Probabilidade na Educação Básica com o AVALE: Sequência de ensino Passeios Aleatórios da Carlinha

Irene Mauricio **Cazorla**
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
icazorla@uol.com.br
Claudia Borim da **Silva**
Universidade São Judas Tadeu
Brasil
dasilvm@uol.com.br

Resumo

Esta oficina tem como objetivo apresentar uma atividade didática para o ensino de Probabilidade na Educação Básica, denominada os "Passeios Aleatórios da Carlinha - PAC", que permite trabalhar as noções elementares da teoria de probabilidades: eventos, espaço amostral, probabilidade de eventos simples; construir tabelas simples e gráficos de barras; discutir as diferenças entre experimento determinístico e aleatório; estimar probabilidades por meio da frequência relativa; calcular a probabilidade teórica a partir da árvore de possibilidades e, analisar padrões observados e esperados. Essa atividade será apresentada tanto no ambiente papel e lápis, como no Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico – AVALE[1]. Essa atividade vem sendo divulgada por meio de oficinas no ambiente escolar, tanto com professores, quanto com alunos; sendo que vários professores já estão utilizando-a na sua prática de ensino.

Palavras chave: Ensino de Probabilidade, experimento aleatório e determinístico, árvore de possibilidades, medidas de probabilidade.

Introdução

De acordo com Coutinho (2001), Batanero e Godino (2002) a construção dos conceitos probabilísticos deve ser feita a partir da compreensão de suas três noções básicas: percepção do acaso, ideia de experiência aleatória e noção de probabilidade. Dessa forma Lopes (2003) e Kataoka, Rodrigues e Oliveira (2007), afirmam que é desejável que o professor aborde tais conceitos por meio de atividades em que os alunos possam realizar experimentos e observar os

[1] O AVALE (http://avale.uesc.br) é um ambiente virtual que disponibiliza de forma gratuita sequências de ensino de Estatística e Probabilidades.

eventos, promovendo a manifestação intuitiva do acaso e da incerteza, construindo, a partir desses resultados, métodos matemáticos para o estudo de tais fenômenos.

Diante dessas recomendações, foi escolhida para a presente oficina a atividade didática para o ensino de probabilidade, denominada "Passeios aleatórios da Carlinha". Essa atividade tem como objetivos: introduzir noções elementares da teoria de probabilidades: eventos, espaço amostral, probabilidade de eventos simples; construir tabelas simples e gráficos de barras; discutir as diferenças entre experimento determinístico e aleatório; estimar probabilidades por meio da freqüência relativa; calcular a probabilidade teórica a partir da árvore de possibilidades e analisar padrões observados e esperados.

Esta atividade foi adaptada por Cazorla e Santana (2006) para o seu ensino na escola básica, a partir do trabalho de Fernandez e Fernandez (1999), que o propuseram para ensinar a distribuição Binomial para alunos do Ensino Superior. Nesses dois trabalhos os personagens utilizados na atividade são os da Turma da Mônica, sendo denominada como Passeios Aleatórios da Mônica. Mas, para esta oficina, utilizaremos no ambiente papel e lápis a versão com a Mônica e para o ambiente virtual do AVALE a turma da Carlinha[2] (CAZORLA, KATAOKA e NAGAMINE, 2010).

No ambiente papel e lápis essa atividade é dividida em quatro sessões com 19 questões. Em cada sessão, as questões devem ser respondidas baseadas numa ação solicitada. Na primeira sessão os alunos devem ler a seguinte estória:

A Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. A distância da casa da Mônica para a casa de Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu é de quatro quarteirões, conforme a Figura 1. A Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu. Para tornar mais emocionantes os encontros, a turma combinou que o acaso escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, Mônica deve jogar uma moeda; se sair cara (C), andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Cada jogada representa um quarteirão de percurso. Mônica deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos.

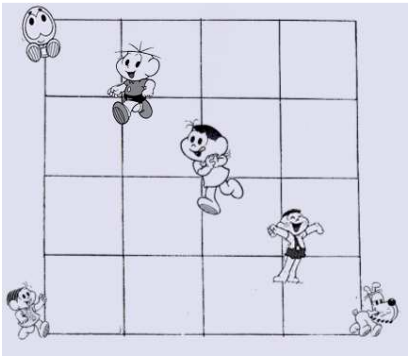


Figura 1. Mapa dos Passeios aleatórios da Mônica

Após ler a estória, sem ainda lançar a moeda, os alunos devem responder as perguntas solicitadas nessa sessão. Na segunda sessão, os alunos replicam 30 vezes o experimento aleatório e estimam probabilidades utilizando a frequência relativa; na terceira sessão eles constroem a árvore de possibilidades e calculam a probabilidade teórica e, na quarta sessão, comparam as estimativas provenientes da experimentação aleatória, com a probabilidade teórica proveniente da árvore de possibilidades.

No AVALE, é possível potencializar a análise dos resultados realizando diferentes tipos de comparação entre duplas, entre as probabilidades: teórica e frequentista, bem como

[2] A analogia da turma da Mônica para a turma da Carlinha é: Mônica – Carlinha; Horácio – Luiz; Cebolinha – Felipe; Magali – Fernanda; Cascão – Alex e Bidu – Paula.

executando uma simulação computacional com a replicação do experimento em até 12.000 vezes. A simulação é importante para que o aluno observe o fenômeno da convergência, e possa compreender a aproximação da frequência relativa para a probabilidade teórica.

Nesse contexto, o objetivo desta oficina é apresentar essa atividade para o ensino de Probabilidade que já vem sendo aplicada no ambiente escolar, tanto com professores, quanto com alunos e utilizada na prática de ensino de vários professores.

Apresentação da atividade – Ambiente papel e lápis

Aspectos gerais

Esta atividade apresenta de forma lúdica e contextualizada um experimento aleatório que propicia o surgimento dos conceitos básicos de Probabilidade. Recomenda-se que os alunos trabalhem em duplas e que o professor avalie a possibilidade de implementar todas as etapas da atividade, tendo em vista que algumas requerem conhecimentos prévios que os alunos poderão não ter vivenciado.

Existem duas formas de aplicar essa atividade. A primeira, o professor vai entregando cada sessão separadamente e deixa que os alunos respondam sem nenhuma interferência do mesmo. Nesta modalidade, ao final da atividade o professor, deve promover uma discussão coletiva dos resultados, institucionalizando os conceitos envolvidos. Na segunda, o professor entrega as sessões, deixa que os alunos se manifestem coletivamente a cada questão e logo em seguida faz as intervenções necessárias, institucionalizando os conceitos. A escolha pela modalidade vai depender do nível de conhecimentos prévios dos alunos.

Tempo estimado e materiais

Esta atividade pode ser desenvolvida em quatro sessões, em três encontros de duas horas. No primeiro encontro sugerimos trabalhar sessões I e II; no segundo, as sessões III e IV e, no terceiro encontro, no laboratório de Informática utilizando o AVALE. Apesar de sabermos que inúmeros fatores podem influenciar no tempo de execução esta estimativa pode servir como uma referência inicial.

Os materiais necessários são: cartaz exemplificando o desenvolvimento da atividade (Figura 1); moedas; uma folha de papel transparência (Apêndice), com a malha pronta para o desenho dos gráficos de barras; canetas coloridas para papel transparência (marcador para CD). Professor, entregue ao aluno as instruções, o cartaz, os questionamentos e a transparência. Você pode desenhar o cartaz (Figura 1) no quadro negro (lousa), colocando ao lado as instruções.

Descrição da atividade

Sessão I. A estória (o contexto)

Lendo apenas a estória, sem jogar a moeda, responda:

1) Qual é a diferença entre a forma antiga da Mônica visitar seus amigos e a nova forma?

2) Quais são os possíveis resultados ao lançar uma moeda: _____

3) Qual é a chance de sair cara: _____ e de sair coroa: _____
   Por que vocês acham isso: _____

4) Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?
   ( ) Não. Quais são as chances: _____

( ) Sim. Qual é a chance: _____
Por que vocês acham isso: _____

Nessa última questão o objetivo é identificar se o aluno percebe que as chances de visita de cada um dos amigos são diferentes antes mesmo da experimentação, ou da árvore de possibilidades; isto é, o quanto a idéia de equiprobabilidade está arraigada em suas concepções.

A nossa experiência em sala de aula mostra que a maioria dos alunos responde que sim, utilizando como argumento que a probabilidade de sair cara é a mesma de sair coroa, ou porque a quantidade de quarteirões é a mesma, ou, ainda, porque cada amigo teria 1/5 de chance de ser visitado. Em geral, os alunos não levam em consideração a localização dos amigos.

Aqui podemos discutir, também, a "qualidade" da moeda, ou seja, se ela fosse "honesta" ou "não-viciada", então o valor ½ é correto para representar a probabilidade dos dois eventos. Esclarecer que uma moeda é honesta se sua massa for distribuída uniformemente em todo seu formato, já uma moeda viciada seria aquela em cuja confecção teria um peso maior em uma de suas faces, aumentando a probabilidade de sair o lado oposto em detrimento do lado carregado.

Caso exista "desconfiança" de que a moeda não seja honesta, a única forma de testar sua "honestidade" seria jogar a moeda um grande número de vezes (experimentação aleatória) e estimar essas probabilidades por meio da frequência relativa, chamada de probabilidade frequentista. Nesse sentido, espera-se que com um número muito grande (tendendo ao infinito) de repetições do experimento, a frequência relativa se estabilize em torno do valor da probabilidade teórica.

Sessão II: a experimentação aleatória

Para Mônica visitar um amigo, vocês (cada dupla de alunos) têm que lançar a moeda quatro vezes, que denominamos de experimento. Se sair cara (C), Mônica andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Você e seu/sua colega devem repetir esse experimento 32 vezes e anotar os resultados no Quadro 1. Por exemplo, se sair a sequência: cara, cara, coroa, cara, anotar na coluna sequência: CCXC e, na coluna do amigo visitado: Cebolinha[3].

5) Quem tem mais chance de ser visitado(a) Magali ou Horácio?_____
   Por que? _____

6) Existe a chance da Mônica não visitar algum amigo? ( ) Não ( ) Sim
   Por que? _____

7) Após a experimentação responda: Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?
   ( ) Não, porque: _____
   ( ) Sim, porque: _____

8) Sistematizem os resultados do Quadro 1 na Tabela 1, chamada de Tabela de Distribuição de Freqüência – TDF.

[3] Nesta oficina, para otimização do tempo, serão utilizadas experimentações aleatórias já realizadas por alunos.

Quadro 1. Registro dos resultados da experimentação aleatória

Repetição	Sequência	Amigo visitado
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		
13.		
14.		
15.		
16		

Repetição	Sequência	Amigo visitado
17.		
18.		
19.		
20.		
21.		
22.		
23.		
24.		
25.		
26.		
27.		
28.		
29.		
30.		
31.		
32.		

Tabela 1.
Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica

Amigo	Nº de vezes que foi visitado (f)	Frequência relativa (h)	Porcentagem (h%)
Horácio			
Cebolinha			
Magali			
Cascão			
Bidu			
Total	32	1,00	100,00

Em que h = f/32, que representa uma estimativa da probabilidade

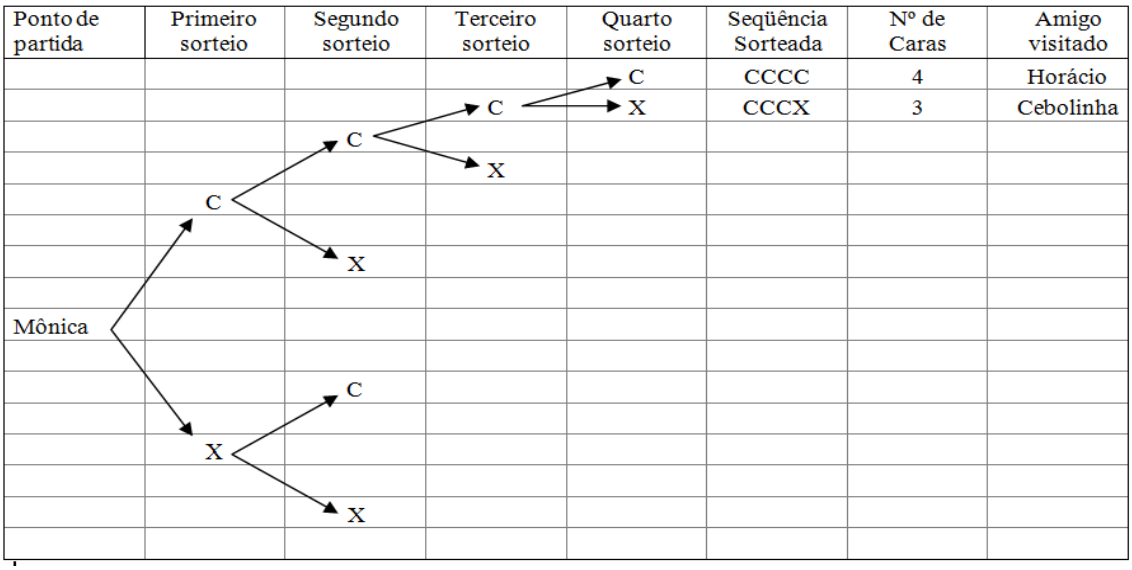
9) Vocês estão recebendo um papel de transparência com duas grades para construir gráficos, bem como canetas de transparência. Na grade de cima representem os dados da frequência relativa (h), constante da Tabela 1. Comparem seus resultados com os dos seus colegas. Esses são iguais? ( )Sim ( ) Não.
O que vocês acham disso?_____
_____

Nessa fase os alunos devem perceber que cada dupla poderá apresentar um resultado diferente. Você pode aproveitar para discutir o conceito de amostragem, uma vez que estes resultados são frutos de um experimento, de uma amostra.

Em seguida você pode questionar, se existe uma outra forma de determinar o número de vezes que cada amigo será visitado. Sendo essa então a próxima etapa da atividade: a construção da árvore de possibilidade.

Sessão III. A modelagem matemática (a árvore de possibilidades)

Sem jogar a moeda, completem a árvore de possibilidades, indicando a sequência sorteada, o número de caras e o amigo visitado. Observe que cada ramo se desdobra em dois novos ramos (um para cara e outro para coroa) a cada sorteio:



10) Quantos caminhos existem ao todo? _____

11) Descubram, se existe, uma relação comum a todos os caminhos que levam a cada um dos amigos:
Horácio _____
Cebolinha _____
Magali _____
Cascão _____
Bidu _____

12) Após a construção da árvore de possibilidades, responda: Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?
( ) Não, porque: _____
( ) Sim, porque: _____

13) Sistematizando os resultados da árvore de possibilidades, preencham a Tabela 2.

Tabela 2
Distribuição de probabilidade da visita da Mônica a seus amigos

Amigo	Nº de caminhos	Nº de caminhos/total de caminhos (fração)	Probabilidade (p)*
Horácio			
Cebolinha			
Magali			
Cascão			
Bidu			
Total			

(*) efetuar a divisão para expressar na forma decimal.

14) Na transparência, na grade de baixo, representem os dados da probabilidade (p) constante na Tabela 2. Comparem seus resultados com os dos seus colegas.
Esses são iguais? ( )Sim ( )Não. O que vocês podem concluir? _____
_____

Nessa sessão você pode discutir com os alunos em que momento da atividade eles mudaram de opinião, no que diz respeito a questão se todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados. As nossas experiências em sala de aula têm mostrado que a maioria deles responde que sim no início, mudando de opinião ou após a realização da experimentação aleatória ou após análise da árvore de possibilidades.

Sessão IV: comparando as duas formas de atribuir probabilidades

15) Preencham a Tabela 3 com os resultados da Tabela 1 e 2:

Tabela 3
Quadro comparativo da atribuição de probabilidades

Amigo	Frequência relativa (hi)	Probabilidade (pi)
Horácio		
Cebolinha		
Magali		
Cascão		
Bidu		
TOTAL		

16) Qual é a diferença entre essas duas formas de atribuir probabilidades: _____

17) Analisando os resultados, para vocês, qual dessas duas maneiras de atribuir probabilidades é mais adequada? ( ) frequentista ( ) árvore de possibilidades, por que?
_____

18) Vocês acham justa a NOVA distribuição de probabilidades da visita da Mônica entre os amigos? ( ) Sim ( ) Não, por que? _____

19) Caso vocês achem injusta essa distribuição? Vocês poderiam indicar outra forma de sortear o amigo a ser visitados pela Mônica? _____

No caso dessa última questão caso, pode-se explorar a **distribuição uniforme**, onde cada amigo vai ter a mesma probabilidade de ser escolhido: ao invés de sortear o caminho a ser percorrido, sorteia-se diretamente o amigo a ser visitado. Para isso, cada criança deve anotar o nome dos cinco amigos em papeizinhos do mesmo tamanho, dobrar, colocar numa sacola, chacoalhar e escolher o amigo a ser visitado pela Mônica.

Nesta forma de escolher aleatoriamente o amigo a ser visitado, cada um tem a mesma probabilidade de ser escolhido e é igual a 1/5, ou 20% das vezes. Pode-se fazer um experimento e comparar novamente os valores observados com os valores esperados, o que se deixa como sugestão para o professor desenvolver em sala de aula.

Deve-se observar ainda que, embora a probabilidade do amigo ser visitado seja igual, é diferente do critério adotado deterministicamente que também divide o número de visitas entre os cinco amigos. A diferença do critério aleatório para o determinístico é que no aleatório não se

sabe *a priori* quem será visitado naquele dia, enquanto que no determinístico, sim. Além disso, o número de visitas que cada amigo vai receber não necessariamente vai ser um quinto das vezes, vai depender dos sorteios, apenas pode-se esperar que todos sejam igualmente visitados.

Apresentação da atividade – AVALE

Aspectos gerais

Após a realização da atividade no ambiente papel e lápis, os alunos podem potencializar a análise dos resultados no AVALE (http://avale.uesc.br), sendo necessário um laboratório de informática com acesso a Internet, e um tempo estimado de 2 horas.

1ª Etapa – Cadastro do aluno

Cada dupla de alunos deve cadastrar um login e uma senha, e em seguida acessar a atividade com essas informações (Figura 2).

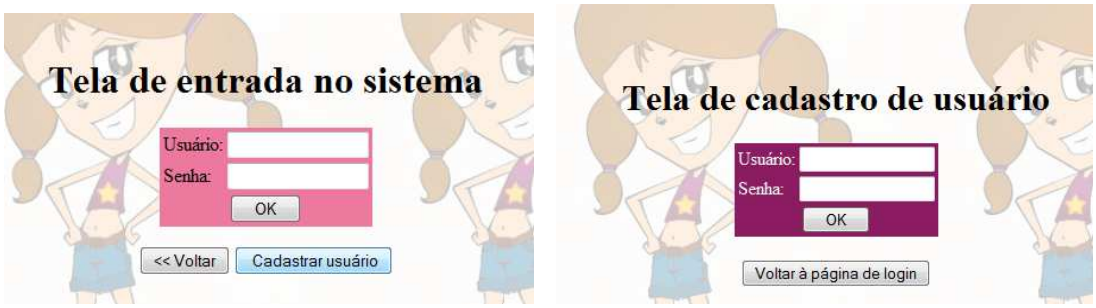


Figura 2. Telas de cadastro do usuário e entrada.

2ª Etapa – Geração do banco de dados

Os resultados da experimentação aleatória devem ser cadastrados e enviados no próprio sistema. Em seguida a dupla poderá acessar o banco de dados da turma completa, já que a geração ocorrerá em tempo real (Figura 3).

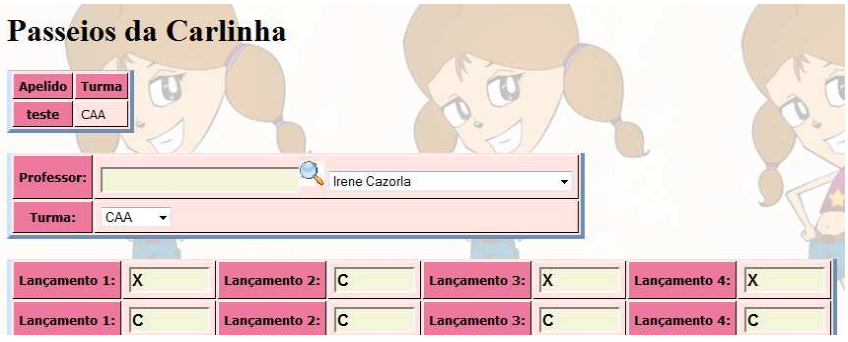


Figura 3. Fragmento da tela de entrada dos dados.

3ª Etapa – Análise dos resultados

Diferentes resultados podem ser gerados no AVALE, a saber: TDF por dupla e para a turma completo; gráficos de barras comparando os resultados de duas duplas; tabelas e gráficos de barras comparando a frequência relativa com a probabilidade teórica, tanto por dupla, como para a turma completa, bem como para as simulações (Figura 4).

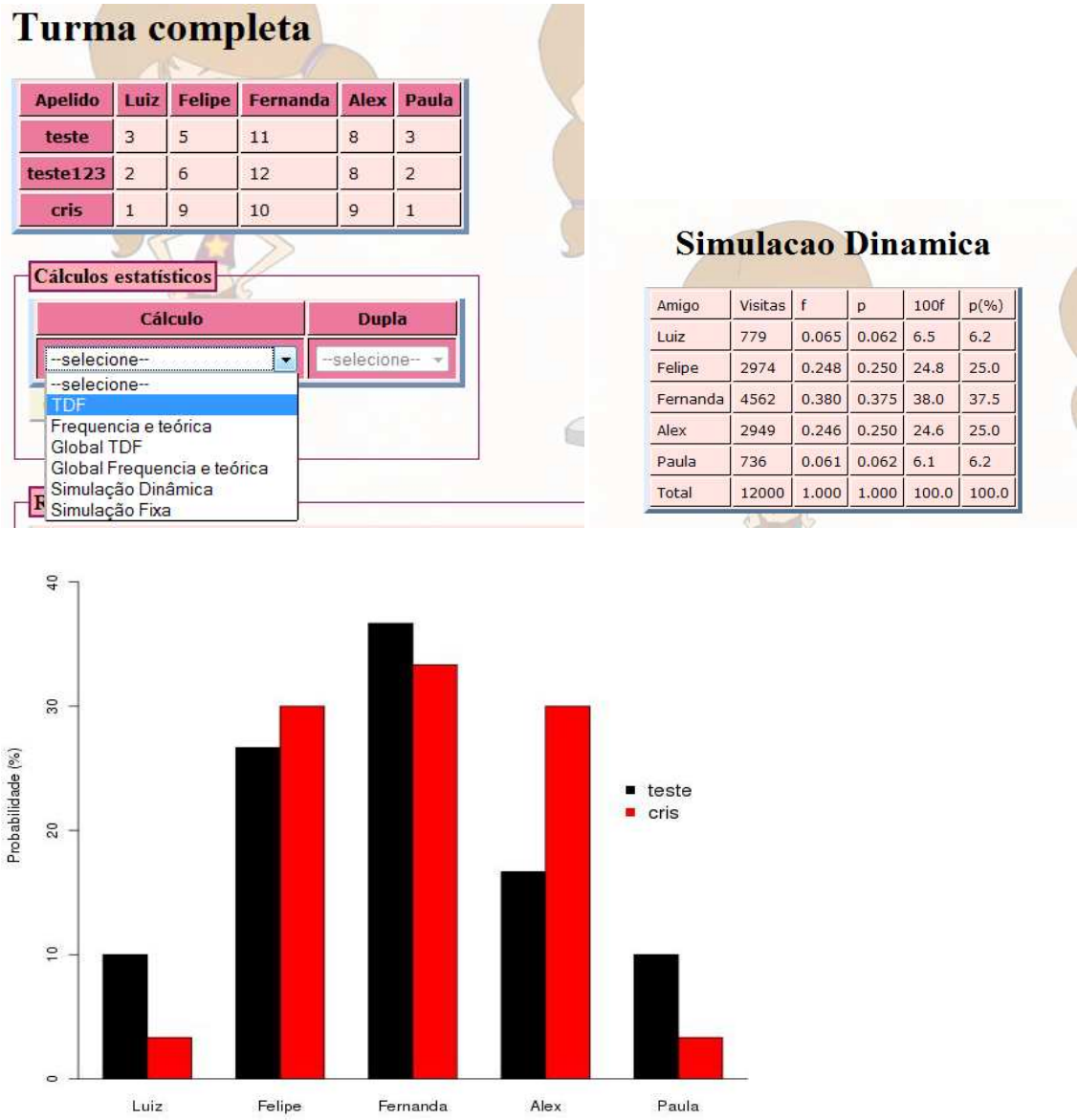


Figura 4. Exemplos de tabela e gráficos gerados

Considerações gerais

As discussões feitas no ambiente papel e lápis devem ser retomadas também no ambiente virtual, reforçando principalmente a importância dos resultados obtidos via simulação computacional.

Os resultados das aplicações mostram que os alunos ficam altamente motivados e descontraídos durante a execução do experimento, gostam de trabalhar com a probabilidade expressa em forma de porcentagem, sentem dificuldade de construir os gráficos mesmo utilizando a malha pronta; mas, mesmo assim, todos conseguem cumprir e perceber a importância de alguns conceitos de Probabilidade; o que reforça a viabilidade da utilização da mesma na escola básica, e a importância do professor discutir os conceitos envolvidos.

Bibliografia e referências

BATANERO, C. e GODINO, J. *Estadística y su didáctica para maestro*s: Proyecto Edumat maestros. Granada: Universidad de Granada, 2002.

CAZORLA, I. e SANTANA, E. *Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio*. Itabuna, BA: Via Litterarum, 2006.

CAZORLA, I.; KATAOKA, V. Y. e NAGAMINE, C. M. L. *Os passeios aleatórios da Carlinha. Tutorial do AVALE*. Disponível em http://avale.uesc.br.

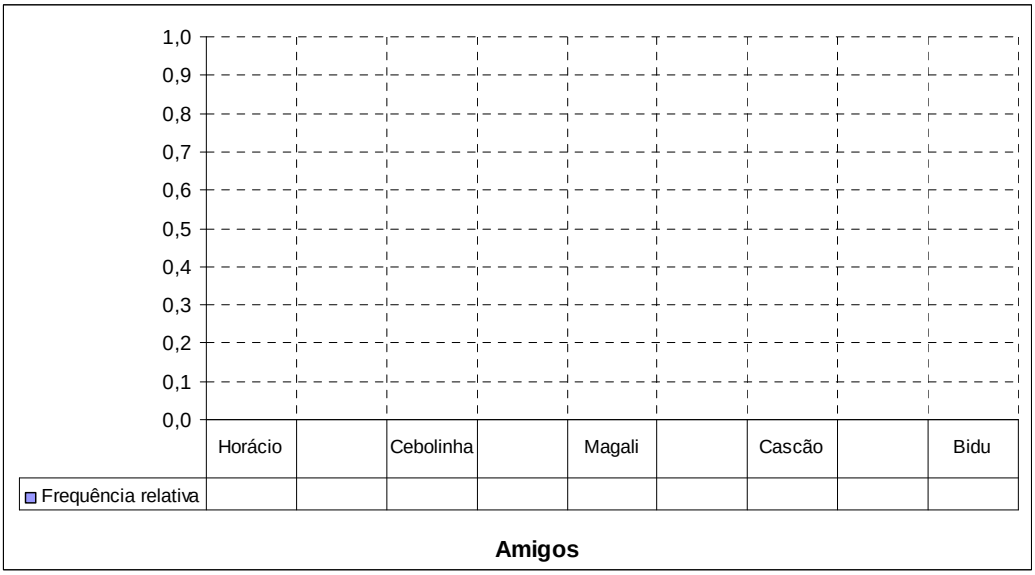
COUTINHO, C. *Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*. Tese de Doutorado. Univ. J. Fourier, Grenoble, France, 2001.

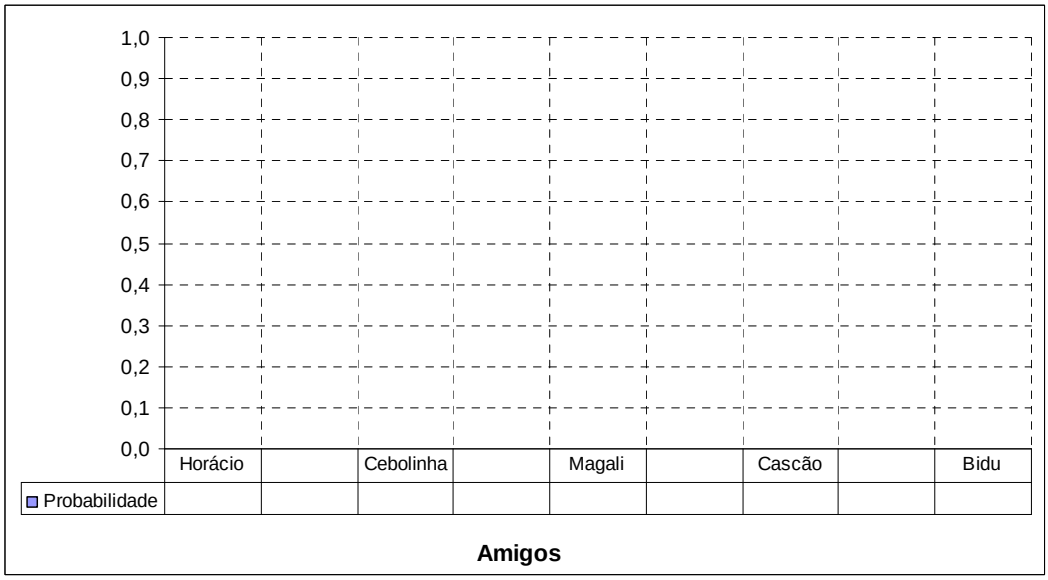
FERNANDEZ, D. e FERNANDEZ, D. X. O prazer de aprender probabilidade através de jogos: descobrindo a distribuição Binomial. *Anais da Conferencia Internacional "Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística – Desafios para o Século XXI*. Florianópolis, SC, 1999.

KATAOKA, V., RODRIGUES, A. e OLIVEIRA, M. Utilização do conceito de Probabilidade Geométrica como recurso didático no ensino de Estatística. *Proc. IX Encontro Nacional de Educação Matemática*, Belo Horizonte, MG, 2007.

LOPES, C. *O Conhecimento Profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil.* Tese de Doutorado: Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil. 2003.

Anexo A


1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
Horácio
Cebolinha
Magali
Cascão
Bidu
Frequência relativa
Amigos


1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
Horácio
Cebolinha
Magali
Cascão
Bidu
Probabilidade
Amigos

Anexo B

• Informação geral sobre a oficina

Título da oficina	**Probabilidade na Educação Básica com o AVALE: Sequência de ensino Passeios Aleatórios da Carlinha**
Nome dos autores	Irene Mauricio **Cazorla**. icazorla@uol.com.br Claudia Borim da **Silva**. dasilvm@uol.com.br
Instituições dos autores	Universidade Estadual de Santa Cruz
País	Brasil
Número de horas mais convenientes	2 horas
Nível de escolarização	Ensino Fundamental, Ensino Médio, Ensino Superior
Número máximo de pessoas	20
Equipamentos audiovisuais	Datashow e Laboratório de informática com conexão à internet (caso haja disponibilidade)