



APLICANDO O SOFTWARE GRAPHMATICA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE 1º E 2º GRAUS

Rodolfo Gregório de **Moraes**

Fundação Educacional de Duque de Caxias (FEUDUC), Universidade Severino Sombra (USS)
rgregoriom@uol.com.br

Brasil

Jonas da Conceição **Ricardo**

Fundação Educacional de Duque de Caxias (FEUDUC), Universidade Severino Sombra (USS)
Brasil

ricmatica@yahoo.com.br

Jamerson Rogério da Silva **Milheiro**

Fundação Educacional de Duque de Caxias (FEUDUC)
Brasil

jamersonrogerio@hotmail.com

Carlos Vitor de Alencar **Carvalho**

Universidade Severino Sombra (USS), Centro Universitário de Volta Redonda (UniFOA),
Instituto Superior de Tecnologia (FAETEC/IST)

Brasil

cvitore@gmail.com

Resumo

Este trabalho relata uma experiência da utilização do *software Graphmatica* para a resolução de equações e sistemas de equações de 1º e 2º Graus com duas variáveis reais realizada em Vassouras/RJ – Brasil, em 2010. O estudo do tema com professores que atuam nos mais diversos níveis de ensino, através da intermediação com o *software*, mostrando na prática uma utilização do mesmo, fazendo uma reflexão sobre a utilização de aplicativos, nesse caso representados pelo *Graphmatica*, possuem em sua maioria, uma limitação de cálculo que desafia a interpretação comparativa entre o cálculo elaborado no papel e o efetuado pelo *software*. A sociedade do conhecimento requer, cada vez mais, profissionais críticos que saibam, não somente fazer determinada atividade, mas, sobretudo, interpretá-la corretamente. Cabe aos professores além da auto-avaliação sobre sua prática, uma orientação correta aos alunos sobre essa característica cada vez mais exigida num profissional em nossa sociedade atual.

Palavras-Chave: tecnologias aplicadas ao ensino da matemática, capacitação docente, equações, sistemas com duas variáveis, *software graphmatica*.

1 – Introdução

A álgebra moderna é uma evolução que se deu desde a Antiguidade. Datam a aproximadamente, 1650 a.C. os primeiros registros algébricos, no Papiro de Rhind, onde a incógnita era chamada de “aha” (BOYER, 1996, pg 11). Tanto no Egito Antigo como na Mesopotâmia a álgebra era retórica com a utilização da argumentação e palavras para expor as idéias do problema a ser solucionado. A utilização de uma notação mais formal se deve principalmente ao francês François Viète um dos precursores da notação algébrica que hoje usamos.

Um dos mais comuns problemas algébricos é a solução de equações de variados tipos, e dentre as equações, as mais freqüentes em problemas cotidianos estão as equações polinomiais de 1º e 2º graus.

No ensino de matemática atual, a álgebra é orientada a ser trabalhada a partir do 6º ano do Ensino Fundamental, conforme citado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, página 50).

Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe. (regras para resolução) de uma equação.

Esse processo de compreensão da linguagem algébrica simbólica é quase como alfabetizá-lo na linguagem Matemática (PUC, 2007) e, essa preocupação durante a vida dos professores e na formação dos licenciandos em Matemática implica em diversos fatores, desde o embasamento matemático em relação aos conceitos e termos envolvidos, e questões de ordem pedagógica.

Alinhado a esta realidade, como pensar a sociedade urbana atual sem uma crescente influência das tecnologias de informação e comunicação (TIC), em especial a inserção dos computadores em diversas práticas cotidianas. No meio educacional as revoluções tecnológicas também geram conseqüências nas relações entre os diversos atores envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem.

Apesar de ter iniciado na década de 70 (VALENTE, 1996, página 18), a utilização da informática para fins educacionais, ainda hoje percebemos existem resistências quanto sua aplicação, ora por desconhecimento sobre o que se trata essa utilização, ora por um receio de uma possível substituição do profissional pela máquina.

O professor do futuro deve saber lidar com a tecnologia, essa não pode ser encarada como concorrência, mas como aliada a sua prática. Toda a utilização de tecnologia aplicada ao ensino deve ser baseada na opção pedagógica selecionada pelo professor. Assim além de saber usar um recurso tecnológico o professor deverá ser capaz de avaliar o potencial pedagógico deste recurso, de acordo com a sua própria concepção pedagógica.

Este trabalho é o relato de um mini-curso ministrado em Vassouras/RJ, durante um Encontro de Matemática, onde usamos o *software Graphmatica* como alternativa metodológica para o ensino de equações e sistemas de equações de 1º e 2º graus.

2 – A Proposta de Aplicação

O ensino de equações começa desde o ensino fundamental, inicialmente com símbolos pictográficos para posteriormente introduzir as letras como incógnitas, e geralmente através de um apelo a intuitividade, ou seja, sem um método de resolução formal. No decorrer do ensino fundamental o aluno verá também o estudo com um maior rigor e aplicações de métodos de solução de equações de 1º e 2º graus, e sistemas de equações de 1º e 2º graus. No caso de sistemas de equações, embora o tema possibilite uma interpretação através de um plano cartesiano, usualmente, temos a predominância da aplicação de resoluções algébricas, como o Método da Adição e da Substituição.

Durante o ensino médio, quando da abordagem de Sistemas lineares, mesmo quando o aluno já estudou funções, o tema, em geral, é trabalhado de forma puramente algébrica.

O que pretendemos é usar a informática como um “complicador” do sistema de ensino, conforme citado por Prado (2000, página 27), não no sentido pejorativo mas, usar o computador na Educação de forma a repensar o processo educativo. Mostrar uma forma de utilizar o *software* para a construção de representações geométricas de conceitos matemáticos tidos pelos alunos como puramente algébricos.

De forma alguma buscamos abolir a interpretação e resolução algébrica, mas somar uma perspectiva geométrica, alinhado com as teorias de múltiplas representações de Duval (Duval apud Lucas, 2009) e dos campos conceituais de Vergnaud (Vergnaud apud Fainguelernt, 1999) que ressaltam a importância da multiplicidade de representações do mesmo conceito matemático, de forma a obter uma aprendizagem significativa deste, um exemplo disto é a aprendizagem do conceito de função em suas mais variadas formas de representação, como linguagem natural, expressão analítica, tabular, gráfica, diagramas.

O que abordarmos nas atividades foram as visualizações geométricas das possíveis soluções e comparando com as respostas algébricas obtida pelo *software Graphmatica* e pelo cálculo manual.

O *software Graphmatica* (Hertzer, 2010) é um *software* de livre uso, usado geralmente para plotar funções e expressões algébricas que comporta gráficos cartesianos, polares, trigonométricos, diferenciáveis, permitindo calcular derivadas, integrais, mínimos, máximos, zeros, intervalos, possibilitando a cópia dos gráficos em diversos formatos para serem utilizados em outros aplicativos. A proposta destas atividades desenvolvidas é que os alunos juntamente com o professor possam experimentar a visualização geométrica de algumas funções, e solucionar equações e sistemas lineares diretamente no aplicativo, analisando criticamente o resultado obtido, de acordo com as especificidades do *software Graphmatica*.

O primeiro passo para trabalharmos com um *software* educacional, é a adaptação com as ferramentas utilitárias deste. A Figura 1, mostra a tela inicial do *software* (versão 2.0 em Inglês), com as principais ferramentas, linha de edição, e área de desenho. Podemos alterar a área de desenho para que não possua a aparência de quadriculado, retirando a grade através do Menu *Options, Graph Paper*. Abaixo são mostradas as atividades para uma introdução a manipulação do *software*.

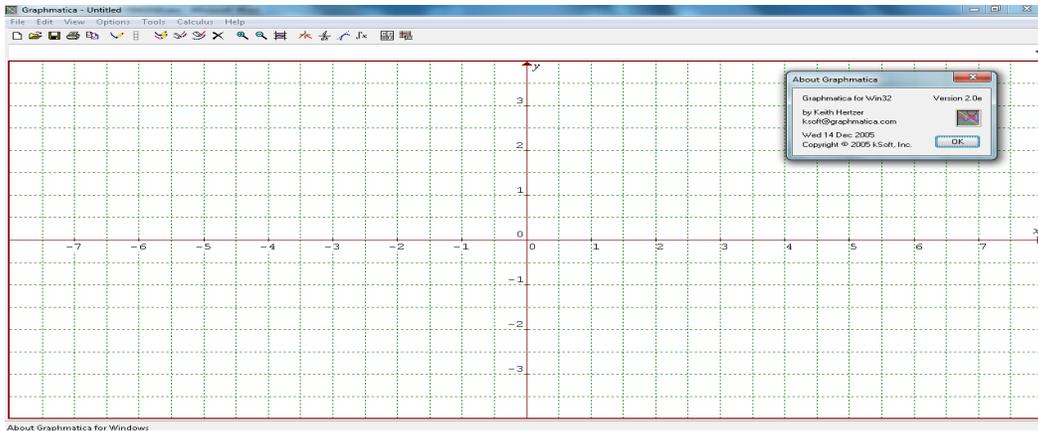


Figura 1 – Tela Inicial do *software Graphmatica*

Atividade 1

Construindo uma reta horizontal. Se pensarmos em geometria analítica, a forma geral é da forma $y=K$, onde K é um número real qualquer.

Atividade 2

Construindo uma reta vertical. De forma análoga a atividade anterior, em geometria analítica, a forma geral é da forma $x=K$, onde K é um número real qualquer.

Estas duas atividades iniciais são consideradas simples, o *software* possui outras ferramentas, que combinadas com estas permitem construções cada vez mais complexas.

Atividade 3

Construindo uma reta qualquer. De forma análoga a atividade anterior, em geometria analítica, a forma geral é da forma $ax+by=c$, onde a , b e c são números reais quaisquer.

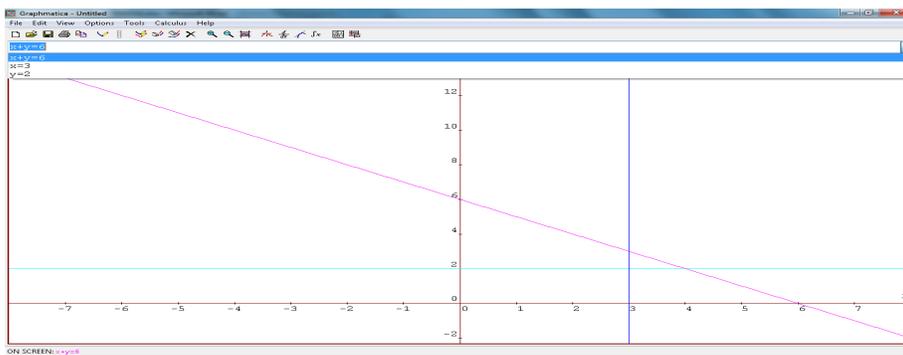


Figura 2 – Exemplo da Reta $x+y=6$ gerada no *software Graphmatica*

A partir dessas atividades podemos perceber além do funcionamento do *software*, em sua função elementar, mas ter uma idéia sobre o objetivo central deste artigo, que é o estudo de equações e sistemas de equações em sua forma de representação geométrica.

Como consideramos anteriormente não vamos abolir a solução algébrica tradicional, contudo vamos analisar uma solução desses dois tipos de equações através do *software Graphmatica*.

As equações de 1º e 2º grau possuem uma forma geral bastante abordada nos livros didáticos:

Forma geral da equação de 1º Grau

$$ax + b = 0, \text{ com } \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R} \\ a \neq 0 \end{matrix}$$

Resolvendo algebricamente encontramos uma solução $x = \frac{-b}{a}$

Forma geral da equação de 2º Grau

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } \begin{matrix} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a \neq 0 \end{matrix}$$

Resolvendo algebricamente encontramos até duas soluções reais:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Este número de soluções dependerá do valor do discriminante. Assim, temos três casos a considerar

$$i) \Delta > 0$$

$$ii) \Delta = 0$$

$$iii) \Delta < 0$$

O caso (i) vai admitir duas raízes reais distintas, o (ii) duas raízes reais iguais e o caso (iii) não possui raízes reais.

A solução através do *software Graphmatica* foi trabalhada de duas formas distintas, a primeira é inserindo a equação que desejamos resolver diretamente na linha de edição obtendo retas verticais e a segunda é através da ferramenta que permite encontrar a interseção entre dois objetos gráficos plotados. A solução de uma equação então será dada pela interseção desta (expressa na forma de função) com o eixo X, que pode ser representado pela forma $y=0$.

Abaixo mostramos exemplos dessa aplicação.

1) Como encontrar a solução da equação de 1º Grau : $3x-7=0$ usando o *Graphmatica*.

Da primeira forma basta inserir a equação na linha de edição e irá gerar a reta onde $x=2,3333$, conforme a figura 3

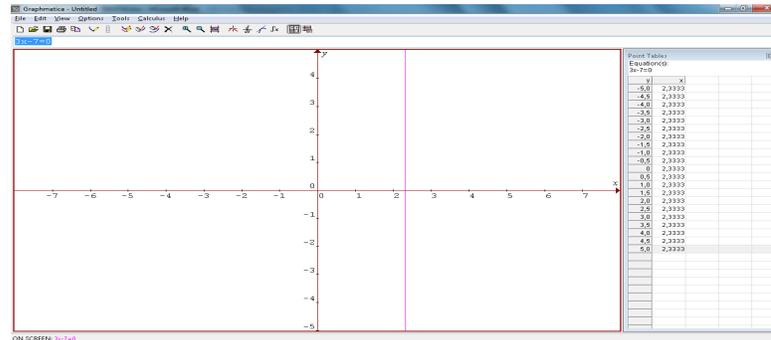


Figura 3 – Encontrando a solução da equação $3x-7$ no *Graphmatica*, da forma direta.

Da segunda forma, primeiro devemos inserir o eixo X, para isso digitamos na linha de edição.

$$y=0$$

Depois inserimos a equação (na forma de função)

$$y=3x-7$$

Agora, basta seleccionar a ferramenta (Tools), encontrar interseção (Find Intersection), seleccionar estas equações e calcular, obtendo o resultado: $x=2,3333$ e $y=0$, conforme a figura 4.

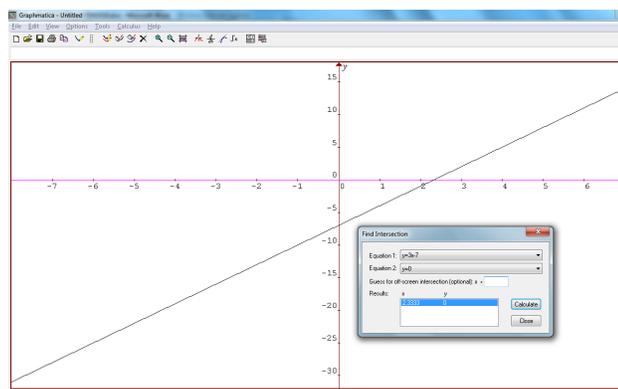


Figura 4 – Encontrando a solução da equação $3x-7$ no *Graphmatica*, através da interseção.

2) Como encontrar a solução da equação de 2º Grau : $2x^2 - 6x + 4 = 0$ usando o *Graphmatica*.

Analogamente a equação do 1º Grau, da primeira forma basta inserir a equação na linha de edição e irá gerar as duas retas: $x=2,0$ e $x=1,0$, conforme a figura 5

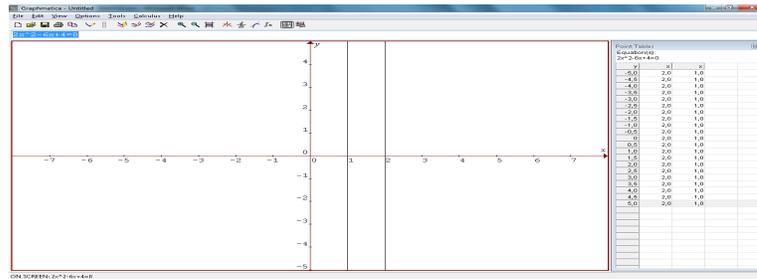


Figura 5 – Encontrando a solução da equação $2x^2 - 6x + 4 = 0$ no *Graphmatica*

Da segunda forma, novamente temos que inserir o eixo X, para isso digitamos na linha de edição.

$$y=0$$

Depois inserimos a equação (na forma de função)

$$y = 2x^2 - 6x + 4$$

Agora, basta seleccionar a ferramenta (Tools), encontrar interseção (Find Intersection), seleccionar estas equações e calcular, obtendo os resultados, conforme a figura 6:

$$x=2,0 \text{ e } y=0$$

$$x=3,0 \text{ e } y=0$$

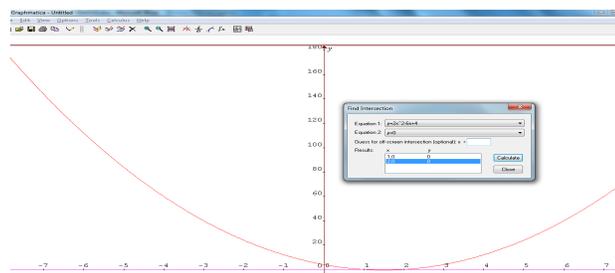


Figura 6 – Encontrando a solução da equação $2x^2 - 6x + 4 = 0$ no *Graphmatica*

Da mesma forma, os sistemas de equações de 1º e 2º grau de duas equações com duas variáveis de uma forma geral e, lembramos que algebricamente temos alguns métodos tradicionais para resolvê-los, como Método da Adição, Método da Substituição, Escalonamento, Determinantes, dependendo do nível de ensino e da característica do problema envolvido.

Forma geral de um sistema de duas equações de primeiro grau com duas variáveis

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, i=1,2$$

Forma geral de um sistema de duas equações de segundo grau com duas variáveis¹

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x^2 + b_1x + c_1y^2 + d_1y = e_1 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2y^2 + d_2y = e_2 \end{array} \right\}, a_i, b_i, c_i, d_i, e_i \in \mathbb{R}, i=1,2$$

Vamos tentar representar os sistemas de equações de 1º e 2º grau de duas equações com duas variáveis de uma forma geral e, lembramos que algebricamente temos alguns métodos tradicionais para resolvê-los, como Método da Adição, Método da Substituição, Escalonamento, Determinantes, dependendo do nível de ensino e da característica do problema envolvido. Nesse artigo não vamos nos deter em exemplificar os métodos algébricos de solucionar um sistema de equações, mas vamos ver que a segunda forma que usamos para resolver as equações, ou seja, através da interseção entre duas representações gráficas pode ser usado para analisar as possíveis soluções de um sistema de equações.

Vamos dar alguns exemplos aplicados diretamente no *software Graphmatica*.

1) Encontrando a solução do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 5 \\ -6x - 4y = 3 \end{array} \right\}$$

Inserindo as duas equações do sistema e usando a ferramenta do aplicativo, encontrar interseção, verificamos que a solução é $x=-2,9$ e $y=-3,6$, que é o ponto de encontro entre as retas, conforme a figura 7.

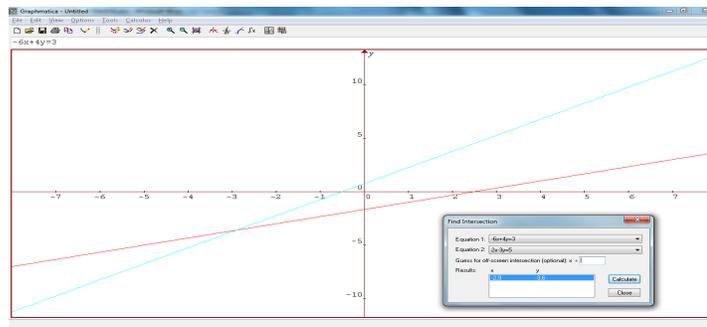


Figura 7 – Encontrando a solução do sistema (1) no *Graphmatica*

2) Encontrando a solução do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 7 \\ -6x^2 + 3x - 2y = 5 \end{array} \right\}$$

Inserindo as duas equações do sistema e usando a ferramenta do aplicativo, encontrar interseção verificamos que as soluções são: $(x_1=-1,1442 ; y_1=-8,1442)$ e $(x_2=1,3109 ; y_2=-5,6891)$, que são o ponto de encontro entre as representações gráficas das equações, conforme a figura 8.

¹ Neste trabalho consideramos somente os sistemas com duas variáveis da forma expressa no texto, ou seja, formamos pela aglutinação de dois polinômios de 2º grau, cada um em uma variável distinta.

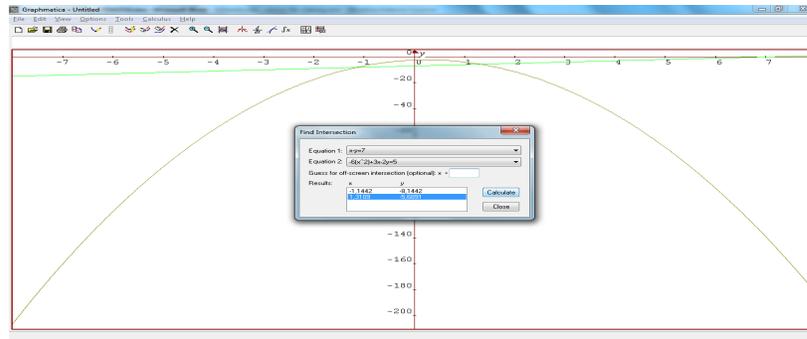


Figura 8 – Encontrando a solução do sistema (2) no *Graphmatica*

3 – Analisando a priori dos resultados obtidos nos exemplos

A informática é muito útil para o ensino de matemática e *softwares* como o *Graphmatica* são ferramentas de grande valia para o professor, contudo, qualquer utilização de tecnologias requer uma análise crítica dos resultados obtidos, devido a restrições inerentes à ferramenta utilizada.

Como não impomos restrições aos coeficientes das equações em sua forma geral, temos que analisar como o *Graphmatica* interpreta números reais.

Os números reais são arredondados em uma determinada casa decimal, considerando uma expansão decimal, podendo ser configurado no *software* de 2 a 8 casas decimais. Assim analisando a solução do exemplo (1) da Seção 4, ou seja, $3x-7=0$, cuja solução algébrica é $x=7/3$ e comparando com o resultado obtido no aplicativo $x=2,3333$, temos que, matematicamente o resultado exibido no aplicativo pode ser considerado não exato, pois o número $7/3$ gera uma dízima periódica, contudo se pensarmos numa aplicação real, e a necessidade de considerarmos uma quantidade limitada de casas decimais (nesse caso 4 casas decimais), o resultado obtido pelo *software Graphmatica* é válido.

4 – Análise da experiência

Nossa aplicação foi efetuada em Novembro de 2010, durante um encontro de Matemática, na cidade de Vassouras/RJ – Brasil, contando com 20 participantes. Destes participantes 80% eram alunos de graduação, e 10% alunos de mestrado em matemática.

Pesquisamos sobre a atuação como professores de matemática, nos diversos níveis de ensino, obtendo que 40% já atuaram ou atuam, distribuídos conforme o gráfico abaixo (figura 9).

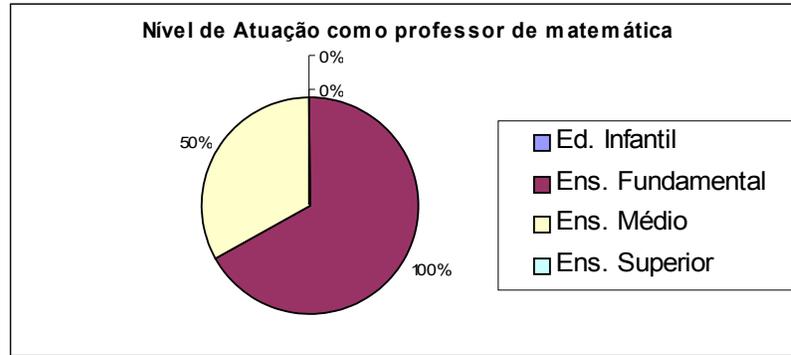


Figura 9 – Gráfico da distribuição do nível de ensino de atuação

A maior parte dos participantes (90%) não conhecia anteriormente o *software Graphmatica*, ainda assim não tiveram grandes problemas para desenvolver as atividades propostas.

Pedimos ainda uma avaliação das atividades propostas, em níveis de gradação, conforme a figura 10.



Figura 10 – Gráfico da avaliação das atividades desenvolvidas

O mais importante é que todos os participantes responderam que sua perspectiva em relação ao estudo do tema proposto melhorou após o minicurso.

Este trabalho apresentou algumas possibilidades de exploração do *software Graphmatica* para apoio ao ensino de equações com uma incógnita e sistemas de equações com duas variáveis reais, de 1º e 2º graus. Acreditamos que este conteúdo possa ser utilizado com turmas no Ensino Médio e com alunos de cursos de Graduação.

Ressaltamos que embora tenhamos abordado o estudo de equações polinomiais de 1º e 2º graus, o aplicativo permite a utilização para equações polinomiais de grau maiores do que 2, exponenciais, logarítmicas, modulares e trigonométricas

Esperamos com este trabalho incentivar a professores e estudantes de matemática, que nunca tiveram contato com a utilização de tecnologias aplicadas ao ensino que repensem sua própria formação e o perfil do futuro profissional de educação.

Bibliografia e referências

Boyer, Carl F.(1996) História da Matemática. 2ª Edição. Editora Edgard Blucher, São Paulo.

Brasil, MEC.(1998) SEF. Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental. Brasília.

Fainguelernt, Estela Kaufman. (1999) Educação Matemática: Representação e construção em geometria. Porto Alegre. Artmed.

Hertzer, Keith – About *Graphmatica*. Disponível em <<http://www.graphmatica.com/>> Acesso em 09 de Outubro de 2010.

Lucas, Anderson Barros. (2009) Equações e funções: Descontinuidades conceituais. São Paulo, Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Prado, Maria Elisabete Brisola Brito. (2000) O Uso do computador na formação do professor: Um enfoque reflexivo da prática pedagógica. Brasília, MEC.

Pontifícia Universidade Católica - PUC, (2007) Apostila II – Matemática – Capacitação de Professores dos Cursos Pré-Vestibulares Comunitários.

Valente, José Armando, et all. (1996) O computador na sociedade do conhecimento, SEED/MEC, Brasília.