



## A Utilização de Espelhos no Ensino de Geometria

Maristel do **Nascimento**

UTFPR – Ponta Grossa

Brasil

[mnasci202@hotmail.com](mailto:mnasci202@hotmail.com)

Sani de Carvalho **Rutz da Silva**

UTFPR – Ponta Grossa

Brasil

[sani@utfpr.edu.br](mailto:sani@utfpr.edu.br)

Nilceia Aparecida Maciel **Pinheiro**

UTFPR – Ponta Grossa

Brasil

[nilceia@utfpr.edu.br](mailto:nilceia@utfpr.edu.br)

### Resumo

O ensino de matemática no Brasil tem sido alvo de vários estudos, que são determinados pelas interações que envolvem a tríade: professor, aluno, conhecimento, e hoje, são reconhecidos como um dos principais projetos da investigação em Educação Matemática, visando a transformação qualitativa do ensino-aprendizagem em matemática. O presente artigo tem como objetivo discutir o ensino de geometria, tomando como foco uma experiência com o uso de espelhos, desenvolvida em sala de aula, com ênfase no conteúdo geometria das transformações. Para esta discussão selecionamos situações problemas envolvendo os conceitos de isometrias – translação, rotação e reflexão. Destacamos a experiência realizada em uma turma de 1ª série do Ensino Médio de um colégio estadual na cidade de Ponta Grossa. A análise desta experiência evidenciou a importância da utilização de materiais concretos na construção dos conceitos de geometria.

*Palavras-chave:* geometria, ensino – aprendizagem, isometrias, espelhos.

### Introdução

A experiência como docente e coordenadora pedagógica de matemática, junto ao Núcleo Regional de Educação da cidade de Ponta Grossa, Paraná, Brasil, tem-me revelado

que apesar das discussões, estudos e formações continuadas com os professores, o ensino de geometria ainda está ausente das práticas pedagógicas e os alunos concluem o Ensino Fundamental com pouco ou nenhum dos conhecimentos básicos de geometria.

Para reverter esta situação, é necessário que o professor em sua prática de sala de aula procure: contextualizar o ensino; ensinar os conteúdos de formas alternativas; busque uma postura reflexiva diante de suas práticas, bem como inteirar-se dos documentos que norteiam as novas propostas pedagógicas, que hoje, “ao invés de transferência de conteúdos prontos, acentuam a interação do aluno com o objeto de estudo, a pesquisa, a construção do conhecimento para acesso ao saber” (Micotti, 1999:158p). E o professor está preparado para estas mudanças? Fruto de uma pedagogia tradicional onde ele se considera o detentor do conhecimento, e o aluno um mero receptor. Como garantir esta mudança? Como possibilitar ao professor subsídios para que ele se sinta capaz de modificar a sua prática pedagógica? Assim, resgatar o ensino de geometria, ausente dos currículos escolares, é um desafio. Com este objetivo desenvolvemos este trabalho.

O trabalho foi uma experiência com o uso de espelhos no ensino de geometria, desenvolvida em sala de aula, com ênfase no conteúdo geometria das transformações. Teve como objetivo propiciar a construção dos conceitos de rotação, translação e reflexão, bem como apresentar uma alternativa metodológica para trabalhar estes conceitos com a utilização de materiais concretos. Partindo-se de referências como, Murari (2004), Biembengut (1995) e Barbosa (1993), buscou-se elaborar modelos de atividades que serviram como meio para uma abordagem conceitual. Foram construídos materiais, relacionados aos temas e apresentados aos alunos em forma de questões para investigação e exploração, buscando a construção destes conceitos. A aplicação da atividade teve como autores 28 alunos de uma 1ª série do Ensino Médio, de um colégio estadual da cidade de Ponta Grossa no estado do Paraná.

Os documentos que orientam o ensino de geometria dão ênfase ao ensino desse conteúdo, entretanto, ele está ausente dos currículos escolares. Assim desenvolvemos um trabalho investigativo - exploratório com o conteúdo geometria das transformações, visando à melhoria no processo ensino aprendizagem.

#### Fundamentação Teórica

Para Lorenzato (1995) “O movimento da Matemática Moderna também tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino de Geometria”, antes de sua chegada ao Brasil, o nosso ensino, inspirado na escola francesa, era marcadamente lógico-dedutivo, aliado ao rigor matemático dos axiomas, postulados e teorema. O aluno aprendia geometria decorando fórmulas e modelos de exercícios.

Com a proposta da Matemática Moderna de algebrizar a geometria, buscou-se um ensino que facilitasse a aprendizagem, com uso de novas técnicas: “Uma Matemática escolar orientada pela lógica dos conjuntos, pelas relações, pelas estruturas pela axiomatização” (Miorin, 1995, p. 44), que não obteve sucesso, mas eliminou o modelo anterior, resultando num total abandono do ensino de geometria. Assim, no Brasil, o conteúdo de geometria foi praticamente extinto do contexto das salas de aula.

Lorenzato (1995) indica quatro causas para esse abandono, que estão diretamente relacionadas com as práticas pedagógicas: durante muito tempo, o ensino de Geometria não se renovou e, com isso, perdeu o vigor; na sua formação, a maioria dos professores não tiveram acesso aos conhecimentos de Geometria necessários para a realização de sua prática pedagógica; tanto a formação falha do professor quanto a estafante jornada de trabalho a que ele é submetido, provocam-no a dar uma importância excessiva ao livro didático como determinante dos conteúdos que devem ser desenvolvidos em sala de aula; o currículo, que repercute diretamente na práxis do professor; tanto no currículo da escola fundamental quanto no das escolas de formação de

professores, a Geometria, em geral tem sido relegada a um plano secundário.

Assim, a partir da década de 90, influenciados pelas novas concepções a respeito da construção do conhecimento e da difusão dos trabalhos de Piaget, Vigostski e Vergnaud, surgem discussões da importância do conhecimento geométrico e busca-se o seu resgate. “a geometria é o espaço ávido... aquele espaço no qual a criança vive, respira e se move. O espaço que ela deve aprender a conhecer, explorar, conquistar e ordenar para viver, respirar e nele mover-se melhor”. (Freudenthal apud Smole, 1995, p.105).

Para Fainquelernt (1999).

O estudo da Geometria é de fundamental importância para o desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para a leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida. Essas razões são suficientes para que o ensino de Geometria no 1º grau não seja desenvolvido através de automatismo, memorização e técnicas operatórias nem baseado em um processo de formalização com crescente nível de rigor, abstração e generalização. (Fainquelernt, 1999. p.84)

Essa forma de pensar é corroborada por Hershkowitz(1994).

O ensino de Geometria parte da visão da mesma como exploração e descrição do espaço, trabalhando concretamente no espaço real e realizando diferentes atividades que desenvolvem a visualização, a intuição, a percepção e a representação, além de permitir que o aprendiz realize a passagem do espaço real para o espaço teórico chegando a visão da Geometria como uma estrutura lógica. (Hershkowitz, 1994, p. 78).

Neste sentido, na elaboração de um documento curricular, precisa - se priorizar o ensino de geometria e também investir fortemente em cursos de formação continuada para os professores, que foram fragilizados com a ausência desses conteúdos em seus cursos de graduação.

Com o avanço dessas discussões, os documentos que orientam o ensino de Matemática: Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) comprovam essa tentativa de resgate abordando a importância do ensino de geometria.

Os PCN (2001) no seu bloco Espaço e Forma enfatizam: “Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”. E em relação especial ao conteúdo geometria das transformações, foco deste estudo, os PCN ressaltam:

O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas. (Brasil, 1998, P. 124)

As Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) do Paraná cujas discussões se iniciaram em 2003, trazem a importância do estudo de geometria, “para que o aluno, se aproprie do conhecimento de forma que compreenda os conceitos e princípios matemáticos, claramente e comunique ideias reconheça suas aplicações e aborde problemas matemáticos com segurança”.

Abordar o conteúdo de geometria de forma que seu ensino tenha significado para o aluno e entre seus conceitos trazer a geometria das transformações, também é evidenciado no, Guia do

Livro Didático, documento de orientação aos professores na escolha do livro didático no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) lançado pelo MEC. Na edição de 2007, em relação as 16 obras aprovadas no PNLD/2008, afirma que:

A maioria das obras abordam o conceito de simetria. No entanto, várias limitações podem ser indicadas. Observa-se que, em muitas delas, o conteúdo de simetria está ligado a aspectos estéticos, seja da natureza; seja das artes plásticas ou da arquitetura... fala-se de, eixo de simetria, sem que fique claro que tal eixo pode existir numa representação plana do objeto. A discussão, relativa ao conceito de simetria, mostra a relevância do estudo das transformações geométricas, em especial as isometrias no plano: reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento. (Guia do Livro Didático – 2007, p. 46)

Um aspecto importante no ensino da geometria das transformações é a facilidade de relacioná-la com o cotidiano dos alunos.

Na natureza, aparentemente não há estrutura que não apresente simetria. Com exemplo; pétalas das flores, cristais dos flocos de neve, espiral dos caramujos, estrelas do mar entre outros.

Neste trabalho, optou-se pelo desenvolvimento apenas da categoria das transformações que não mudam nem a forma nem o tamanho da figura, as chamadas **Isometrias**. Entretanto, no sentido de confirmar esses conceitos, também foram desenvolvidas atividades com as transformações geométricas denominadas **Homotetias**, transformações que reduzem ou ampliam as figuras, permanecendo os ângulos congruentes.

Figuras e objetos podem passar de uma posição para outra através de movimentos, que não os deformam. Esses movimentos podem ocorrer de várias maneiras: deslizamentos, giros ou trocas. Existem três tipos de isometria: translação, reflexão e rotação.

A translação é o tipo mais simples de Isometria. Se tomarmos uma figura geométrica e a deslocarmos ao longo de uma linha reta, o movimento determina uma translação. A forma, nem o tamanho mudam, A única coisa que muda é a distância da figura em relação à sua posição original. Uma distância e uma direção definem uma translação.

A reflexão é o tipo de Isometria básico em que a transformação é reflexo da figura original sobre uma linha, que funciona como um espelho.

A rotação é a transformação que se dá quando giramos uma figura ao redor de um ponto, o giro determinará uma rotação. Na rotação de uma figura geométrica, todos os seus vértices rodam um mesmo ângulo ao redor do ponto central fixado. Tal ponto é chamado de centro de rotação.

A simetria pode-se definir em termos de isometrias. A cada tipo de isometria corresponde um tipo de simetria. Assim, podemos ter: simetria de reflexão, simetria de translação e simetria de rotação.

Na aplicação das atividades optou-se pela utilização de espelhos planos, como material concreto para desenvolver os conceitos das geometrias, visto que é um material amplamente indicado.

A utilização de espelhos para o ensino de geometria é comum, e através da imagem estudar as transformações nas figuras, nas construções dos conceitos de reflexão, translação, rotação e simetria. O uso de espelhos planos retangulares, espelhos unidos formando um diedro e os caleidoscópios, possibilitam o desenvolvimento da percepção espacial, de habilidades gráficas e da criatividade das crianças.

Recentemente os trabalhos de Almeida (2003), Martins (2003), Murari (2004), Batistela (2005), Gouvêa (2005), Reis (2006) e Santos (2006), abordam o uso de espelhos simples e do caleidoscópio em sala de aula.

Jacobs (1974), em um capítulo nomeado “Transformações”, trata de tópicos como: reflexão de um ponto e outros objetos, linhas de simetria, translações, rotações e ponto simétrico. Além de régua e compasso, para abordar o assunto reflexão de um ponto, este autor utiliza um espelho plano retangular para localizar a reflexão de pontos através de uma linha dada. No tópico dois, “Mais

sobre reflexões”, este instrumento é empregado para verificar a simetria da figura desenhada com régua e compasso, através de uma linha dada.

Entre as atividades que propõe com o uso de espelhos, estão as que exploram o conceito de translação, através de duas sucessivas reflexões paralelas. Walter (1981) afirma que, “o recurso espelho tem sido usado em muitas aulas e com o auxílio deste, podem ser feitos e comparados padrões e figuras e explorado o conceito de simetria, como por exemplo, de letras do alfabeto”. Nos trabalhos com espelhos também encontramos o uso dos caleidoscópios.

Os caleidoscópios educacionais individuais com três espelhos são conjuntos de espelhos planos articulados, dois a dois, perpendiculares a um mesmo plano, com as faces espelhadas voltadas para o interior. São utilizados para visualização de pavimentações do plano.

Para Barbosa:

Um caleidoscópio, em geral, é um conjunto de três espelhos planos perpendiculares a um mesmo plano formando um prisma triangular e com as faces espelhadas para o interior; uma das bases é fechada com papel claro, celuloide ou vegetal, para entrada da luminosidade no interior; a outra base possui um orifício para observação. (Barbosa, 1993, p. 43)

Caleidoscópio equilátero com três espelhos é construído unido-se três espelhos planos retangulares alongados, iguais, comprimento maior que a base, formando um prisma triangular tendo por base um triângulo equilátero, para proteger os espelhos enrolar o prisma em papel resistente. Em uma das bases do prisma deve-se colocar papel filme ou plástico transparente, na outra base cobrir com um triângulo de cartolina com um furo no meio. (na experiência relatada, na base superior colocou-se diferentes figuras geométricas para a observação da reflexão destas figuras).

Walter (1981) afirma que esses modelos de caleidoscópios, feitos com espelhos, são recursos excelentes para investigação, com os quais se podem fazer muitas explorações geométricas. Propõe a variação de bases, podendo-se, com isso, obter também poliedros estrelados.

No encaminhamento metodológico das atividades em sala de aula, utilizou-se a Tendência da Educação Matemática, Investigação, tendo em vista que a prática pedagógica de investigações tem sido recomendada por diversos estudiosos com forma de contribuir para uma melhor compreensão da matemática. “Na investigação matemática o aluno é chamado a agir como um matemático, não apenas porque é solicitado a propor questões, mas principalmente, porque formula conjecturas a respeito do que está investigando” ( Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003, p.20).

### **A Investigação como recurso metodológico**

Em Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 21), encontra-se um quadro que resume os quatros principais momento para a realização de uma investigação matemática.

Tabela1

#### *Momentos na realização de uma investigação*

|                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| Exploração e formulação de questões | - Reconhecer uma situação problemática<br>- Explorar a situação problemática<br>- formular questões |
| Conjecturas                         | - Organizar dados<br>- formular conjecturas<br>( e fazer afirmações sobre uma conjectura)           |
| Testes e reformulações              | - Realizar testes<br>- Refinar uma conjectura   |
| Justificação e avaliação            | - Justificar uma conjectura   |

|  |   |
|--|---|
|  | - Avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio |
|--|---|

**Notas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 21)**

Ao fazer a opção por trabalhar com a Investigação Matemática, devemos ter em mente que o papel do professor passa de expositor de conteúdo para mediador da aprendizagem e deve segundo Lorenzato (1995), ao se referir ao ensino de geometria, ter sempre presente nas aulas de geometria os seguintes questionamentos: Por que você pensa assim? Como você chegou a essa conclusão? Isso vale para outros casos? Como isso pode ser dito de outro modo? É possível representar essa situação? O que isso quer dizer? Por que você concorda? Existem outras possibilidades? O que mudou? Como isso é possível? O aluno passa a ter voz na aula de matemática, e a aprendizagem torna-se dinâmica.

Durante o trabalho investigativo, os alunos poderão seguir por caminhos através dos quais não serão bem sucedidos. Nesta situação, o professor deverá evitar dizer-lhes imediatamente que seguem um caminho infrutífero e dar algum tempo para que seja a sua própria experiência a mostrar-lhes o erro. No entanto, tem de ter cuidado para que essa exploração mal conduzida não se prolongue demasiado e não acabe por lhes provocar desmotivação. Assim, por vezes é necessário que o professor avance com pistas mais diretas para um caminho possível a seguir na exploração da tarefa, lembrando, por exemplo, situações já exploradas anteriormente e cujas estratégias poderão ser análogas às que os alunos poderão implementar. (Fonseca, Brocardo e Brunheira).

### **A experiência desenvolvida**

A seguir, encontra-se a descrição da atividade exploratória – investigativa, que foi desenvolvida em seis horas aulas, e para realização das atividades os alunos foram distribuídos em equipes com 4 alunos, facilitando assim, a participação nas discussões. Os objetivos das atividades foram:

- Desenvolver uma atividade investigativa, visando contemplar os conteúdos de geometria das transformações;
- Levar os alunos a fazer explorações, descobertas e a argumentar, identificando os tipos de isometria do plano e os elementos necessários para definir cada isometria;
- Reconhecer simetrias na natureza, em produções artísticas, peças e cerâmicas.

Os materiais utilizados no desenvolvimento das atividades foram: TV multimídia, ( tipo de TV adaptada para o uso em sala de aula, na qual há uma entrada para o uso do pen drive), assim todas as questões foram apresentadas diretas na TV, recortes em cartolinas de polígonos e figuras, folhas quadriculadas, espelhos, transferidor e compasso.

### **Atividade 1**

Usando um molde de cartolina (bonequinho) contorná-lo, marcando alguns pontos em suas extremidades, Dar uma “puxadinha” no molde e contorná-lo novamente, marcar pontos na segunda figura no mesmo local marcado na primeira, traçar segmentos de retas ligando esses pontos. Fazer o mesmo procedimento com o molde de polígono.

Questões para discussão:

Escrever o roteiro que transforma a segunda figura da primeira, explicando o que acontece com a figura;

A segunda figura em relação a primeira, tem a mesma medida, tem mesmos ângulos? Medir a distância entre os vértices correspondentes dos polígonos, registrar o que concluiu?

Em relação aos segmentos traçados, que unem os vértices correspondentes dos polígonos, se fossem prolongados que tipo de retas obteríamos?

Qual a condição necessária para que este movimento ocorra?

Discutir com os colegas de equipe, e escrever qual movimento estas figuras realizaram.

### **Atividade 2**

Dados o molde de quatro figuras ( polígonos irregulares) os alunos construirão em cartolinas, em cada uma delas, há indicação do local em que deve ser feito um orifício.(fazer um orifício em um dos ângulos internos).

Traçar um círculo de 5 cm de raio, e fixando um alfinete no orifício indicado da figura e no centro do círculo, a figura será girada, no sentido horário, contorná-las com um lápis, a fim de obtê-las em diferentes posições ao longo de toda a volta em torno do centro do círculo, a fim de que: (fazer uma estimativa antes de iniciar a atividade)

- a) a figura 1 seja desenhada 5 vezes ao todo;
- b) a figura 2 seja desenhada 6 vezes ao todo;
- c) a figura 3 seja desenhada 8 vezes ao todo;
- d) quantas vezes é possível desenhar a figura 4.

Descrever o que observou. O movimento da atividade 2 foi o mesmo da primeira? As figuras tiveram suas medidas alteradas? Discutir esse movimento das figuras.

Escrever qual a condição necessária para que este movimento ocorra?

Discutir com todos da turma o conceito de rotação.

### **Atividade 3**

Dado uma cópia da Figura modelo (apêndice C) e um espelho plano simples; colocar o espelhos em determinado lugar na figura A, a fim de obter as demais figuras (a, b, c, d, e, f, g, h) encontrar qual delas não é possível construir.

Descrever o processo usado na construção das figuras;

Descobrir o “segredo” para a construção das figuras?

Escrever o que concluiu em relação a figura que não é possível construir;

Discutir o conceito de simetria, eixo de simetria figuras simétricas e reflexão.

Quando o professor apresenta atividades que desafiam os alunos, os mesmos sentem-se estimulados, em encontrar as respostas, fazendo explorações e descobertas na busca das respostas.

Para aprofundar o conceito de simetria e contextualizar o seu conceito com o cotidiano do aluno, na sequência utilizamos a TV multimídia, para a apresentação de vídeos que mostram a simetria na natureza.

### **Atividade 4**

Construção da “toalhinha de renda”. Em uma folha de papel quadrada, dobrar várias vezes marcando bem as dobras, fazer vários recortes nas laterais do papel dobrado, abrir o papel, verificar os desenhos formados, marcar as linhas de dobras – eixos de simetrias, marcar pontos simétricos no desenho, ligar esse pontos com um segmento de reta, escolher uma das figuras formadas, colocar a “toalhinha” sobre uma folha de papel e desenhar em todas as posições que ela aparece. Escrever o que observa:

Verificar qual o tipo de isometria ocorreu na figura.

Descrever a relação entre o segmento marcado e o eixo de simetria?

Descrever o que se conclui em relação à distância desses pontos ao eixo de simetria?

Indicar quais são as condições para que dois pontos sejam simétricos em relação a uma reta.

A atividade realizada “toalhinha de renda” é comum em brincadeiras infantis, na apresentação de atividades, conhecidas pelos alunos, facilita a construção de conceitos.

### Atividade 5

Colocar o espelho articulado duplo, sobre o transferidor e posicionar o objeto (vela, lápis colorido) em frente aos espelhos, observar e descrever o que verifica quando o ângulo entre os espelhos for: 30°, 0°, 90°, 120°, 180°. Fazer o mesmo procedimento colocando sob os espelhos um pedaço de papel colorido, em seguida, completar a tabela:

| Ângulo (n) | Nº de imagem | $N = \frac{360}{n} - 1$ | Polígono obtido no papel colorido |
|------------|--------------|-------------------------|-----------------------------------|
| 180°       |              |                         |                                   |
| 120°       |              |                         |                                   |
| 90°        |              |                         |                                   |
| 60°        |              |                         |                                   |
| 30°        |              |                         |                                   |

Após completar o quadro discuta com os colegas de equipe e escreva:

O ângulo de abertura interfere na reflexão?

Quando diminuimos o ângulo, o que acontece com o número de imagem?.

Desenhe os polígonos que aparecem no segundo momento.

### Atividade 6

Esta atividade foi elaborada visando, diferenciar as isometrias de homotetia (semelhança).

Ampliando figuras; Construir um triângulo qualquer, ABC, a partir de um ponto fixo, externo ao triângulo, traçar três retas que partam deste ponto e passam pelos vértices do triângulo, com o compasso, usando uma abertura qualquer, (medida de ampliação do Triângulo) marcar em cada reta, a partir dos vértices A, B e C, esta medida, determinando os pontos A', B', e C'. ligar os pontos determinando o triângulo A'B'C', que foi obtido por meio de uma transformação do triângulo ABC.

Discutir com os colegas e escrever:

Que tipo de transformação realizamos? Trata-se de uma isometria, ou seja conservou as medidas dos segmentos e dos ângulos?

Discutir o conceito de semelhança – homotetias.

O objetivo da elaboração desta atividade foi mostrar aos alunos a existência de outras transformações, além das isometrias e o resultado foi positivo, no sentido que, durante a construção da figura os alunos reconheceram como não sendo uma isometria, indagando

“professora o triângulo A'B'C' é maior, então não é iso = igual”, (aluno 1ª série), demonstrando a compreensão do conceito de isometria.

### Atividade 7

Construção do caleidoscópio: Iniciamos a atividade, construindo o caleidoscópio, utilizando três espelhos retangulares de medidas (30cm por 5cm).

Verificar a formação de imagens a partir da colocação de papeis coloridos picados dentro do mesmo.

Construir em uma folha de papel um triângulo equilátero (lado 5cm) e no seu interior desenhar um mosaico qualquer, colocar na base do caleidoscópio para a verificação das imagens formadas. Desenhar a figura formada.

Construir um triângulo retângulo de ângulos  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ , em dois lados do triângulo marcar um ponto e unir este ponto ao vértice oposto ao lado que pertence. Colorir cada parte com as cores (amarelo, azul, verde e vermelho). Colocar no fundo do caleidoscópio e verificar a figura formada. Posicionar o triângulo de modo que a figura formada seja a figura modelo. (apêndice C). Construir, juntando 24 triângulos a figura modelo. (apêndice C).

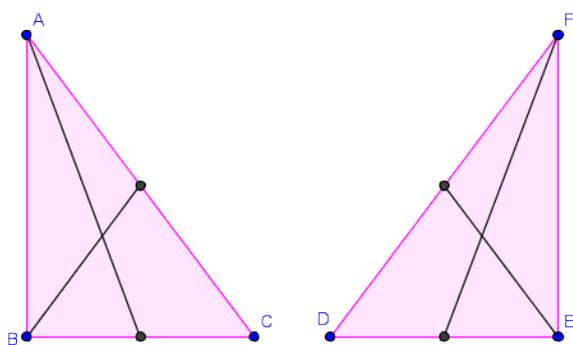


Figura 1. Modelo de triângulo para a construção do simulador de caleidoscópio.

Fonte: próprio autor

A apresentação desta atividade no site, <http://www.educ.fe.pt/icm99> na sua construção é utilizado o recurso da geometria dinâmica, no entanto, como o objetivo do estudo envolvia trabalhar a construção de polígonos, realizamos a atividade manualmente desenhando os triângulos utilizando régua e compasso e transferidor.

### **Atividade 8**

Construindo o caleidociclo Nesta atividade fizemos a opção de não construir o caleidociclo, utilizando um modelo pronto. ( modelo adaptado de Ingo Valter Schneider, caleidociclos de M. C. Escher, RPM, número 8, SBM, 1986). (Apêndice A)

Pintar o caleidociclo, utilizando o conceito de simetria, construir e observar simetria da figura formada com os movimentos.

A avaliação das atividades em sala de aula, foi realizada durante o processo, a participação, discussão e envolvimento nas atividades, no entanto, para uma verificação mais efetiva dos conceitos adquiridos, desenvolvemos um jogo de tabuleiro em que os comandos do jogo são dados a partir dos conceitos de isometrias.

### **Atividade de Avaliação**

Jogo das Isometrias ( <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm12/introducao.htm>)

Este jogo é para uma aula após o trabalho com as isometrias no plano.

A turma divide-se em grupos de quatro alunos;

O material necessário para cada grupo: uma tabela (Apêndice B); quatro peças de plástico de cores diferentes ou tampas de refrigerantes e sobre elas coladas uma flecha como a do tabuleiro, uma para cada jogador; cartas de cartolinas com as instruções. (Apêndice E)

Regras do jogo:

- 1 - Os grupos escolhem à sorte o primeiro jogador. O jogo segue pela direita.
- 2 - As cartas, depois de baralhadas, são colocadas em um monte e viradas para baixo.
- 3 - Cada jogador coloca sua peça num canto do tabuleiro.
- 4 - Cada jogador, na sua vez, retira uma carta do monte.
- 5 - Considera-se a distância da translação uma casa e admitem-se as direções horizontal e vertical. A rotação é sempre de  $90^\circ$ , para a direita ou para a esquerda, e o centro de rotação é o lado do quadrado. Considera-se como eixo de reflexão qualquer um dos lados do quadrado.
- 6 - A peça do jogo só pode ser deslocada se, segundo a instrução da carta, a sua posição coincidir com a da casa onde vai parar.
- 7 - Nas casas em branco a peça pode ser colocada em qualquer posição.
- 8 - Vence o jogador que chegar primeiro ao canto oposto.

### Análise dos dados

Os dados obtidos com a aplicação das atividades revelam que, apesar de os alunos terem estudados os conceitos básicos de geometria, ainda apresentam idéias espontâneas sobre estes conteúdos, nas definições iniciais muitos colocaram que translação e rotação, não eram conceitos matemáticos e sim geográficos, referindo-se aos movimentos da Terra. Refletimos que, talvez isso se deva ao fato de que o ensino não lhes tenha propiciado as atividades necessárias para a compreensão destes conceitos. A dificuldade dos alunos em definir conceitos geométricos é bastante compreensível, uma vez que esses conceitos estão ausentes do contexto das sala de aula. Como ressalta Lorenzato (2005):

O ensino de geometria, se comparado com o ensino de outras partes da Matemática tem sido o mais desvairador; alunos e professores, autores de livros didáticos, educadores e pesquisadores, de tempos em tempos, têm se deparado com modismos fortemente radicalizantes... No Brasil, já fomos mais além: a geometria esta ausente ou quase ausente da sala de aula.

O desenvolvimento da atividade 2, caracterizou-se um desafio, pois os alunos, não estão acostumados a fazer estimativas, iniciavam os desenhos sem verificar a possibilidade de completá-los, após várias tentativas, entre erros e acertos, foi percebido a necessidade de dividir o círculo antes de iniciar os desenhos, chegando a conclusão que para rotacionar uma figura é necessário além de um ponto fixo, um ângulo de rotação. Por meio desta atividade, percebeu-se também, a fragilidade dos alunos em relação aos conceitos básicos de geometria e também na utilização de materiais, como régua, compasso e transferidor. Com a realização da atividade foram abordados os conteúdos, divisão da circunferência em partes iguais, ângulos, arcos e polígonos inscritos. Sobre essa questão Ponte Brocado e Oliveira (2003) observa: "Na investigação matemática o aluno formula conjecturas, realiza testes, reformula e reafirma uma conjectura, o aluno é chamado a agir como um matemático".

Após a conclusão das atividades, os termos, translação, reflexão e rotação, já eram identificados também como movimentos que as figuras geométricas realizam no plano. E no desenvolvimento do jogo não tiveram dificuldade em realizar os comandos utilizando os conceitos de isometrias.

Superar um ensino baseado apenas em desenvolver habilidades como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização e listas de exercícios, é nosso desafio como professores, assim trazer para as aulas atividades que levem os alunos a refletirem e se posicionarem frente a questões que sejam significativas para o aluno, bem como, a utilização de materiais didáticos facilita e potencializa a construção do conhecimento.

### Considerações

Fazer do ensino de matemática um momento de construção e investigação, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, o envolvimento do aluno ativo é uma condição fundamental para a aprendizagem.

Durante a realização das atividades, percebeu-se o envolvimento dos alunos, mas, ficou claro a defasagem na aprendizagem em relação aos conceitos básicos em geometria, e também a falta de hábito dele próprio construir os conceitos, não recebendo tudo pronto do professor.

Com relação aos conceitos trabalhados notou-se, que houve compreensão, pois

Também durante a realização do jogo, pode-se verificar, a interação entre os alunos, quando um aluno apresentava dúvidas, todos participavam das argumentações em relação ao conceito pedido ( carta do jogo, as peças se movimentavam seguindo o conceito de rotação, translação e reflexão). É na interação que o pensamento geométrico ocorre e se fortalece.

Pelos comentários dos alunos, percebeu-se que eles gostaram da maneira que foi desenvolvido o ensino.

”Se todos os professores dessem aulas interessantes assim, aprenderíamos muito mais”.  
(aluno 1ª série).

quando os alunos participam ativamente das atividades o aproveitamento é positivo.

Assim o uso de atividades investigativas na construção de conceitos em sala de aula, pode garantir a aprendizagem, desde que, o professor assuma uma postura de orientador e faça um papel de mediador entre os alunos, no compartilhar dos resultados e na significação das conclusões obtidas pelas equipes.

Outros estudos que possam complementar esta atividade serão necessários. O passo seguinte será desenvolver esta atividade junto aos professores da rede estadual, em forma de oficina, para uma discussão e reflexão da viabilidade da elaboração de um caderno pedagógico, que possa auxiliá-los no desenvolvimento do tema.

### **Bibliografia e referências**

- Barbosa, R. M. (1993). Novo processo para o padrão de polígonos regulares de configuração (3,4,6,4) no caleidoscópio equilátero. In: Encontro Paulista de Educação Matemática, 3.. Bauru, Brasil: Anais: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p.71.
- Biembengut, M. S. e Silva, V. C. da. (1995). Ornamentos Versus Criatividade: Uma alternativa para Ensinar Geometria Plana e Simetria. In: A Educação Matemática em Revista – SBEM – nº 4 .
- Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacional: matemática: (20001). MEC/SEF..
- Fainguelernt, E. K. (1999). Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre, Brasil: Artmed.
- Fiorentini, D. (1990). Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino de Matemática no Brasil. In Revista Zetetiké. Campinas SP, Brasil: Editora da Unicamp. Ano 3. nº 4.
- Lorenzato, S. (1995). Por que Não Ensinar Geometria? In: Educação Matemática em Revista. Blumenau: Publicação SBEM, n. 4, p. 3-13,
- Micotti, M.C.O. (1999). O ensino e as propostas pedagógicas. In: Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. [org.] Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, p.153-167.
- Miorim, M. A. (1995). O ensino de matemática: evolução e modernização. Campinas, 218 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.
- Murari, C..(1995). Brincando, Colorindo e Aprendendo com o Caleidoscópio Equilátero em pavimentações de Configuração (3,3,3,3,3,3). in A Educação Matemática em Revista – SBEM – nº 4.
- Murari, C.; Perez, G. (1999). A geometria na ótica do caleidoscópio. Revista da Educação Matemática, São

Paulo, Brasil: n. 5.

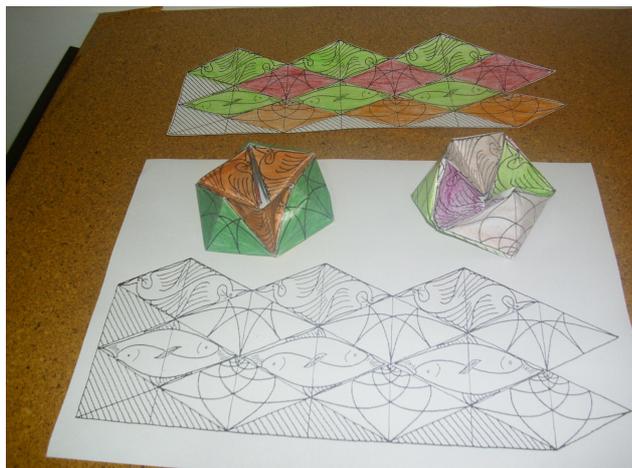
Paraná. Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática. (2008). Curitiba, Brasil: SEED.

Ponte, J. P. da; Brocardo, J.; Oliveira, H. (2003) . Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

WALTER, M. (1972). An example of informal geometry: mirror cards. **Readings in geometry from the Arithmetic Teacher**. 2. ed. Washington: National Council of Teachers of Mathematics.

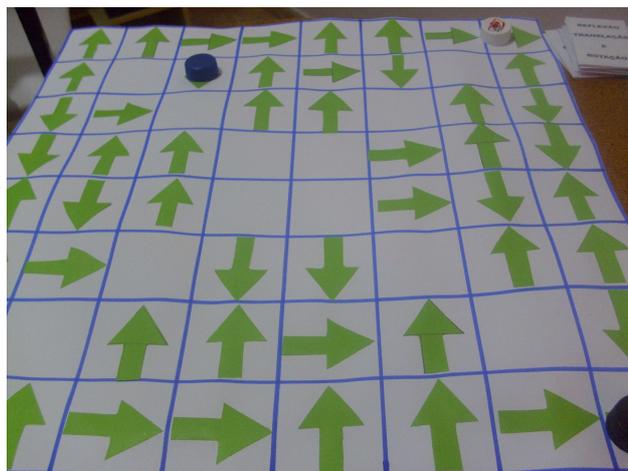
WALTER, M. (1981). One mirror, two mirrors.... **Mathematics teaching**, Derby, n. 96, p. 54-56, sept.

### Apêndice A



Caleidociclo - atividade 8

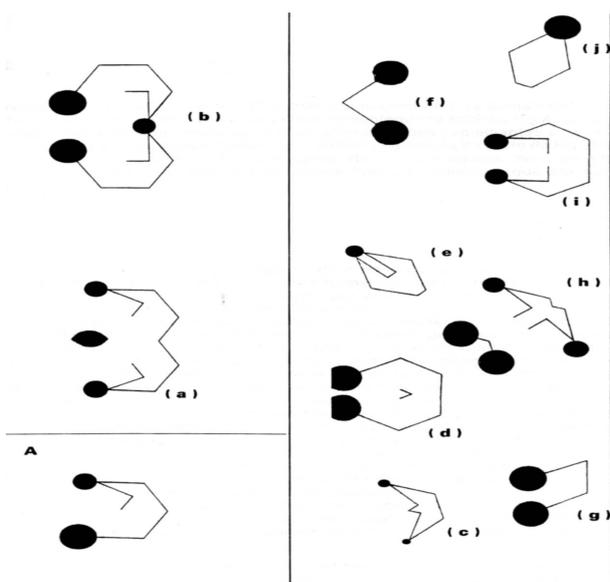
### Apêndice B



Tabuleiro do jogo - avaliação das atividades

### Apêndice C

Figura utilizada na 3ª atividade.

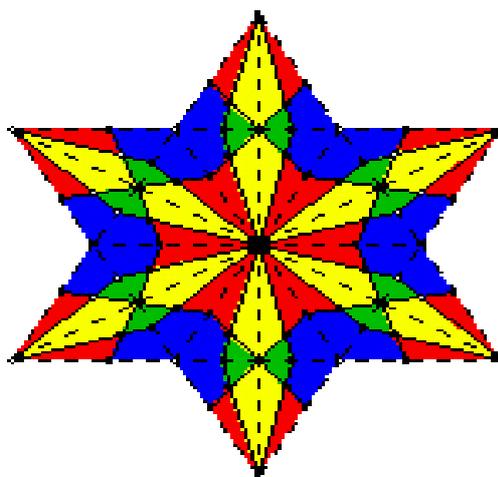


Fonte: Beatriz Alvarenga Álvares

(O deslumbramento da luz e ilusões visuais )

### Apêndice D

Figura - simulador de caleidoscópio



Fonte - imagem disponível em

<http://www.educ.fe.pt/icm99> acesso em ( 06/2010)