da época.

Como previmos em nossa análise *a priori* a dupla D1 não teve dificuldade em responder os itens (a), (b), (c) e (d), pois era questões que necessitavam apenas fazer manipulações aritméticas e reconhecer que a variável dependente estava no expoente, como também compreender a situação-problema. A partir do item (e) as dificuldades começaram a surgir, como por exemplo, na mudança da variável, pois fizeram: $N = 3.000.\,10^{0,1.(2,3)}$ e foram atribuindo vários valores para t até chegar ao expoente procurado. Ao contrário da outra dupla D1, esta não conseguiu chegar à forma $10^{0,1\,t} = 200$, pois não observou que no lugar de N era necessário atribuir o valor de 600 000. Faltou a compreensão que o valor procurado era o número representado pela letra t e não o valor de N.

Após inúmeras tentativas de encontrar o expoente necessário para a solução do problema, pedimos para que a dupla D2 deixasse o item (e) e continuasse a leitura dos demais itens, e mesmo no item (g) que sugere o uso de 3 casas decimais, esta dupla usou várias casas decimais para expoente.

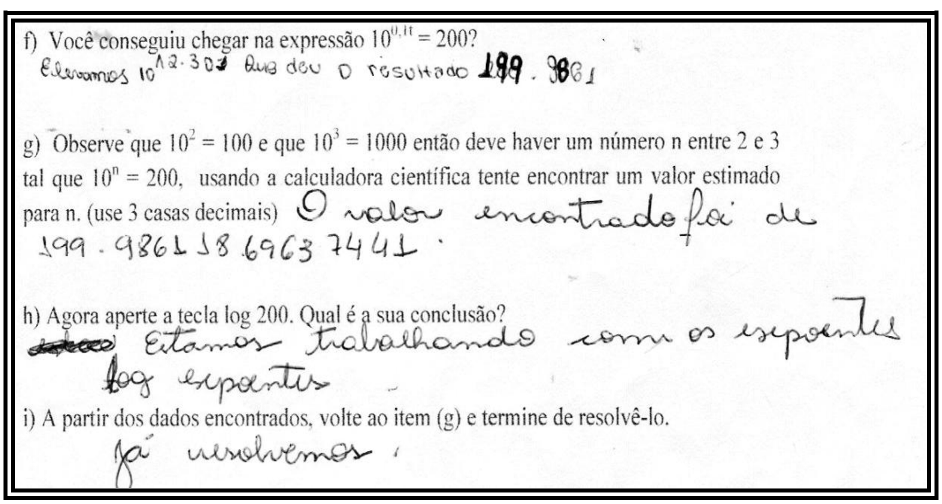
O item (e) só foi resolvido depois que utilizou a tecla log, escreveu $\log 200 = 2.30102996$ e arredondou para 2.20103. Talvez o erro possa ter sido ocasionado pela manipulação da calculadora científica, ou por falta de atenção.

A dupla D3 não deixou em seus registros a validação dos cálculos que foram utilizados para responder as questões acima. No item (a) temos por hipótese de que a dupla D3 não compreendeu qual o significado da variável N, e esse significado no contexto do problema, correspondia à quantidade de população. Essa dupla D3 teve um comportamento diferente das demais duplas, pois não havia interação, e quando perguntávamos se necessitava de alguma orientação, a dupla D3 recusava alegando que havia entendido tudo o que precisava fazer.

No item (b) notamos que a dupla escreveu $3.000.10 = 30.000$ ignorando o expoente. No item (c) podemos destacar que a dupla D3 registrou $N = 3000.10^{\,0}$ ou simplesmente ignorou a potência de base 10.

A dupla D3 não justificou a resposta para apresentar o resultado no item (d) e percebemos que nesta questão utilizaram a potência, mas não sabemos que raciocínio teve para concluir que deveria fazer $3.000.\,10^6$. Acreditamos que atribuiu valores para t utilizando a calculadora científica de forma que chegou a resposta esperada. Podemos destacar neste procedimento, o processo do Pensamento Matemático Avançado de conjecturar, para testar hipótese.

Para exemplificar, anexamos o protocolo da dupla D3 referente aos itens (f), (g), (h) e (i).


f) Você conseguiu chegar na expressão $10^{0,1t} = 200$?

Elevamos $10^{2.301}$ que deu o resultado 199.9861

g) Observe que $10^2 = 100$ e que $10^3 = 1000$ então deve haver um número n entre 2 e 3 tal que $10^n = 200$, usando a calculadora científica tente encontrar um valor estimado para n. (use 3 casas decimais) O valor encontrado foi de 199.98611869637441.

h) Agora aperte a tecla log 200. Qual é a sua conclusão?

Estamos trabalhando com os expoentes log expoentes

i) A partir dos dados encontrados, volte ao item (g) e termine de resolvê-lo.

Já resolvemos.

Figura 2. Protocolo da dupla D3 - Sessão III.

Segundo a dupla D3, foram testando vários valores na calculadora (utilizaram uma calculadora online). Não usou regra de arredondamento, porque queria saber quantas casas decimais o número poderia ter, e concluiu que “NUNCA” iria ser 200, mas o resultado estava muito próximo. Com relação a tecla *log* disse: “ É fantástica! pois não precisa ficar testando números”. Neste momento, contamos de maneira informal a história da invenção dos logaritmos para as três duplas.

Na Atividade 2, a dupla D1 apresentou dificuldade em preencher a tabela, observou que a escrita em logaritmos está relacionada com a potência, e para alguns valores o logaritmo não existe.

2) Observe os números disposto e complete a tabela

N	Escrita em Potência	Escrita em Logarítmo
100	10^2	log 100 = 2
1000	10^3	log 1000 = 3
10	10^1	log 10 = 1
10^0	10^0	log 10 = 01
[illegible]	$10^{\frac{1}{2}}$	log (5 = 1/2) $10^{\frac{1}{2}}$ = 3,16 ...
$\frac{1}{100}$	10^{-2}	log 10^{-2} = 0,01
1	10^0	log = 1
0,1	10^{-1}	log 0,1 = -1
0,001	10^{-3}	log 10^{-3} = -3
0,0004	4. 10^{-4}	log 0,0004 = -4
-10	-10^1	log -10 =
0	—	—

Figura 3. Protocolo da dupla D1 – Sessão III.

Ao analisar o protocolo da figura 3, observamos inúmeras dificuldades na mudança de representação e da escrita em forma de potência para a escrita em logaritmos. A dupla D1 conseguiu relacionar a atividade realizada na Sessão I, para uma mudança de representação de um expoente fracionário para a forma de um radical. Onde consta $10^{\frac{1}{2}}$, a dupla escreveu o $\log 5 = \frac{1}{2}$ e novamente escreveu $10^{\frac{1}{2}}$ = 3,16..., parece que a dupla fez $(10 \div 2 = 5)$ e concluiu que o $\log 5$ é igual a $\frac{1}{2}$, não concluindo que o $\log\sqrt{10} = \frac{1}{2}$. Acreditamos que essa dificuldade está relacionada à compreensão do conceito de logaritmos representada por um radical ou com expoente fracionário.

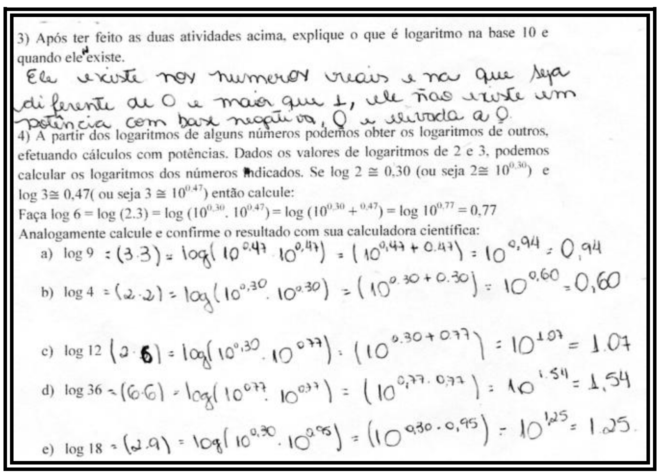
Por meio deste protocolo, observamos que esta dupla não compreendeu que o logaritmo está relacionado com o expoente. Uma das dificuldades que observamos durante o diálogo entre a dupla D1 foi mudar a representação do número 1 para a base 10. Uma aluna chegou a dizer: *“Como transformar o número 1 em 10? Isso é impossível!* Entretanto o seu colega disse: “*Você esqueceu que se colocarmos no expoente o número zero, teremos o número 1, é somente uma mudança de representação numérica*.” Percebemos que a mudança de representação presente neste diálogo é um dos processos do Pensamento Matemático Avançado. Observamos que a dupla não utilizou a calculadora científica para conferir os resultados.

Os Processos do Pensamento Matemático Avançado presentes nesta atividade são os da observação e visualização. O uso da calculadora científica foi relevante para que a dupla D1 respondesse à questão, entretanto percebemos que não houve conferência dos resultados na tabela anterior. Perguntamos aos alunos como eles usavam a calculadora científica nas aulas, e responderam que era somente para resolver os cálculos, mas nunca retornavam a questão para verificar se o resultado estava correto.

Percebemos a falta do uso da calculadora para testar e validar conjecturas, servindo apenas como uma ferramenta, sem uma maior reflexão dos resultados.

A dupla D3 espantou-se com o fato da não existência dos logaritmos de números negativos. Constatamos nos protocolos das duplas as dificuldades na escrita logarítmica, pois para $10^{\frac{1}{2}}$, escreveu o log de 0,5 e não o $\log\sqrt{10} = 0{,}5$ e quando $N = 0{,}0004$ a dupla D3 relacionou o último algarismo com o expoente na forma de potência. Nessa atividade houve a necessidade de fazer uma mudança de representação numérica e a alternância entre essas representações que são processos para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado.

Na questão 3 observamos que a dupla D2 (Figura 4)conseguiu expressar a condição de existência dos logaritmos. Acreditamos que o preenchimento da tabela em que aparece a escrita na forma de potência de base 10 e na forma logarítmica pode ter ajudado a dupla esta questão. A observação e a mudança de representação de um mesmo conceito são processos do Pensamento Matemático Avançado, presentes nesta atividade.


3) Após ter feito as duas atividades acima, explique o que é logaritmo na base 10 e quando ele existe.

Ele existe nos numeros reais e na que seja diferente de 0 e maior que 1, ele não existe um potência com base negativa, 0 e elevada a 0.

4) A partir dos logaritmos de alguns números podemos obter os logaritmos de outros, efetuando cálculos com potências. Dados os valores de logaritmos de 2 e 3, podemos calcular os logaritmos dos números indicados. Se log 2 ≅ 0,30 (ou seja $2 \cong 10^{0,30}$) e log 3 ≅ 0,47(ou seja $3 \cong 10^{0,47}$) então calcule:

Faça $\log 6 = \log(2.3) = \log(10^{0,30}.\ 10^{0,47}) = \log(10^{0,30+0,47}) = \log 10^{0,77} = 0{,}77$

Analogamente calcule e confirme o resultado com sua calculadora científica:

a) $\log 9 = (3.3) = \log(10^{0,47}\ 10^{0,47}) = (10^{0,47+0.47}) = 10^{0,94} = 0{,}94$

b) $\log 4 = (2.2) = \log(10^{0,30}.\ 10^{0.30}) = (10^{0.30+0.30}) = 10^{0,60} = 0{,}60$

c) $\log 12\ (2\cdot 6) = \log(10^{0,30}.\ 10^{0.77}) = (10^{0.30+0.77}) = 10^{1.07} = 1.07$

d) $\log 36 = (6.6) = \log(10^{0,77}.\ 10^{0,77}) = (10^{0,77.0,77}) = 10^{1.54} = 1{,}54$

e) $\log 18 = (2.9) = \log(10^{0,30}.\ 10^{0,95}) = (10^{0,30.0,95}) = 10^{1,25} = 1.25$

Figura 4. Protocolo da dupla D2 - Sessão III.

Analisando a resposta registrada nos protocolos da dupla D3 e D2, há indícios que essas duplas compreenderam o conceito de logaritmo na base dez e sua condição de existência e podemos citar como processos do Pensamento Matemático Avançado: observação, mudança de representação, testar hipóteses e a generalização.

5) Repetindo o procedimentos realizados nos itens acima, sendo $A = 10^a$ e $B= 10^b$ então podemos escrever $\log A.B =$ podemos juntar as base e somar apenas o expoente. porque são iguais e estão multiplicando

6) Determine o valor dos logaritmos abaixo:

a) $A = \log_2 \frac{16}{4} = \frac{4}{2} = 2$

b) $B = \log_2 16 - \log_2 4 = \log_2 2$

Observe os itens (a) e (b) da questão anterior. Sendo A = B e c= a base do logaritmo então poderemos escrever que $A = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_c A - \log_c B$

Figura 5. Protocolo da dupla D2 - Sessão III.

Em nossas observações, não percebemos nenhuma dificuldade para que as duplas D1 e D2 conseguissem expressar as propriedades dos logaritmos na forma algébrica. Percebemos que estas duplas relacionaram as propriedades das potências com as propriedades dos logaritmos.

7) Dada a expressão $M = \log_2 7^3$ escreva

a) como um produto de logaritmos em fatores iguais.

$LOG_2 7^3 = LOG_2 7 . LOG_2 7 \cdot LOG_2 7$

b) Agora, transforme o produto de encontrado na questão anterior em soma de 3 parcelas. Chamando de N a expressão que você encontrou

$N = LOG_2 7 + LOG_2 7 + LOG_2 7 \Rightarrow 3 LOG_2 7$

c) Podemos dizer que N = M?

$3 LOG_2 7 = LOG_2 7^3$ (sim)

d) Observe os itens (a), (b) e (c) então podemos escrever que se o $\log_a M^N =$

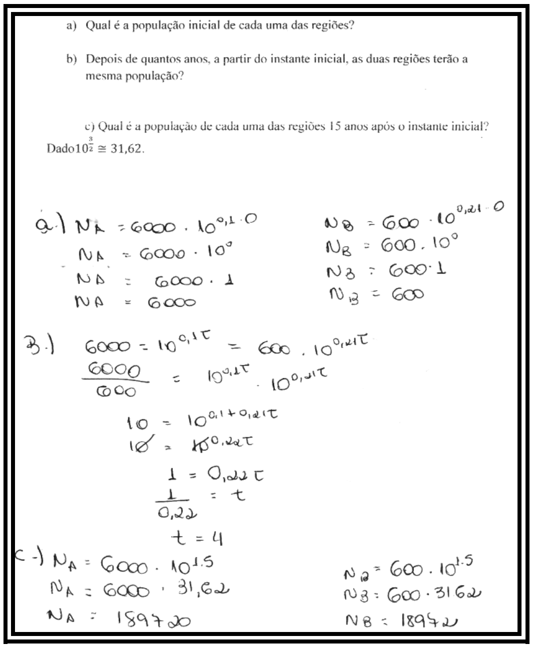
$N . LOG_a M$

Figura 6. Protocolo da dupla D2 - Sessão III.

Um dos processos do Pensamento Matemático Avançado que podemos citar neste protocolo (Figura 6) é o processo de generalização, pois a dupla D2 partiu de um caso particular para a generalização.

A dupla D1 teve dificuldade em interpretar a questão, pois não sabia o significado da frase: “produto de fatores iguais”, após várias tentativas e discussões, percebeu que era desenvolver o logaritmo de uma potência por meio de uma multiplicação. A maior dificuldade foi escrever a expressão algébrica.

O protocolo da dupla D3 aponta uma progressão em relação à questão anterior, pois a dupla realizou manipulações do cálculo algébrico e por meio da observação chegou à generalização da propriedade dos logaritmos por meio de uma expressão algébrica. Ressaltamos que não houve intervenção de nossa parte para ajudá-la.



a) Qual é a população inicial de cada uma das regiões?

b) Depois de quantos anos, a partir do instante inicial, as duas regiões terão a mesma população?

c) Qual é a população de cada uma das regiões 15 anos após o instante inicial?

Dado $10^{\frac{3}{2}} \cong 31,62$.

a.) $N_A = 6000 \cdot 10^{0,1 \cdot 0}$ $N_B = 600 \cdot 10^{0,21 \cdot 0}$
$N_A = 6000 \cdot 10^{0}$ $N_B = 600 \cdot 10^{0}$
$N_A = 6000 \cdot 1$ $N_B = 600 \cdot 1$
$N_A = 6000$ $N_B = 600$

b.) $6000 = 10^{0,1t} = 600 \cdot 10^{0,21t}$
$\frac{6000}{600} = 10^{0,1t} \cdot 10^{0,21t}$
$10 = 10^{0,1+0,21t}$
$\cancel{10} = \cancel{10}^{0,22t}$
$1 = 0,22t$
$\frac{1}{0,22} = t$
$t = 4$

c.) $N_A = 6000 \cdot 10^{1,5}$ $N_B = 600 \cdot 10^{1,5}$
$N_A = 6000 \cdot 31,62$ $N_B = 600 \cdot 31,62$
$N_A = 189720$ $N_B = 18972$

Figura 7. Protocolo da dupla D2 – Sessão III.

No protocolo da dupla D2 (Figura 7) constatamos um pequeno deslize na escrita numérica, mas não houve dificuldade na interpretação da situação-problema e realizou de forma correta as propriedades das potências. Observamos no item (b) que a dupla cometeu um erro no tratamento aritmético, pois deveria ficar $10 = 10^{0,1t} . 10^{0,2t}$ a dupla D2 confundiu a variável t com o número 1 e fez $0,1t + 0,21t$, esse pequeno equívoco comprometeu o resultado da situação-problema. No item (c) fez o cálculo aritmético de forma correta para o número de população da cidade A, mas para encontrar o número da população da cidade B, a solução não foi correta.

De modo geral na Sessão III, a dupla D2 demonstrou um avanço em relação à primeira Sessão. Esta dupla utilizou os recursos disponibilizados como o computador e a calculadora científica de modo dinâmico, para todas as atividades, houve discussão entre a dupla, utilizou os recursos disponíveis para testar suas conjecturas e verificar os resultados.

Ao analisar o protocolo da dupla D1, constatamos que justificativas estavam confusas, no item (a) não houve o registro de como a dupla D1 chegou aos resultados. No item (b) a dupla calculou ($6000 \div 600 = 10$) e transformou os resultados em notação de base 10, utilizando a propriedade da potência de forma correta, e com isso chegou-se ao resultado esperado. No item (c) não conseguiu realizar o cálculo aritmético de forma correta.

As dificuldades dos alunos nos cálculos aritméticos e algébricos, uso da potenciação com números racionais radiciação, foram visíveis em nossas análises. No entanto, com relação ao conceito de logaritmos os protocolos indicam que as duplas D1 e D2 conseguiram abstrair de forma satisfatória.

A dupla D3 relatou que a Sessão III foi "muito difícil", mas aprendeu um pouco mais sobre os logaritmos. As dificuldades relatadas pela dupla foram ao fazer suas justificativas na escrita em língua materna.

Considerações Finais

Este artigo teve como propósito apresentar resultados de uma pesquisa realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola Pública do Estado de São Paulo. Partimos de uma situação de aprendizagem que abordasse fatos fundamentais para a compreensão dos logaritmos.

Para a análise dos dados fizemos uma reflexão de como os processos do Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991) podem estar presentes nas atividades que foram propostas e que esses pudessem ajudar no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Esses processos foram: intuição, generalização, visualização, mudanças de representação, síntese, generalização e abstração. Para o autor esses processos são relevantes para a compreensão da aprendizagem em matemática.

Utilizamos como metodologia de pesquisa os pressupostos metodológicos da Engenharia Didática, tais como a análises preliminares e *a priori*, experimentação e análise a *posteriori*.

Durante a Sessão III, constatamos que a dupla D1 utilizava a calculadora como ferramenta, pois notamos que não houve conferência dos resultados na tabela anterior. Perguntamos aos alunos como eles usavam a calculadora científica nas aulas, e responderam que era somente para resolver os cálculos, mas nunca retornavam à questão para verificar se o resultado estava correto. Ou seja, a calculadora foi utilizada como uma ferramenta de validação dos resultados.

Percebemos a falta do uso da calculadora para testar e validar conjecturas e sim, apenas como uma ferramenta sem uma reflexão dos resultados. Este fato esteve presente nos resultados da pesquisa realizada por Bianchini e Machado (2010).

Ainda nesta sessão ao propor uma situação-problema que era necessário o uso dos logaritmos, "qual é o valor do expoente n para que se tenha $10^n = 200$", após longas tentativas de erros e acertos os alunos encontraram o valor do expoente necessário para responder a questão $10^n = 200$. Houve um momento de entusiasmo pelas duplas e acreditamos que situações como esta podem propiciar a aprendizagem por investigação, que é um dos processos do Pensamento Matemático Avançado.

Dreyfus aponta que ao utilizar um ambiente computacional muitas relações normalmente implícitas, por exemplo, entre representações para o mesmo conceito podem se tornar explicitas. Tal fato contribui para que o estudante estabeleça relações entre ideias para a formação de conceitos. Observamos este fato quando apresentamos a tecla log, quando a dupla disse: "Ah professora, essa tecla é fantástica, pois calcula os valores dos expoentes" (dupla D1). E assim constatamos que esta dupla estabeleceu a ideia de logaritmo como um expoente.

E neste momento relatamos um pouco a história da invenção dos logaritmos e os impactos desta descoberta na sociedade científica da época.

Nesta sessão, ao observarmos o comportamento das duplas frente às questões, suas discussões e seus registros, percebemos que houve dificuldade no cálculo aritmético e algébrico, justificar suas respostas na linguagem materna. Em alguns momentos as duplas compreenderam o enunciado da situação-problema, mas no momento de escrever a justificativa não conseguiam expressar suas ideias.

Contudo, percebemos que as duplas conseguiram generalizar as propriedades dos logaritmos e relataram que de fato, fazer operações como a soma e subtração de logaritmos é muito mais fácil do que utilizar a multiplicação e divisão. Relataram que o matemático Napier "*foi fantástico em* sua *invenção".*

A escolha das atividades que contemplassem a possibilidade de desenvolver nos alunos os processos do pensamento matemático tais como a conjecturar, analisar, observar, visualizar, investigar, generalizar e abstrair contribuiu para que os alunos compreendessem os logaritmos, condição de existência e suas propriedades.

Acrescentamos que o uso da calculadora científica também contribuiu para o desenvolvimento dos processos de investigação, mudança de representação, generalização e abstração.

Para pesquisas futuras sugerimos que professores e pesquisadores sensibilizem os alunos a utilizar a calculadora como uma ferramenta para validar as suas respostas e elaborem atividades que possibilitem o desenvolvimento dos processos do Pensamento Matemático Avançado de forma que contribua para a abstração de conceitos matemáticos.

Referências

Artigue, M., Douady, R. Moreno, L. (1995). *Ingeniería didática em Educación matemática: um esquema para la investigación y la innovación em la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Pedro Gómez.

Bianchini, B. L., Machado, S. D. A. (2010). A sensibilização do professor do ensino fundamental para o uso da calculadora em sala de aula. Groenwald C. L. O, Rosa M.(Eds). *Educação Matemática e calculadoras: teoria e prática*. (pp. 179-191). Canoas: ULBRA.

Brasil, Secretaria da Educação Básica (2006). *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Orientações Curriculares para o Ensino Médio.* Brasília: MEC.

Borba R., Selva A.(2010). Calculadoras e o aprendizado matemático no ensino fundamental. In Groenwald C. L. O, Rosa M. (Eds.) *Educação Matemática e calculadoras: teoria e prática*.(pp. 193-215). Canoas: ULBRA.

Dreyfus, T., Advanced Mathematical Thinking Processes. (1991). In Tall, David. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*.(pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers: Dordrecht – Holanda.

Eves, H.(2008). *Introdução à história da matemática*, tradução: Hygino H. Domingues. 3ª reimpressão. Campinas, SP: UNICAMP.

São Paulo (ESTADO). Secretaria da Educação. (2009) Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Caderno do Professor de Matemática*. 1º ano Ensino Médio, 3, SP: CENP.