Verificação de igualdades algébricas por meio de mudanças de quadros no ensino fundamental

Adriano da Fonseca **Melo**
SEMED, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Brasil
adriano060569@brturbo.com.br
José Luiz Magalhães de **Freitas**
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Brasil
joseluizufms2@gmail.com

Resumo

O presente artigo é parte da dissertação que objetivou estudar procedimentos de verificação de igualdades algébricas utilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Municipal de Ensino, ao realizar cálculos algébricos utilizando os quadros aritmético, algébrico e geométrico. No desenvolvimento da pesquisa nos apoiamos na Teoria das Situações didáticas proposta por Brousseau, na Teoria dos jogos de quadros proposta por Douady e no trabalho de Margolinas, concernente ao processo de verificação. Para o desenvolvimento da parte experimental nos inspiramos na metodologia da Engenharia Didática proposta por Artigue. Foi possível identificar duas categorias, com base no uso dos quadros, tanto no sentido de mudança como no sentido de interações de quadros. Foi observado que os alunos tiveram dificuldades com atividades que exigem compreensão de cálculos algébricos, bem como a mudança e/ou interação entre os quadros para realizarem a verificação.

Palavras-chave: expressões algébricas, jogos de quadros, verificação, ensino fundamental, validação.

Considerações Iniciais

No trabalho de sala de aula, segundo a perspectiva clássica, o aluno normalmente permanece na dependência do professor para realizar a correção de suas atividades (Camargo, 1999), cabendo a este indicar o que está correto e o que está errado. No caso de uma resolução estar errada, o aluno normalmente fica aguardando que o professor ou outro aluno vá ao quadro e mostre como deve ser feito para chegar ao resultado correto. Esta postura dá a impressão de que o aprender sobre seus erros ou sobre os conceitos matemáticos pode ser algo quase mágico (Salino, 1976 apud Margolinas, 1993, p. 185), como se a confrontação de trabalhos de outros alunos com o intuito de levá-lo a corrigir seu erro produzisse novos procedimentos. Tal fato pode contribuir para a dependência do aluno em relação ao professor, pois, neste caso, ele não consegue identificar seus próprios erros e por meio deles procurar caminhos que lhe permitamm chegar ao resultado esperado.

A prática docente e o espírito de investigador nos levaram a questionar o fato dos alunos do ensino fundamental encontrarem dificuldades em desenvolverem a autonomia para analisar, e com isso utilizarem conhecimentos aprendidos para validarem suas respostas. Desse modo, ainda pudemos observar que muitos alunos, mesmo após a apresentação de conceitos algébricos, não conseguiam utilizá-los em um contexto diferente daquele apresentado. Tal preocupação crescia frente aos relatos de alguns professores, que indicavam a falta de visão ampla dos alunos em relação aos conhecimentos matemáticos.

Os PCNs de Matemática (BRASIL, 1998) defendem que o aluno precisa argumentar, elaborar conjecturas, ler e interpretar situações, de tal forma que consiga desenvolver a capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a autoestima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções. Diante destas propostas, fizemos o seguinte questionamento: até que ponto os alunos conseguiriam utilizar os conhecimentos matemáticos para realizarem verificações e/ou elaborarem argumentações sobre suas formulações?

Em nosso trabalho, o interesse estava nos traços matemáticos que possibilitam a formação do pensamento algébrico[1], mais especificamente na busca dos alunos em verificar a validade de resultados por eles obtidos ou apresentados a eles. Dessa forma, definimos como objetivo principal desta pesquisa, o estudo dos procedimentos de verificação de igualdades de expressões algébricas utilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, ao realizarem cálculo algébrico utilizando os quadros aritmético, algébrico e geométrico.

Do referencial teórico e do metodológico

No que concerne à fundamentação teórica da pesquisa nos inspiramos na Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau. Segundo essa teoria, o professor deve propor atividades ao aluno visando que ele assuma a responsabilidade pela resolução. Ao Transferir a responsabilidade pela determinação dos processos a serem realizados para os alunos, o professor se encontra em um paradoxo entre ser o responsável em garantir que o aluno compreenda para utilizar o conhecimento visado na resolução de situações futuras ou dizer ao aluno como deve ser feito para resolver determinado problema. O ato pelo qual o professor leva o aluno a aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência, Brousseau chamou de devolução.

Nesse contexto, a atividade deve possibilitar ao aluno iniciar a resolução, porém os conhecimentos que ele possui são insuficientes para chegar à solução, sendo necessário buscar novos. A busca de uma solução conduz o aluno a vivenciar momentos que Brousseau

[1] De acordo com Lins e Gimenez (2006, p. 151) o pensamento algébrico consiste em compreender a álgebra como um sistema de relações, que produz significados para situações em termos de números e operações aritméticas e com base nisso transformar as expressões obtidas.

caracterizou como situações adidáticas. As situações adidáticas se caracterizam pela interação do aluno com o meio. O meio, por sua vez, se comporta como antagonista para as tomadas de decisões do aluno, o que deve conduzir a constituição de novos conhecimentos para que possa comunicar suas ideias e estratégias de resolução. Brousseau classificou o agir do aluno no processo de aprendizagem, em três dialéticas: ação, formulação e validação, que ocorrem simultaneamente.

A primeira dialética é a de ação, em que o aluno elabora estratégias a partir do "jogo"[2] ao qual está inserido. A situação de ação deve possibilitar ao aluno julgar o resultado de sua ação e caso seja necessário, ajustá-lo, sem a participação do professor.

A segunda dialética é a de formulação, em que o aluno procurará, progressivamente, desenvolver uma linguagem que seja compreensível pelos seus interlocutores e, para tanto, utilizará sinais e regras comuns, conhecidas ou novas. A esse respeito Brousseau (2008) destaca:

> [...] a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema lingüístico). O meio que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então, envolver um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação (BROUSSEAU, 2008, p. 29).

A terceira dialética é a de validação, em que o aluno explicita a validade do modelo criado por ele. O aluno deixa de ser um informante para ser um proponente de sua ideia a um oponente que, poderá solicitar que demonstre ou detalhe melhor sua estratégia. Conforme Brousseau (2008)

> [...] o emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. Pressupõe-se que possuam as mesmas informações necessárias para lidar com uma questão. Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. [...] Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio (BROUSSEAU, 2008, p. 30).

Na situação didática, cabe ao professor, ao final dos debates nas duplas ou nos grupos, conduzir a socialização e assim institucionalizar o conhecimento produzido pelos alunos, aproximando-os do saber já institucionalizado pela academia.

Outro embasamento teórico que utilizamos nesta pesquisa é a noção de jogos de quadros da Matemática. Douady (1986) propõe que o professor, ao elaborar uma situação-problema, possa criar situações nas quais os alunos são conduzidos a trabalharem com diferentes domínios matemáticos. Douady (1986, p. 389) caracteriza um quadro como: "um quadro é constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações". Neste trabalho utilizamos os quadros aritmético, geométrico e algébrico. Douady expõe que durante o trabalho com os quadros o aluno poderá realizar a mudança de quadro, segundo o que consiste na aplicação de conhecimentos de um quadro em outro, de tal forma que o processo seja de ida sem necessariamente ocorrer a volta.

Os jogos de quadros são mudanças de quadros provocadas por iniciativa do professor para

[2] Jogo, nesse contexto, é entendido como uma situação didática na qual o aluno está envolvido com a responsabilidade de resolver uma dada situação-problema.

fazer avançar as fases de investigação, favorecendo a evolução da aprendizagem de conceitos pelos alunos. Neste caso, o jogo de quadros conduz frequentemente a resultados não conhecidos, a estratégias novas, à criação de objetos matemáticos novos. O uso deste conceito na pesquisa tem como objetivo principal que alunos, ao realizarem jogos de quadros, possam verificar a validade de algumas identidades algébricas.

Para analisarmos os procedimentos de verificação dos alunos nos inspiramos na proposta de Margolinas (1993), a qual apoiando–se nas ideias de Balacheff, assim os caracterizam:

> poderíamos considerar processo de verificação como a sequência de ações que conduz o aluno (sozinho ou com ajuda) quando ele procura se assegurar por uma ação da validade de um resultado e ou tentar modificar suas ações ou raciocínios que o conduziram a propor o resultado (MARGOLINAS, 1993, p.168, tradução nossa).

O processo de verificação, de acordo com Margolinas, apresenta duas condições implícitas e não formuladas para a existência de momentos em que os alunos realizam a verificação dos seus resultados. A primeira condição é a existência de uma finalidade do problema, para que o aluno retome por sua conta como um projeto de resolução. A segunda condição diz respeito à possibilidade de tomar uma decisão diferente daquela que foi tomada para chegar ao resultado, no caso do erro.

Entendemos que o aluno no Ensino Fundamental precisa, inicialmente, ter consciência e autonomia de buscar ferramentas matemáticas que lhe permitam verificar a validade de suas respostas. Desse modo, é fundamental identificar erros e realizar a retificação dos procedimentos de forma que possa validar suas decisões, tal concepção está em consonância ao proposto pelos PCNs. Conforme Margolinas (1993), o processo de verificação configura uma parte da fase de validação, sendo assim, buscamos realizar atividades nas quais os alunos pudessem tomar a decisão de realizar a verificação por meio do jogo de quadro em um processo de ida e volta entre os quadros.

No que concerne à parte experimental da coleta de dados nos apoiamos no modelo teórico da Engenharia Didática descrito por Michèle Artigue (1989). A Engenharia Didática propõe que o pesquisador desenvolva quatro etapas distintas, mas que podem, concomitantemente, ter algumas fases imbricadas. A primeira trata de uma análise preliminar, em que é levantado o aspecto epistemológico dos conteúdos visados pelo ensino, o ensino usual e seus efeitos, as concepções dos alunos, as dificuldades e obstáculos que marcam suas avaliações e o campo de coação, no qual se situará a realização didática efetiva. Já a segunda etapa trata da concepção e da análise a priori, em que cabe ao pesquisador elaborar a sequência didática, que deve ser composta por certo número de sessões planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar as produções dos alunos durante o desenvolvimento das sequências. A terceira etapa, por sua vez, é a experimentação, em que o pesquisador aplica as atividades da pesquisa junto à população de alunos. A última etapa trata da análise a posteriori e da validação dos dados coletados e conforme Artigue (1996), nessa etapa o pesquisador debruça-se sobre os dados coletados durante a experimentação por meio das observações realizadas durante as sessões, bem como das produções dos alunos.

A experimentação na sala de aula

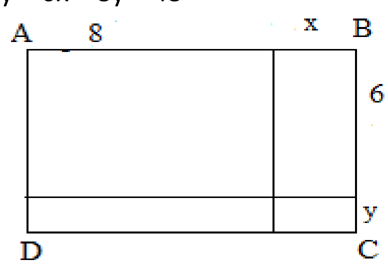
Para este artigo optamos por apresentar apenas uma atividade que compõe a primeira sessão da sequência didática que aplicamos a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da rede pública. Desse modo, apresentamos a seguir a análise a priori dessa atividade, bem como a análise a posteriori das produções apresentadas por 3 alunos, que serão aqui identificados por A1, A2 e A3.

O objetivo da atividade (quadro 1) era propiciar ao aluno a retomada dos conceitos de área e perímetro como ferramenta para verificar a validade de igualdades envolvendo expressões algébricas do tipo (a+b).(c+d) e 2(a + b) + 2(c + d). A atividade envolveu dois quadros matemáticos, o algébrico e o geométrico, que os alunos poderiam utilizar, bem como utilizar um terceiro quadro matemático, o aritmético. A interação entre os quadros possibilitaria ao aluno estabelecer estratégias de resolução, conforme os conhecimentos prévios já dominados e necessários para iniciarem os problemas; para tanto, nessa atividade trabalhamos com as variáveis didáticas, que são: a presença da figura no enunciado, tipo de expressão e conceitos de área e perímetro.

Atividade – Carlos ao calcular a área e o perímetro da figura abaixo encontrou:

Perímetro (ABCD) = 28 + 2x + 2y

Área (ABCD) = xy + 6x + 8y + 48



A resposta apresentada por Carlos está correta? Justifique.

Quadro 1 – Enunciado da atividade - proposta aos sujeitos da pesquisa

Na atividade, esperava-se que os alunos inicialmente realizassem os cálculos para determinar o perímetro e a área da figura com base nos dados fornecidos. Em seguida, a partir dos resultados encontrados, verificassem os resultados obtidos pelo aluno fictício "Carlos", utilizando o cálculo algébrico e fizessem os cálculos correspondentes para justificar suas respostas. Esperava-se ainda, que os alunos atribuíssem valores numéricos para x e y, tanto na figura como nas expressões correspondentes à área e ao perímetro da figura, com o intuito de verificar se, explorando quadros diferentes, chegariam ao mesmo resultado. Por exemplo, tomando x = 3 e y = 1, e após a substituição na expressão algébrica, obtendo a expressão numérica 28 + 2.3 + 2.1= 28 + 6 + 2 = 36 para o cálculo do perímetro, e 3.1 + 6.3 + 8.1 +48 = 3 +18 + 8 + 48 = 77 para o cálculo da área.

Substituindo esses valores na figura, obtêm-se comprimento igual a 11 e largura 7. Calculando o perímetro, encontra-se 11 + 7 + 11 +7 = 36 e área igual a 11.7 = 77, o que os levariam a verificação da validade da igualdade entre as expressões dadas por Carlos, correspondentes à área e ao perímetro da figura apresentada. Alguns alunos, após verificarem que o resultado apresentado pelo aluno fictício Carlos estava correto, poderiam responder simplesmente sim ou não, caracterizando-se como uma ausência de justificativa. Nesse caso, ao perceber que isso ocorreu, o pesquisador deveria questioná-lo novamente.

Era esperado que alguns alunos efetuassem errado o cálculo do perímetro e/ou da área, levando-os a afirmarem que a resposta do aluno fictício Carlos estava errada. Essa conclusão pode ser ocasionada pela dificuldade em fazer a distinção entre os conceitos de área e perímetro, conforme Teles (2007) verificou em sua pesquisa sobre o ensino de área de figuras. Por outro lado, os alunos poderiam errar os cálculos ao tentarem determinar o perímetro e a área da figura. Poderiam ainda, demonstrar dificuldade em aceitar o uso da letra como um número indeterminado nos cálculos algébricos e, dessa forma, somar letras distintas com o intuito de encontrar um resultado (Bonadiman, 2007). Prevemos ainda que eles poderiam errar ao substituir os valores na expressão e realizarem a justaposição dos números confundindo com a aritmética. Por exemplo, no lugar de ler 2.3 (dois vezes três) lerem 23 (vinte e três) e no lugar de 2.1 (dois vezes um) lerem 21 (vinte e um) e, nesse caso, encontrar como resultado 72, conforme sinalizado por Booth (1995), em sua pesquisa com alunos ingleses.

Análise de Produções dos Alunos

A análise desta atividade permitiu identificar alguns tipos de respostas nas quais os alunos apresentaram diferentes estratégias, algumas com sucesso e outras demonstrando dificuldade em determinados conceitos matemáticos. Todos demonstraram ter o conhecimento básico sobre os conceitos de área e perímetro, pois descreveram como calculá-los. Contudo, no quadro algébrico, alguns alunos mostraram dificuldades em operar a letra como número indeterminado, o que inviabilizou a verificação da validade dos resultados.

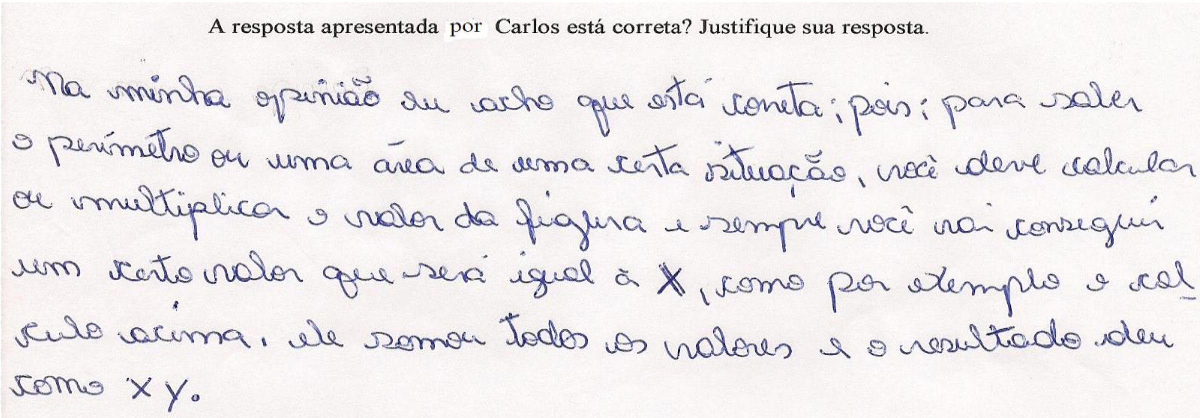
Foi observado ainda nessa atividade, que nenhum aluno utilizou o quadro numérico, provavelmente pela ausência desse tipo de atividade no livro didático utilizado na escola, que normalmente limita-se a encontrar o valor numérico de uma expressão algébrica.

Outro ponto observado foi em relação à postura dos alunos em esperar que o professor corrigisse a atividade, dizendo se estava certa ou não. La Taille (2003), apoiado nas ideias de Piaget, enuncia que essa postura aproxima-se muito da heteronomia que é uma relação assimétrica entre "súdito" e "autoridade", isto é, deve-se respeito ao professor por ser a autoridade na sala de aula, portanto, é de responsabilidade dele dizer o que é certo ou errado.

Segundo o mesmo autor, alunos com idades a partir de 12 anos já estabeleceriam relações de autonomia, isto é, deveriam buscar uma relação simétrica na qual deveria ocorrer o respeito mútuo entre os sujeitos da relação, ou seja, o dever de respeitar as ideias do outro corresponde à exigência de ser respeitado.

Ainda, no que tange a esse aspecto, La Taille (2003) apresenta uma observação sobre a maneira que é conduzida a relação de ensino e de aprendizagem na educação clássica, o que interfere diretamente na ação do aluno identificar o erro cometido e retornar sobre sua resposta. Tal consideração baseia-se no número de alunos que se deram por satisfeitos sem retomar a resolução, mesmo provocados a desenvolverem a atividade de forma diferente da que haviam realizado.

Analisando a produção do aluno A1, percebeu–se que ele não havia explicitado claramente suas ideias, ao afirmar que "para saber o perímetro ou uma área de uma certa situação, você deve calcular ou multiplicar o valor da figura e sempre você vai conseguir um certo valor que será igual a x". Os registros apontaram para o uso do método de resolver a equação para justificar sua resposta, porém não utilizou a linguagem simbólica da matemática. Essa resposta não foi considerada por ele como um resultado duvidoso, o que provavelmente o levaria a buscar uma nova resolução na qual sua resolução fosse retomada e reavaliada.


A resposta apresentada por Carlos está correta? Justifique sua resposta.

Na minha opinião eu acho que está correta; pois; para saber o perímetro ou uma área de uma certa situação, você deve calcular ou multiplicar o valor da figura e sempre você vai conseguir um certo valor que será igual à X, como por exemplo o cal culo acima. ele somou todos os valores e o resultado deu como X Y.

Figura 1 - Protocolo do aluno A1

Analisando sua produção escrita, foi possível perceber que inicialmente o aluno teve dificuldade para expressar os cálculos para o perímetro e a área de uma região retangular, pois recorreu a conceitos do quadro geométrico para explicitar suas ideias, apresentando-as de forma superficial e equivocada, não conseguindo expressar-se com clareza. Sua resposta sinalizou uma dificuldade em relação ao que Booth (1995) chamou de dilema “nome-processo”, isto é, ao perceber que há uma adição de dois termos contendo letras, justapõe os termos, encontrando “xy”. Identificamos aí o indício de uma concepção de álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos problemas, possivelmente por influência de estudos já realizados. Desse modo, a representação geométrica não lhe serviu de suporte para validar suas conclusões.

Podemos considerar que o aluno sinalizou que não conseguiu passar da fase de ação (tomada de decisão), pois de acordo com Margolinas (1993), esse é o momento do aluno, por meio dos seus conhecimentos, levantar hipóteses que podem ser corretas ou não e, caso o resultado seja duvidoso, retornar sobre sua resposta para realizar a correção necessária. O não retornar pode ser indicação de uma inaptidão para construir concepções que conduziriam ao êxito da formulação de estratégias. Brousseau (2008) destaca que os conhecimentos permitem produzir e mudar essas “antecipações” e a aprendizagem é o processo em que os conhecimentos são modificados. Neste caso foi possível perceber que os conhecimentos antigos não foram suficientes para provocar, no aluno, dúvida sobre sua resposta, o que certamente o levaria a retomar sua resolução, adotando um caminho diferente do seguido inicialmente.

Nessa atividade percebemos alguns conhecimentos equivocados que esse aluno possuía e que o impedia de realizar a verificação de sua resolução. Algumas dessas dificuldades estão relacionadas à concepção de álgebra que vivenciou ou vivencia por meio das atividades propostas em classe que, na maioria das vezes, consistem em atividades nas quais os alunos devem manipular a letra pela letra, sem uma relação direta com a aritmética e a geometria. Esse tipo de abordagem pode contribuir para uma aprendizagem setorizada e, em alguns casos, sem a percepção de relação entre os quadros citados.

Os alunos A2 e A3 recorreram à figura do enunciado para identificarem as medidas dos lados, o que contribuiu para a realização da tarefa. Esses alunos inicialmente identificaram as medidas dos lados paralelos e a seguir mudaram para o quadro algébrico a fim de encontrarem a expressão correspondente ao perímetro e à área. Conhecendo os resultados, eles identificaram as respostas encontradas com as propostas na atividade, o que lhes permitiram afirmar que as respostas apresentadas estavam corretas, realizando a verificação das mesmas. Foi possível observar, portanto, sinais de uma interação entre o quadro algébrico e o geométrico.

O aluno A2 analisou a figura no quadro geométrico identificando os dados que a compõem e, em seguida, com as medidas dos lados, realizou os respectivos cálculos no quadro algébrico, o que lhe possibilitou verificar a validade das respostas apresentadas no enunciado da atividade. Observou-se, ainda, que o aluno não sentiu necessidade de utilizar o quadro numérico para verificar a validade dos resultados. A provável ênfase na manipulação de letras como atividade algébrica na sala de aula pode ter reforçado a ideia de que basta apresentar os cálculos no quadro algébrico para verificar a validade das respostas em atividades apresentadas nas aulas de Matemática.

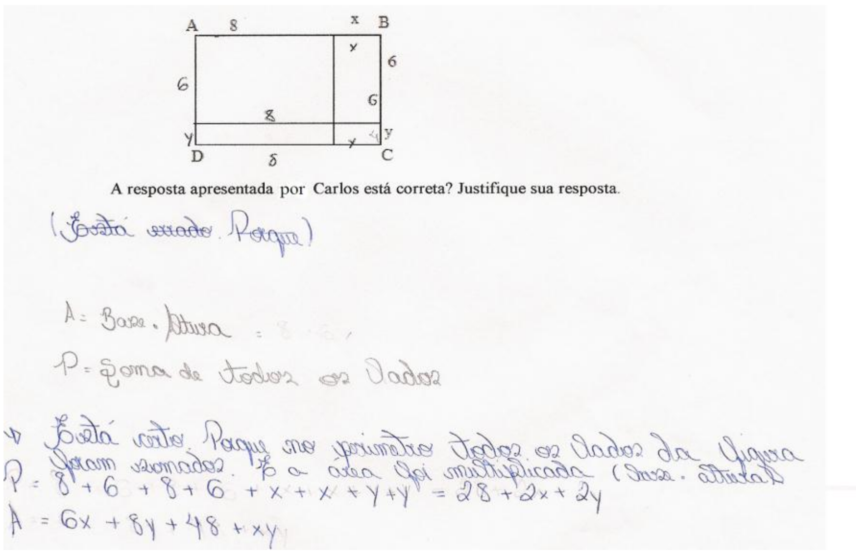


Figura 2 - Protocolo do aluno A2

O aluno A3 comunicou sua estratégia de resolução numa linguagem que valoriza a forma retórica, para que sua mensagem fosse compreendida por todos que lessem sua produção. Na resposta desse aluno foram utilizados símbolos mesclando números e propriedades algébricas, postura essa que lhe garantiu que as respostas apresentadas estavam corretas. De acordo com Almouloud (2007), é na fase da formulação que o aluno ou grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas utilizadas e a solução encontrada.

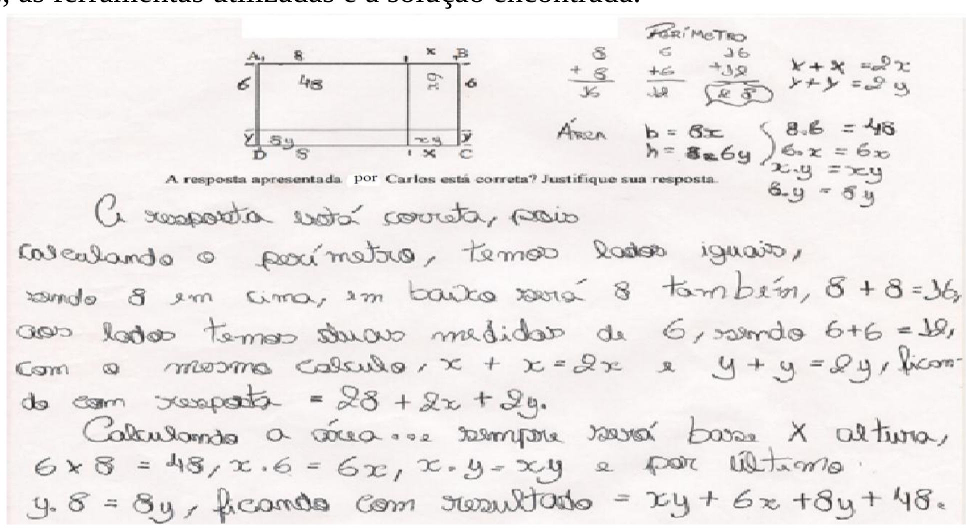


Figura 3 - Protocolo do aluno A3

Na sua comunicação foi possível observar que ele procurou verificar a validade de suas estratégias, utilizando justificativas que explicaram suas escolhas em relação aos valores e seus cálculos, descrevendo os procedimentos para determinar a área e o perímetro de uma figura.

À luz do jogo de quadros, os alunos demonstraram conhecimentos matemáticos em relação aos conceitos de área e perímetro, porém, nesse momento não sentiram a necessidade de realizar a verificação das afirmações utilizando mais uma estratégia, que seria levar para o quadro aritmético e atribuir valores numéricos para x e y, o que os conduziriam a confirmar ou refutar suas respostas.

Também foi possível notar que uma parte expressiva dos alunos, ao analisarem suas respostas e compará-las com as do enunciado da atividade, retomou sua estratégia[3] e, nesse caso, descartaram a resposta ao procurar validá-la, tendo o meio como antagonista da ação. Nesse sentido, explicita Brousseau (2008):

> O sujeito aprende corrigindo suas ações e antecipando seus efeitos. Dessa forma, as situações em que se envolve são para ele, sujeito da aprendizagem, os meios de referência, e ele exerce sobre elas sua capacidade de construção de conhecimentos e aprendizagem (BROUSSEAU, 2008, p. 58)

Nos protocolos dos alunos, sujeitos da pesquisa, encontramos uma predominância de respostas que trazem traços do quadro geométrico e do algébrico. Observamos que eles apresentaram dificuldade para distinguir o cálculo de área e de perímetro de uma figura retangular e, principalmente, não conseguiram ser claros em relação à formulação de suas ideias envolvendo esses conceitos. Percebemos que eles não sentiram a necessidade de utilizar o quadro numérico para verificar a validade de suas respostas, aspecto que também foi verificado nas outras atividades visando identificar alguma mudança nessa atitude.

Considerações finais

Nesta pesquisa, optamos por explorar atividades que envolvessem pelo menos dois quadros matemáticos, de forma que os alunos fossem convidados a transitar entre os quadros para perceberem relações entre os mesmos e assim identificarem possibilidades de os utilizarem como ferramenta para validar igualdades entre alguns tipos de expressões algébricas.

Analisando os protocolos dos alunos pesquisados, foi possível categorizar o processo de verificação em dois grupos baseados nos quadros utilizados e no processo de ida e vinda entre os quadros. O primeiro grupo de verificação é aquele que envolveu dois quadros com o sentido de mudança de quadro e o segundo, é o que envolveu a interação de quadros.

No que concerne ao primeiro grupo de alunos, que utilizaram dois quadros para realizarem a validação de suas formulações, estão aqueles que inicialmente utilizaram o quadro proposto na atividade, como exemplo, o quadro geométrico e a seguir transferiram para o quadro algébrico para realizarem cálculos que possibilitassem verificar a validade das afirmações. Nesse caso, esses alunos não retornaram para o quadro geométrico e nem recorreram ao quadro aritmético para verificar a igualdade algébrica proposta. Como eles realizaram a transferência para um segundo quadro e não retornaram, consideramos que esses alunos fizeram somente mudança de quadro para efetuarem a verificação.

[3] Estratégia é aqui utilizada no sentido de caminho a ser percorrido para chegar ao que está antecipadamente proposto para ser solucionado.

Um exemplo desse procedimento de verificação foi o do aluno A2 ao resolver a atividade em que, inicialmente, utilizou o quadro geométrico para apropriar-se do conceito de perímetro e a seguir mudou para o quadro algébrico, no qual realizou o cálculo de perímetro utilizando os termos algébricos que indicavam os lados da figura. Durante a experimentação, esse aluno não conseguiu realizar a verificação por meio do jogo de quadros. Nesta atividade não ocorreu o retorno ao quadro geométrico para verificar se a formulação estava satisfatória, porque ele não sentiu necessidade de fazer essa outra mudança.

Finalmente, a segunda categoria de verificação surgida na experimentação constituiu-se do uso de interação de quadros. Nessa categoria, concentramos as verificações nas quais os alunos utilizaram os quadros propostos, de maneira que, iniciando por um quadro, retornava-se a ele no final para validar todo o processo adotado. Cabe ressaltar que esse foi o procedimento de verificação que menos ocorreu, por ser constituído de atividades pouco familiares aos alunos.

É importante destacar que algumas atividades funcionaram como ferramentas para que alguns alunos identificassem seus erros e partissem em busca da sua superação. Alguns tiveram maior segurança em responder as atividades, no momento em que passaram a trabalhar com os três quadros, de forma autônoma, significando uma superação de suas dificuldades em relação ao conteúdo matemático.

Um exemplo desse procedimento é o do aluno A3 que, no momento de resolver a atividade, inicialmente utilizou o quadro geométrico para encontrar a área e o perímetro da figura dada e, a seguir, utilizou o quadro algébrico, calculando a área e o perímetro da mesma. Para confirmar seu resultado, ele recorreu a elementos da geometria para justificar sua resposta e consequente verificação da validade das respostas apresentadas no enunciado por meio da comparação dos resultados encontrados.

Para concluir, pode-se dizer que um grupo pequeno de alunos realizou a interação de quadros para verificar a validade dos resultados. Era esperado que eles utilizassem os dois quadros propostos, porém foi necessária a ação do pesquisador indagando sobre as certezas e incertezas em relação aos resultados apresentados por eles. Essa ação teve por intuito provocar nos alunos o interesse em recorrer a outros quadros, em particular ao quadro aritmético para verificar a validade dos resultados, o que caracterizaria, no mínimo, uma mudança para esse quadro. No caso do aluno que não retornou para o quadro inicial, destacamos que essa atitude caracteriza a não interação com o mesmo. Todavia, foi notório que os alunos não procuraram inicialmente estabelecer valores particulares para as letras, o que lhes permitiriam verificar a validade das igualdades.

Por fim, é preciso registrar que este estudo não se esgota nessa pesquisa, mas indica vários aspectos que podem ser aprofundados em estudos relacionados ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, dos quais destacamos:

- A exploração de atividades, desde o 6º ano, que envolvam vários quadros, em que o uso deles seja uma forma de verificar a validade das respostas;
- O ensino da álgebra utilizando a interação com os quadros aritmético e geométrico, durante o processo em que as representações algébricas não se configurem situações muito complexas para serem representadas geometricamente;
- E, por último, concordando com Santos (2007), a apresentação de atividades diversas nas quais os alunos tenham que levantar hipóteses, justificar e argumentar sobre suas estratégias.

Ressaltamos que vários aspectos ainda poderão surgir com a retomada e aprofundamento da análise dos protocolos concernentes às produções dos alunos durante as sessões envolvendo as situações-problema propostas. Conquanto, espera-se que o estudo ora realizado, possa contribuir tanto para o avanço das investigações sobre o tema, quanto para o trabalho didático dos professores de Matemática no aperfeiçoamento de suas práticas em sala de aula, respaldadas em teorias e investigações.

Bibliografia e referências

Almouloud, S. A. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: UFPR, 2007.

Artigue, M. Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9, n°3, p. 281-307. La Pensée Sauvage, 1989.

Artigue, M. Engenharia Didática. In. Brun, J. (org.) Didáctica das matemáticas. Lisboa, Instituto Piaget, 1996.

Balacheff, N. Une étude des processus de preuve em mathématique chez des eleves de Collège, Thèse d'Etat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Bonadiman, A. Álgebra no Ensino Fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas, 2007. Dissertação (mestrado), UFRGS, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.

Booth, L. R., Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In. Coxford, A. e Shulte, A. O. As ideias da álgebra, trad. Domingues, H. H., São Paulo: Atual,1995.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Terceiro e quarto ciclo. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Brousseau, G. Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdo e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

Camargo, D. A. F. de. Estruturação da sala de aula: efeitos sobre o desenvolvimento intelectual e sobre o estilo de funcionamento cognitivo dos alunos. In. Bicudo, M. A. V. (org.). Pesquisa em educação matemática: concepção e perspectivas. São Paulo. UNESP, 1999.

Douady, R. Jeux cadre et dialectiques outil-objet. Recherche en Didáctique des Mathématiques. Grenoble. La Penseé Sauvage-Éditions, v. 7.2, p. 5-31. 1986.

La taille, Y. de. Limites: três dimensões educacionais. São Paulo: Ática, 2003.

Lins, R. C. e Gimenez, J. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas: Papirus, 2006.

Margolinas, C. De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques. Grenoble-França: La Pensée Sauvage, 1993.

Teles, R. A. de M. Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. 2007. 297f. Tese (Doutorado) Programa de Pós-Graduação em Educação. UFPE.