XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el modelo de de Pirie y Kieren

René Alejandro **Londoño** Cano
Universidad de Antioquia
Colombia
london@matematicas.udea.edu.co
Carlos Mario **Jaramillo** López
Universidad de Antioquia
Colombia
cama@matematicas.udea.edu.co
Pedro Vicente **Esteban** Duarte
Universidad EAFIT
Colombia
pesteban@eafit.edu.co

Resumen

El presente artículo pretende facilitar en estudiantes de la Educación Media y primer semestre de universidad, que han pasado por una enseñanza de los conceptos de recta tangente y área, la comprensión de uno de los teoremas más importantes del Análisis Matemático (y por supuesto de los conceptos que allí se involucran) como lo es el Teorema Fundamental del Cálculo[1], mediante la aplicación del modelo de Pirie y Kieren, con el diseño de descriptores que permitan identificar el nivel de comprensión de los entrevistados. Es de aclarar que no se pretende que el estudiante use elementos del Cálculo infinitesimal, pues aún no los ha adquirido, sino que tan sólo use conceptos elementales como los de área, gráfica de una expresión algebraica, pendiente de una recta, entre otros, y con la ayuda de procesos de razonamiento infinito, comprenda la relación inversa en cuestión.

Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo, modelo de Pirie y Kieren, comprensión, tangente, área.

[1] Teorema que abreviaremos TFC

1. El problema

En los últimos años, los investigadores en el campo de la Educación Matemática se han preocupado por desarrollar propuestas innovadoras dirigidas tanto a los estudiantes como a los docentes, con el fin de mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos, y se han destacado por sus múltiples avances teóricos en lo que respecta al descubrimiento de más teoremas, la ampliación teórica mediante una construcción axiomática con más definiciones y sobre todo, por su aporte a los avances científicos y tecnológicos en lo que se refiere a las Matemáticas Aplicadas. Por su parte, la Educación Matemática se ha venido preocupando cada vez más por superar las dificultades que se presentan durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas por parte de los estudiantes. Los investigadores en esta área continúan con la tarea de diseñar estrategias metodológicas que mejoren el nivel de razonamiento de los estudiantes, la interpretación de enunciados en la resolución de situaciones-problema y en algunos casos la manipulación algebraica.

En esta dirección, la presente propuesta pretende facilitar a los estudiantes de la Educación Media y primer semestre de universidad, que han pasado por una enseñanza de los conceptos de recta tangente y área, la comprensión de uno de los teoremas más importantes del Análisis Matemático (y por supuesto de los conceptos que allí se involucran) como lo es el TFC, mediante la extensión y aplicación del modelo de Pirie y Kieren, con el diseño de actividades enmarcadas en los niveles de comprensión propuestas por el modelo. Es importante destacar el uso de conceptos elementales como los de área, gráfica de una expresión algebraica, pendiente de una recta, entre otros, por parte de los estudiantes, sin necesidad de acudir al Cálculo infinitesimal, y tan sólo con la ayuda de procesos de razonamiento infinito, comprenda la relación inversa en cuestión.

Muchas investigaciones acerca de este Teorema y de algunas experiencias educativas durante su enseñanza, dan cuenta de algunas dificultades para comprender el concepto de recta tangente a una curva en un punto y de otro lado el de cuadratura o cálculo del área de una región plana cualquiera, y proponen ciertos mecanismos didácticos (visuales, escritos, orales) como estrategia para superar tales dificultades; otras por su parte, realizan una exploración epistémica de los conceptos y explican en forma adecuada la evolución desde sus inicios hasta nuestros días, con el fin de consolidar así las estrategias didácticas pertinentes.

Sin embargo, en la revisión de esta literatura, no se encuentra un estudio que permita vislumbrar y precisar la real dificultad que presentan los estudiantes y los mismos profesores cuando se aborda la comprensión del TFC en su manifestación geométrica, esto es, el *carácter inverso* de los significados geométricos de los conceptos que en éste subyacen, y este es el punto álgido de la propuesta.

En el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, algunos estudiantes resuelven muchos problemas y ejercicios y, por supuesto, aprueban los exámenes del área, pero este hecho no garantiza la real comprensión de los conceptos matemáticos utilizados en el TFC, pues muchos de estos exámenes no trascienden lo operativo, lo mecánico o memorístico y en otros casos los maestros se limitan a evaluar lo análogo a lo hecho en clase, algo así como un aprendizaje por analogía, con el fin de evitar altos porcentajes de reprobación (en términos de Gay Brousseau este último fenómeno se denomina *efecto Topazze*).

Pues bien, de hecho, las situaciones descritas anteriormente suceden con mucha frecuencia al evaluar la aplicación de algunos conceptos o teoremas del Análisis Matemático que se abordan en los primeros años de universidad. Considérese específicamente el TFC, el cual ofrece una gran facilidad de aplicarse correcta y eficazmente en la solución de muchas situaciones, pero su alto contenido geométrico y los conceptos involucrados, que a simple vista no tienen ninguna relación geométrica, hacen que se dificulte su correspondiente comprensión. Esta propuesta, exhibe un fenómeno que preocupa a muchos maestros en la actualidad y obliga a pensar en estrategias que aseguren un verdadero aprendizaje que trascienda la mera aplicación de algoritmos, teoremas y definiciones, y a superar las posibles dificultades de tipo simbólico; es decir, se pretende que el estudiante logré un avanzado nivel de razonamiento.

En conclusión, el problema que el estudio pretende abordar es:

> *A Los estudiantes de último año de Educación Media y primer semestre de universidad, se les dificulta la comprensión de procesos de razonamiento infinito involucrados en la aprehensión de los conceptos de área bajo una curva y recta tangente a una curva en un punto.*

En otras palabras, el problema identificado trata acerca de la dificultad de sustituir conceptos intuitivos como los de tangente y área, por los actuales de derivada e integral, los cuales se obtienen por un proceso mental de aproximación, que no es otra cosa que un proceso de razonamiento infinito.

2. El modelo de Pirie y Kieren y su pertinencia en la presente propuesta

Un modelo científico es una representación de la realidad, que se elabora por abstracción, tomando algunos factores como más relevantes y haciendo caso omiso de los demás. El objetivo es dar explicaciones razonables de los hechos y hacer predicciones de la realidad. En la elaboración de un modelo científico se siguen tres etapas: Observación de los hechos, planteamiento teórico que explique los hechos y contrastación de las conclusiones teóricas. En los modelos teórico-educativos matemáticos el objeto son los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Se ha elegido el modelo de Pirie y kieren para el desarrollo de la propuesta por tres razones fundamentales:

- El Teorema Fundamental de Cálculo involucra conceptos que se encuentran estrechamente relacionados, pero al momento de abordarlos en el proceso de enseñanza y aprendizaje se crea en la mente del alumno una inadecuda integración entre el concepto imagen y el concepto definición (Tall y Vinner). Dado esto, el presente trabajo de investigación pretende formular una propuesta metodológica que involucre mecanismos de tipo visual-geométrico, en los que el modelo fundamenta los estratos de comprensión iniciales, de tal forma que mejoren la integración entre los conceptos arriba mencionados y se llegue finalmente a la comprensión del Teorema en cuestión, acorde con el progreso en los diferentes estratos.
- El modelo ha sido extendido como marco teórico en la ejecución de propuestas metodológicas, a conceptos del Análisis Matemático por parte del profesor David E. Meel, con resultados satisfactorios.
- El modelo permite a los estudiantes comprender no sólo conceptos, sino también relaciones entre ellos, tal como es el caso de la relación inversa entre tangentes y cuadraturas, debido a su característica dinámica de *redoblar*, es decir, permite retroalimentar (que, en términos de Pirie y Kieren sería *volver a doblar*) en estratos más internos con un nivel de comprensión más avanzado, en casos en los que la comprensión haya resultado inadecuada

o se haya observado la necesidad de una reexaminación de la comprensión de un estrato en una forma diferente.

2.1 Los orígenes

El modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión surge desde un referente netamente constructivista y está basado en la concepción de comprensión de Glasersfeld (1987), quien propuso la siguiente definición: "El organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe… entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes de dichas estructuras que podemos llamar comprensión" y añade que la comprensión es un proceso continuo de organización de las estructuras de conocimiento de una persona.

De esta manera, Pirie y Kieren (1991) asumieron su concepción teórica para la comprensión matemática: *"La comprensión matemática se puede definir como estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursividad parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él".* (Pirie y Kieren 1989, p.8).

El origen inicial del modelo se fundamenta en la observación y el aprendizaje de las matemáticas a nivel escolar medio y superior como son las fracciones y las funciones cuadráticas. Pirie y Kieren fundamentan su modelo en "experimentos de enseñanza" en ambientes constructivistas, mediante entrevistas individuales, grabaciones en video y audio de actividades que los estudiantes desarrollaban y análisis de respuestas por parte de los investigadores a las diferentes intervenciones escritas u orales de los estudiantes.

2.2 Descripción del modelo

El modelo de Pirie y Kieren postula ocho estratos que describen la evolución de la comprensión matemática en cuanto a conceptos o relaciones entre conceptos se refiere. A su vez, en cada uno de estos estratos (a excepción del primero) se identifican dos elementos complementarios que son *la complementariedad de un proceso y la acción orientada a la forma.* En particular, las acciones orientadas a la forma se presentan como una demostración de un agente externo que intenta determinar el estrato de comprensión en el que un estudiante se encuentra operando. Sin embargo, Pirie y Kieren (1994) afirman que si lo estudiantes realizan sólo acciones sin la expresión correspondiente, entonces sus comprensiones se inhiben y no pasan al siguiente estrato.

Otro aspecto importante en la descripción del modelo tiene que ver con los llamados *límites de falta de necesidad* que son representados en el diagrama del modelo que se presenta más adelante. Estos límites se refieren al progreso del estudiante hacia una comprensión más elaborada y estable que no requiere necesariamente los elementos de los niveles más bajos (Pirie y Kieren, 1992). De esta manera se considera que un estudiante que se mueva entre límites de falta de necesidad significa un importante cambio cualitativo en la comprensión de la persona. No obstante, es posible que un estudiante regrese a niveles bajos de comprensión, aún cuando hayan sido superados límites de falta de necesidad previamente.

2.3 La nomenclatura de los estratos

Se toma de Meel la interpretación de los estratos de comprensión del modelo:

Estrato 1: Conocimiento primitivo. Los estudiantes afloran toda la información que tiene que ver con ideas intuitivas (conocimiento intuitivo) o experiencias de aprendizaje anteriores. También se conoce como *conocimiento situado* en términos de Brown, Collins y Duguid, o *conocimiento previo o informal,* en términos de Saxe.

Estrato 2. Creación de imagen. El estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores. Las imágenes no necesariamente son representaciones pictóricas, sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental. Las acciones que se realizan en este estrato se relacionan con los aspectos mentales o físicos que se evidencien, con el fin de obtener una idea sobre el concepto.

Estrato 3: Comprensión de la imagen. En este estrato, el estudiante se ve en la necesidad de reemplazar las imágenes asociadas con una sola actividad por una imagen mental. El desarrollo de tales imágenes mentales que no son más que imágenes orientadas por un proceso, libera al estudiante de las matemáticas a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares (Pirie y Kieren, 1992). Aquí el estudiante comienza a reconocer las propiedades globales obvias de las imágenes matemáticas inspeccionadas.

Estrato 4: Observación de la propiedad. El estudiante examina una imagen mental y determina los distintos atributos asociados con dicha imagen, observa las propiedades internas de una imagen específica además de las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales. Construyen y modifican definiciones mediante la combinación de tales propiedades. Es posible también que el estudiante desarrolle un concepto-definición (Tall y Vinner, 1981) creada a partir de la interacción entre las diversas imágenes vinculadas, en vez de las imágenes desconectadas.

Estrato 5: Formalización. El estudiante conoce las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes, abandona los orígenes de la acción mental, para finalmente producir definiciones matemáticas completas. Es importante anotar que las descripciones generales proporcionadas por los estudiantes deben ser equivalentes a una definición matemática adecuada, aún cuando no sea necesario usar un lenguaje matemático formal.

Estrato 6: Observación. El estudiante utiliza su pensamiento formal, es decir, produce verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado, además de que es capaz de combinar definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones para identificar los componentes esenciales, las ideas de conexión y los medios para cruzar entre dichas ideas.

Estrato 7: Estructuración. En este estrato, el estudiante trasciende el tema particular para la comprensión que se encuentra en una estructura mayor. Es capaz de explicar las interrelaciones de dichas observaciones mediante un sistema axiomático (Pirie y Kieren, 1989).

Estrato 8: Invención. El estudiante es capaz de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crea preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo. En este estrato, la comprensión matemática del estudiante es infinita, imaginativa y llega más allá de la estructura actual, lo que hace que el conocimiento estructurado se convierta en una nueva dimensión de conocimiento primitivo en el cual la comprensión se extiende para un concepto más elaborado.

La figura mostrada en la página siguiente muestra en el primer diagrama una representación de la estratificación del modelo. En él se pueden observar los límites de falta de necesidad *en negrita* y cómo los estratos para la evolución de la comprensión matemática forman una composición de modelos completos, similares a la totalidad otorgando al centro interno una característica fractal. En el segundo diagrama se muestran los elementos complementarios de cada estrato ya mencionados anteriormente.

2.4 Caracterización general del modelo

Finalmente, se quiere caracterizar globalmente algunos aspectos importantes del modelo en lo que ser refiere a su estratificación:

- Los niveles externos crecen en forma recursiva desde los niveles internos, pero el conocimiento a un nivel externo permite, y de hecho retiene, los niveles internos. Los niveles externos se insertan y envuelven a los internos. Por esto se dice que el modelo es en realidad una teoría de la *relatividad de la comprensión.*

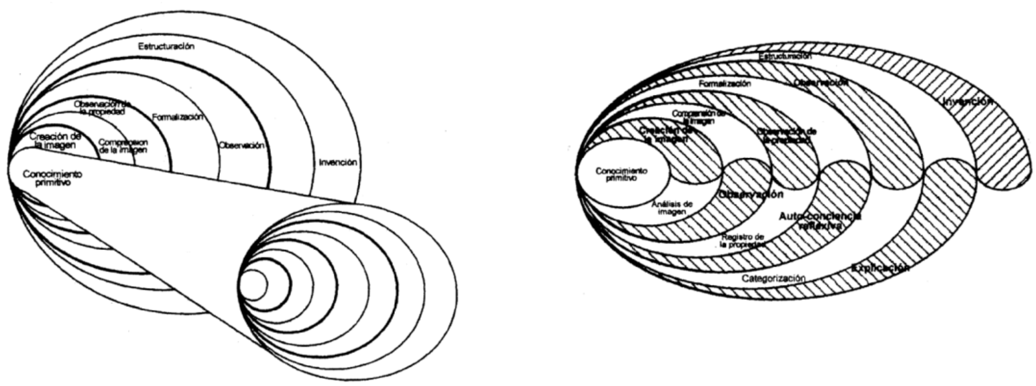

Figura 1. La característica fractal del modelo y las complementariedades de la acción y la expresión.

- La característica más importante del modelo es el proceso de *redoblar,* esto es, la reexaminación de la comprensión de un estrato en una forma diferente, en casos en los que una solución a un problema no se pudo encontrar en forma inmediata, o cuando se produce una comprensión inadecuada. Así pues, se hace necesario volver a doblar para llegar a un estrato más interno y extender la comprensión actual. El proceso de redoblar conduce necesariamente a una reconstrucción y reorganización del conocimiento del estrato interno de la persona para que de esta manera se extienda más aún la comprensión del estrato externo.
- El modelo postula la imposibilidad de que un individuo conozca realmente que está sucediendo en la mente de otro individuo (la cual es una postura constructivista radical de Glasersfeld que está en desacuerdo con la postura de Piaget al respecto).

- Cada uno de los estratos delinean un *cambio cualitativo* en la evolución de la comprensión del estudiante.
- El modelo reconoce la utilidad de las entrevistas con el fin de rastrear los movimientos de los estudiantes a través de los estratos de comprensión. En particular, Pirie y Kieren creen que un instrumento escrito, en especial un examen de opción múltiple, no expone completamente lo comprendido por el estudiante por lo que ésta sólo puede ser inferida y no medida.
- Se da total importancia a las preguntas provocativas, invocativas y de validación.
- Se postula el hecho de que *La comprensión matemática de cada persona es única.*

3. Metodología

Dada la complejidad que caracteriza a las investigaciones en Educación Matemática al tratar de entender cómo razona y comprende la mente humana y el marco en el que la presente propuesta de investigación se propone desarrollar , se considera favorable para alcanzar el objetivo, un enfoque mixto o multimodal, que de acuerdo a Hernández Sampieri, Fernández Y Baptista permite lograr una perspectiva más precisa del fenómeno, produce datos más ricos y variados y potencia la creatividad teórica con suficientes procedimientos críticos de valoración, entre otras bondades.

Se adopta un *diseño de enfoque dominante o principal* en el que prevalecerá el enfoque cualitativo, dado que se pretende describir la comprensión de algunos procesos de razonamiento infinitos involucrados en la relación inversa entre cuadraturas y tangentes y luego, analizar resultados con paquetes estadísticos que en el momento resulten más adecuados.

4. Resultados y conclusiones

En correspondencia con la teoría de PK y fruto del trabajo de campo realizado, se consolidan los descriptores que corresponden a los niveles de comprensión 1, 2, 3 y 4 en cuanto al TFC y que darán cuenta del nivel de comprensión de los entrevistados. En este punto es necesario recordar que no es propósito del presente estudio, abordar los descriptores de los demás niveles de la teoría, dado que nuestro tratamiento no es de carácter formal, sino de carácter visual-geométrico, con el fin de establecer la correspondencia entre áreas y diferencia de longitudes y facilitar posteriormente el acceso a la formalidad.

A continuación, se enuncian los descriptores para la comprensión del TFC, en el marco de la teoría de PK.

Nivel 1. Primitive knowing.

De acuerdo a la información arrojada por las entrevistas, desde el inicio de la primera fase hasta la última, se requiere que los entrevistados afloren sus ideas intuitivas y experiencias de aprendizaje relacionadas con los siguientes descriptores:

1.1 Caracteriza las pendientes de un conjunto de rectas dadas en el plano cartesiano, en forma ascendente.

1.2 Reconoce y traza funciones elementales de la forma $y = f(x)$ en el plano cartesiano.

1.3 Grafica regiones limitadas por una función y el eje x, entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

1.4 Reconoce visualmente los intervalos en los que una función es positiva o negativa, independiente de sus intervalos de monotonía.

1.5 Reconoce geométricamente la diferencia entre dos segmentos verticales y su correspondiente medida.

1.6 Calcula áreas de rectángulos, círculos, sectores circulares y trapecios.

1.7 Se le dificulta estimar la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto, haciendo uso de procesos de razonamiento infinitos.

1.8 Se le dificulta estimar el área de una región limitada por una función y el eje x en un intervalo cerrado, haciendo uso de procesos de razonamiento infinito.

Nivel 2. Image making.

Teniendo en cuenta que en este nivel de comprensión, las imágenes creadas por el entrevistado (que no son necesariamente pictóricas) transmiten significados, sean mentales o físicos, que permiten obtener ideas sobre el objeto matemático, se relacionan los siguientes descriptores:

2.1 Calcula o estima pendientes de rectas secantes a funciones.

2.2 Calcula o estima pendientes de rectas tangentes a funciones, haciendo uso del "haz de secantes".

2.3 Calcula o estima áreas de regiones limitadas por una función y el eje x, realizando particiones en un intervalo cerrado.

2.4 Asocia la diferencia positiva de ordenadas en dos puntos de una función, como la diferencia de las medidas de dos segmentos verticales, tomados desde el eje x hasta la función.

2.5 No establece las relaciones existentes entre la gráfica de una función y su respectiva función pendiente.

Nivel 3. Comprensión de la imagen.

En este nivel, los entrevistados reemplazan imágenes asociadas a una sola actividad, por imágenes mentales, las cuales se convierten en imágenes orientadas por un solo proceso. En coherencia con lo anterior, los descriptores correspondientes a este nivel son:

3.1 Caracteriza las pendientes de una función en un intervalo, de acuerdo a su monotonía o concavidad.

3.2 Grafica algunas funciones elementales y traza las respectivas funciones pendiente (la derivada de cada función), en otro plano cartesiano, haciendo uso de algunos puntos representativos.

3.3 Traza otro tipo de funciones pendiente, a partir de funciones más complejas.

3.4 Reconoce que una función pendiente es la misma para varias funciones de la forma $y = f(x) + C$.

3.5 Caracteriza una función a partir de su función pendiente, de acuerdo a su monotonía y signo.

3.6 Esboza la gráfica de una función, dada su función pendiente (y visceversa).

3.7 Reconoce que la diferencia positiva de ordenadas en los extremos de un intervalo cerrado, es constante para funciones de la forma $y = f(x) + C$.

3.8 Compara la diferencia de ordenadas de una función en los extremos de un intervalo cerrado, con el área bajo la función pendiente en el mismo intervalo.

3.9 Se le dificulta calcular el área bajo una función pendiente en un intervalo cerrado, conociendo los valores de las ordenadas en la respectiva función, para los extremos del intervalo.

Nivel 4. Observación de la propiedad

El entrevistado está en la capacidad de desarrollar un concepto-definición, creado a partir de la interacción entre las diversas imágenes vinculadas, en vez de las imágenes desconectadas. Por tal razón el entrevistado en este nivel de comprensión, debe cumplir con los siguientes descriptores:

4.1 Relaciona la diferencia de ordenadas de una función en los extremos de un intervalo cerrado, con el área bajo la función pendiente en el mismo intervalo.

4.2 Para determinar el área bajo una función pendiente en un intervalo cerrado, evidencia la necesidad de conocer la diferencia de las ordenadas correspondientes de la función en el mismo intervalo.

4.3 Dada una función, afirma que: "La diferencia de dos ordenadas $f(a)$ y $f(b)$ en dos puntos de una función, es igual al área bajo la curva de su correspondiente función pendiente en el intervalo $[a,b]$".

4.4 Dada una función, afirma que: "La ordenada en un punto de una función pendiente, es igual a la pendiente de la recta tangente a la función correspondiente en el punto de igual abscisa".

5. Bibliografía

Bisop, A. J. (1991). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching.* Netherlands: Mathematics Education Library.

Hernández S. y otros (2006), *Metodología de la investigación.* Mc Graw Hill. 4ª. Ed. México D.F.

Kieren, P. &. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It? *Educational Studies in Mathematics* , 165 - 190.

Londoño, R., & Jurado, F. (2005). *Diseño de una entrevista Socrática para la construcción del concepto de Suma de una Serie, vía áreas de figuras planas. Tesis de maestría no publicada.* Medellin: Universidad de Antioquia.

Meel, D. (julio de 2003). *Modelos y teoría de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 6(3).* Recuperado el 22 de noviembre de 2009, de http://dialnet.unirioja.es/servlet/listaarticulos?tipo_busqueda=ANUALIDAD&revista_busqueda=7978&clave_busqueda=2003

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Journal Educational Studies in Mathematics. 12(2).*, 151-169.