



Números irracionais: uma observação de regularidades

Sônia Cristina da Cruz **Mendes**

Universidade Severino Sombra - USS

Brasil

soniaccm@click21.com.br

Chang Kuo **Rodrigues**

Universidade Severino Sombra – USS/Colégio Cristo Redentor

Brasil

chang@powerline.com.br

Patrícia Nunes da **Silva**

Universidade Severino Sombra - USS/UERJ

Brasil

patnsilva@gmail.com

Resumo

Neste artigo, apresentamos e provamos um resultado sobre a distribuição de raízes quadradas de números naturais na reta real. A regularidade observada neste resultado foi percebida empiricamente ao se tentar localizar essas raízes na reta real. Queremos ilustrar com esse procedimento a importância e a necessidade de os professores de Matemática se aventurarem na percepção e na investigação de regularidades, particularmente em suas generalizações. Pelo fato de o resultado apresentado ser relativo a números irracionais, vemos nele também uma oportunidade de discutir algumas questões sobre o ensino desses números.

Palavras chave: análise matemática, números irracionais, padrões e regularidades, generalizações.

Os números irracionais

Iniciamos com alguns questionamentos: Por que ensinar Números Irracionais nas séries do ensino fundamental? Como motivar os estudantes a compreenderem os números irracionais como entes do conjunto dos números reais? Quais são as regularidades que podem ser observadas nos números irracionais?

Podemos nos reportar à história dos números irracionais buscando um significado para o conteúdo a ser ensinado ou simplesmente despertar curiosidade aos educandos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam que o processo de ensino e de

aprendizagem na disciplina de Matemática pode ter uma contribuição significativa quando se recorre à história da matemática, pois, a Matemática ganha vida e surge como uma criação humana em resposta a suas necessidades e para atender seus anseios. Isso possibilita ao aluno comparar a Matemática do passado com a do presente, desenvolvendo valores favoráveis para uma melhor aprendizagem.

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. (Brasil, 1997, p. 46)

Contar e entender a história são meios importantes para favorecer o aprendizado e possibilitar novas descobertas e redescobertas como é o indicado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Vale ressaltar que a Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro, em sua “Proposta Curricular: um novo formato”, recomenda que, dentre as competências e habilidades no campo numérico-aritmético, os alunos sejam capazes de “Apreciar a história dos números, especialmente a comoção causada pela descoberta dos Irracionais”¹. Indica também o ensino de Números Irracionais para o 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.

Segundo Caraça (1951), os números racionais surgiram como resposta do homem à necessidade de comparar grandezas quando a habilidade de contar, que ele já dominava, já não era suficiente para responder à questão de quantas vezes uma grandeza era maior que outra.

Para Pitágoras, na Matemática só existiam os números racionais positivos e eles podiam descrever todo o universo, pois estavam associados às medições. Em seus estudos, encontramos muitas generalizações e regularidades. Podemos citar os números triangulares, os números quadrados, os números pentagonais entre outros. Além do aspecto da regularidade, esses números conectam naturalmente ideias da aritmética e da geometria.

Através do “Teorema de Pitágoras” - que é uma generalização feita a partir da observação de um padrão de regularidade utilizado na prática pelos babilônios e pelos chineses, mil anos antes de Pitágoras - um dos alunos da Irmandade Pitagórica, Hipaso, observando a diagonal do quadrado de lado igual à unidade, verificou que ela não correspondia a um número racional (inteiro ou fracionário). Segundo Eves (2004, p.106), “a descoberta da existência dos números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos”. A doutrina “tudo é número” foi destruída e os pitagóricos foram incapazes de contrariar os argumentos lógicos de Hipaso.

A história nos mostra que os números irracionais surgiram, trazendo desafios e dificuldades e é possível que sejam, também, os responsáveis pelo insucesso escolar de muitos estudantes. No entanto, não há como evitá-los. Eles, juntamente com os racionais, constituem os reais e, na verdade, existem mais números irracionais que números racionais. De acordo com Lima (1993) chega-se à conclusão de que realmente o ensino dos Números Irracionais é fundamental, pois, sem tê-los, como chegar aos números Reais? E como explicar as inúmeras casas decimais sem regularidade?

As representações e generalizações

Reportando-nos ainda à história, traçamos uma comparação entre o sentido de número para

¹ Disponível em: www.educacao.rj.gov.br Acesso em: 23 jul 2010.

o homem primitivo - ele estava associado a encantamento, misticismo e havia uma relação direta com as coisas que eles lhe permitiam contar - e o homem atual, para quem os números são apenas algo aritmético, aparentemente desligado das coisas reais, pois já está inserido em seu pensamento. Para Caraça (1951), esse processo de abstração é natural.

Verifiquemos, no entanto, como um dado real que não pode ser posto de lado, que o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações, pela exploração metódica de todas as suas consequências. (Caraça, 1951, p. 10)

O homem tende a seguir, em suas criações, determinada lógica. O próprio pensamento intuitivo, gradativamente, nos leva ao desencadeamento de um raciocínio lógico, a uma observação de determinadas tendências, normas, princípios, enfim, de regularidades.

Como exemplo, podemos citar a sequência de números naturais que vai aumentando com acréscimo de uma unidade; assim, naturalmente, se dermos início à sequência 0, 1, 2, 3, automaticamente, saberemos o próximo número, que será o 4. Isso ocorre porque percebemos uma regularidade, ou melhor, o nosso “pensamento não vê barreira para aplicação da operação elementar; por outras palavras, aceita, não pode deixar de aceitar, a possibilidade de repetição ilimitada do acto mental - juntar uma unidade” (Caraça, 1951, p.11), o que nos leva ao princípio da extensão, à possibilidade do infinito.

O homem busca o caminho mais simples para solucionar seus problemas, que seja o mais curto e nos conduza ao princípio da economia, poupando-nos energia mental nas resoluções. Deparamo-nos, então, com operações mentais que nos levam a criar generalizações.

Quando o professor ensina Matemática, apresentando inúmeras fórmulas que parecem ter surgido do nada tornam o conhecimento como elemento a ser “decorado” e sem sentido. Para uma aprendizagem significativa, é preciso orientar e estimular a criança para a percepção de regularidades, pois “a tendência em Matemática é adquirir, completar, estender, generalizar” (Caraça, 1951, p.51).

A existência de regularidades é extremamente importante porque permite a repetição e previsão, desde que se criem as condições iniciais convenientes; ora, repetir e prever é fundamental para o homem na sua tarefa essencial de dominar a Natureza. Toda técnica se baseia nisso, e o leitor que pense um momento na possibilidade e utilidade dessa técnica na vida corrente – de um extremo ao outro da aparelhagem técnica, da enxada ao ciclotrão – verificará sem trabalho que tal possibilidade e utilidade se baseiam nestas duas coisas essenciais: repetir os fenômenos tantas vezes quantas sejam precisas, prever os seus resultados. (Caraça, 1951, p.119-120).

Segundo Lorenzato (2008, p.12), “é preciso auxiliar a criança a transformar em interiorizações (ou abstrações) suas ações sobre o concreto, o manipulável ou o visual, isto é, passar da ação à representação (abstração reflexiva)”. A atividade lógica é um processo de busca por demonstrações. “O conceito é, em termos psicológicos, um ato de generalização” (Vigotsky, 2000, p.246).

As representações e generalizações são importantes, não só para matemática, como para própria linguagem. A construção do pensamento ocorre pela construção de generalizações e de um processo de transições de uma generalização à outra, conforme afirma Vigotsky (2000). A

passagem do concreto (o que pode-se visualizar) para o abstrato, a formação das deduções a partir da lógica pela observação de regularidades e generalizações.

Observando a reta real

Em um método geométrico de construção das raízes quadradas de números naturais (maiores ou iguais a 2), elas correspondem às hipotenusas dos triângulos retângulos, conforme indicado na figura abaixo. Ao fazer um paralelo entre o processo de obtenção dessas hipotenusas e a distribuição dos números irracionais assim construídos na reta real, percebemos uma regularidade. A curiosidade matemática nos instigou a verificar sua veracidade.

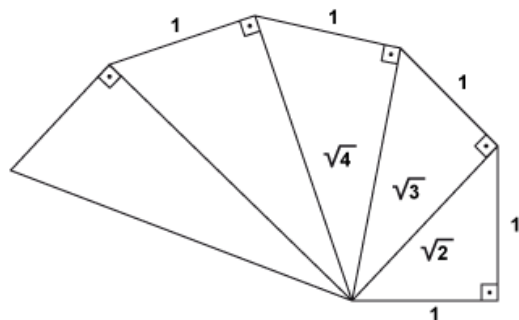


Figura 1. Método geométrico de construção das raízes quadradas de números naturais

Observe a distribuição das raízes quadradas positivas na Reta Real abaixo:

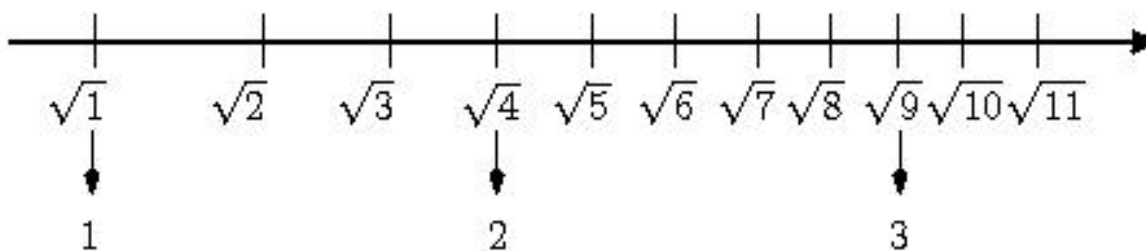


Figura 2. Distribuição das raízes quadradas de números naturais na reta real.

Percebe-se que entre o número inteiro 1 e o inteiro 2 existem duas raízes quadradas de números naturais que são irracionais; entre os inteiros 2 e 3 existem quatro; entre os inteiros 3 e 4, existem seis e, assim, sucessivamente, ou seja, a observação sugere que para cada novo segmento da reta delimitado por dois inteiros positivos consecutivos, teremos mais dois irracionais que são raízes quadradas de números naturais. Mas somente essa percepção sem a generalização não é suficiente para que esta afirmação seja verdadeira. Afinal, os números inteiros positivos dessa reta são infinitos, e pela visualização dos cálculos com apenas alguns números não poderemos comprovar a veracidade para o próximo intervalo.

Em nosso primeiro passo para a generalização e verificação dessa regularidade, vamos considerar um intervalo determinado por dois naturais consecutivos e tentar estabelecer uma relação entre os extremos desse intervalo e a quantidade x de números irracionais pertencentes a esse intervalo e que sejam dados por raízes de inteiros positivos. Para sedimentar este procedimento e identificar um padrão, vamos analisar alguns exemplos numéricos.

Para determinar as raízes quadradas de números inteiros positivos pertencentes ao

intervalo limitado pelos naturais 1 e 2, consideramos $1 \leq \sqrt{a} \leq 2$. Calculamos os quadrados e teremos $1 \leq a \leq 4$.

Logo, a deve ser um inteiro pertencente ao conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Como queremos somente contar os números irracionais, devemos excluir os elementos de A que são quadrados perfeitos. Isto é, devemos excluir os elementos de A que correspondam aos quadrados das extremidades 1 e 2 do nosso intervalo original. Para excluir uma das “extremidades”, tem-se que: $4 - 1 = 3$. Agora, subtraímos 1 do resultado obtido para excluir a outra “extremidade” e verificamos que há: $3 - 1 = 2$ irracionais que são raízes quadradas de números inteiros positivos no intervalo $[1, 2]$.

Repetiremos o mesmo processo para o intervalo limitado pelos inteiros 2 e 3. Também, teremos raízes quadradas de números inteiros positivos, que são números irracionais. Então:

$$2 \leq \sqrt{a} \leq 3 \text{ e, calculando os quadrados, teremos } 4 \leq a \leq 9$$

Logo, a pertence ao conjunto $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Vamos contar a quantidade de elementos de A , excluindo os que são quadrados perfeitos: ao efetuarmos $9 - 4 = 5$, excluimos uma das “extremidades”. Agora, subtraímos 1 do resultado obtido para excluir a outra “extremidade” e verificamos que há: $5 - 1 = 4$ irracionais que são raízes quadradas de números inteiros positivos no intervalo $[2, 3]$.

Percebe-se que repetimos o seguinte procedimento: subtraímos o maior e o menor elemento de A . Isto é, subtraímos os quadrados dos inteiros que são os extremos do intervalo que estamos analisando. Já que queremos contar somente os irracionais, retiramos sempre 1 para fazer a exclusão da extremidade. Vamos generalizar esse procedimento: seja n um número inteiro positivo qualquer. Então:

Para determinar as raízes quadradas de números inteiros positivos pertencentes ao intervalo limitado por n e $n+1$, consideramos:

$$n \leq \sqrt{a} \leq n + 1. \text{ Calculamos os quadrados e teremos } n^2 \leq a \leq (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Subtraímos os quadrados para excluir uma das extremidades:

$$n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Agora, subtraímos 1 do resultado obtido acima, para excluir a outra extremidade e verificamos a quantidade x de irracionais que são raízes quadradas de números inteiros positivos pertencentes ao intervalo $[n, n+1]$ é igual a: $2n + 1 - 1 = 2n$. Vamos agora mostrar (demonstrar) que o valor de x cresce conforme uma progressão aritmética, P.A., $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \dots)$ de razão 2. Observe que a_n é a quantidade x de irracionais que são raízes quadradas de números inteiros positivos pertencentes ao intervalo $[n, n+1]$.

Escolhemos dois termos consecutivos quaisquer da sequência descrita acima. Isto equivale a considerar os intervalos $[n, n+1]$ e $[n+1, n+2]$. Então:

$$a_n = (n + 1)^2 - n^2 - 1. \text{ Desenvolvendo: } a_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1. \text{ Isto é, } a_n = 2n$$

e

$$a_{n+1} = (n+2)^2 - (n+1)^2 - 1 = (n^2 + 4n + 4) - (n^2 + 2n + 1) - 1 = 2n + 2$$

Portanto, subtraindo os termos:

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 2 - 2n = 2.$$

Chegamos à verificação que temos uma progressão aritmética de razão dois.

Conclusões

É importante ter domínio das demonstrações e das generalizações e a percepção das regularidades para a construção do raciocínio lógico e da capacidade de abstração. É preciso atentar que o questionamento dos porquês, as dúvidas e os próprios erros é que levam o homem às descobertas e a suas comprovações.

As fórmulas que serão ensinadas aos alunos não devem se tornar apenas letras decoradas; é necessário e fundamental partir de exemplos concretos, mas não devemos nos restringir a eles. Há inúmeras regularidades que podem nos permitir o exercício das deduções e abstrações.

O homem busca o conhecimento para ser capaz de entender, explicar e transformar o mundo. O professor não deve limitar seus aprendizes a fórmulas prontas e sem sentido. Deve, ao menos, apresentar a evolução histórica da Matemática para que eles entendam que o conhecimento não surge com um passe de mágica, muito pelo contrário, é um processo em constante transformação. Cabe ao professor de matemática aprofundar seus próprios conhecimentos, ser um pesquisador inquieto para incentivar seus alunos a exercer a prática investigativa.

Enfim, para este trabalho, vamos explorar graficamente a percepção e dedução da regularidade existente na distribuição da quantidade de irracionais que são raízes quadradas de números inteiros positivos nos intervalos formados por naturais consecutivos $[n, n+1]$. Vamos partir do procedimento geométrico de construção das raízes de naturais e explorar visualmente a percepção e a comprovação dessa regularidade usando os procedimentos conforme descritos na Seção “Observando a reta real”.

Bibliografia e referências

- Brasil. (1997) *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática*. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental.
- Caraça, B.J. (1951) *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Carvalho, M. S., Lopes, M.L.M.L. & Souza, J.C.M. (1984) *Fundamentação da Matemática Elementar*. São Paulo: Campus.
- Eves, H. (2004) *Introdução à história da matemática*. (H. H. Domingues, Trad.). Campinas: Unicamp.
- Freire, P. (1996) *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.
- Lima, E.L. (1993) *Análise Real*. vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA.
- Lorenzato, S. (2008) *Educação Infantil e Percepção Matemática*. Campinas, SP: Autores Associados.
- Singh, S. (2008) *O último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos*. (J.L. Calife, Trad.). Rio de Janeiro: Record.
- Vigotsky, L.S. (2000) *A construção do pensamento e da linguagem*. (P. Bezerra, Trad.). São Paulo: Martins Fontes.