XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

Problemas geométricos e os ambientes de geometria dinâmica

Mônica Souto da Silva **Dias**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos-Centro
Brasil
msoutodias@gmail.com
Cileda de Queiroz e Silva **Coutinho**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
cileda@pucsp.br

Resumo

O presente texto discorre sobre um dos resultados obtidos em uma tese de doutorado em Educação Matemática. A pesquisa realizada caracteriza-se como qualitativa, com aspectos de um estudo de caso. Os procedimentos de coleta de dados foram os registros escritos dos alunos, as construções geométricas destes gravadas no software Geogebra, a áudio-gravação dos diálogos entre os alunos, e entrevistas semiestruturadas após realização da atividade. Buscou-se uma possível articulação entre os níveis de desenvolvimento geométrico existentes e os tipos de prova que ele produz. Também observou-se que a investigação da solução de determinados tipos de problemas geométricos não é favorecida pelo ambiente de geometria dinâmica, como aqueles cuja solução possa ser expressa por uma expressão literal. Nas condições do desenvolvimento da pesquisa aqui relatada, detectou-se que o bom rendimento do trabalho de investigação no software de geometria dinâmica pode estar relacionado ao tipo de problema geométrico proposto.

Palavras chave: geometria, ambiente de geometria dinâmica, problemas geométricos

O contexto da pesquisa

Os resultados que serão apresentados neste texto são parte de uma pesquisa acadêmica desenvolvida no âmbito de uma tese de doutorado em Educação Matemática, intitulada “Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico”, defendida na Pontifícia Universidade

Católica de São Paulo. O objetivo principal deste trabalho foi investigar a influência dos ambientes de geometria dinâmica na construção de argumentações, por alunos da licenciatura em Matemática. Buscou-se também estudar uma possível articulação entre os níveis de desenvolvimento geométrico existentes e os tipos de prova que ele produz.

Nos itens seguintes serão expostos: o referencial teórico, a metodologia e a análise dos dados, e as considerações finais referentes ao recorte por nós escolhido neste texto.

Referencial Teórico

Neste item serão descritos os referenciais teóricos que embasaram a construção da pesquisa e a análise dos dados.

Classificação das Geometrias segundo Parzysz

Parzysz (2001, 2006) desenvolveu um quadro teórico para o estudo do raciocínio geométrico dos sujeitos, buscando estabelecer uma articulação entre percepção e dedução. A construção deste quadro teórico foi baseada em pesquisas no domínio de ensino e aprendizagem de Geometria, realizadas por Van Hiele (1984), Houdement & Huzniak (1998) e Henry (1999). A partir do estudo das propostas destes três trabalhos, Parzysz (2001) propôs uma forma de articulação entre os níveis de pensamento geométrico. Tomando por base a natureza dos objetos de estudo da Geometria e o tipo de validação, o autor propõe a consideração de dois tipos de geometrias: não-axiomáticas e axiomáticas.

Na geometria não-axiomática, o estudo é voltado para a situação concreta, os objetos são modelos da realidade, referindo-se aos mesmos, ou a uma representação deles tais como uma maquete ou um desenho. A validação da afirmação sobre propriedades destes objetos ou relações entre eles é feita por meio da percepção, isto é, o aluno afirma que é verdadeiro porque assim ele vê ou percebe.

Na geometria axiomática, os objetos são teóricos, mas é aceitável construir referências ao mundo físico. A validação é baseada em teoremas e axiomas. Nesta geometria, uma afirmação que derive de uma observação, da realidade ou não, será verdadeira se puder ser demonstrada. Este caráter acentua o aspecto abstrato da geometria em questão.

Parzysz propôs um detalhamento das geometrias não-axiomáticas e axiomáticas, que é sintetizado no Quadro 1 (adaptado de Parzysz. (2001), 3.) a seguir:

Quadro 1

Síntese da classificação da Geometria segundo Parzysz

	Geometrias não-axiomáticas		Geometrias axiomáticas	
Tipos de Geometria	Geometria concreta (G0)	Geometria *spatio-graphique* (G1)	Geometria proto-axiomática (G2)	Geometria axiomática (G3)
Objetos	Natureza física ou concreta		Natureza teórica	
Validação	Perceptiva		Dedutiva	

As geometrias não axiomáticas estão também subdivididas: geometria concreta (identificada pela sigla G0) e geometria *spatio-graphique* (identificada pela sigla G1). Em G0, os objetos são físicos, e suas características físicas influenciam as observações e constatações. A validação é baseada somente na percepção. Em G1, os objetos, que eram físicos em G0, ganham uma representação gráfica, que pode ser um esboço ou um desenho construído por processos geométricos. A validação é baseada em comparação visual e sobreposições, apoiadas por medições realizadas com régua graduada, compasso e esquadros.

As geometrias axiomáticas se subdividem em proto-axiomática (identificada pela sigla G2) e axiomática (identificada pela sigla G3). Em G2, ainda pode-se recorrer a objetos físicos, tais como representações feitas por processos geométricos, mas a sua existência é garantida pelas definições, axiomas e propriedades entre figuras, no interior de um dado sistema axiomático – a Geometria Euclidiana. A validação se dá por meio de um discurso dedutivo aplicado aos dados do enunciado do problema, se apoiando nos postulados e axiomas da geometria euclidiana. Em G3, os objetos são teóricos, e a tentativa de representá-los pode incorrer em deformações do objeto representado. A existência tanto dos objetos geométricos, como as relações entre eles, é baseada em axiomas, definições e teoremas, que podem mudar de uma geometria para outra. As geometrias não-euclidianas são exemplos de resultados obtidos teoricamente, baseados na não consideração de um postulado.

Processos de validação e tipos de prova segundo Balacheff

Apresentamos, na sequência, um breve estudo sobre validação e demonstração, segundo os preceitos propostos por Balacheff (1987), o qual será articulado com o apresentado sobre os diferentes tipos de raciocínio geométrico, apresentados no item anterior.

O autor crê ser indispensável clarificar termos que são usados pelos matemáticos como sinônimos (tais como prova, demonstração e raciocínio), e alerta que a falta de clareza no seu entendimento pode constituir um obstáculo às pesquisas sobre questões de ensino e aprendizagem, que envolvam tais termos. Devido a este fato, Balacheff propõe as seguintes definições:

> Chamamos explicação um discurso que visa tornar compreensível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor de uma proposição ou de um resultado. As razões podem ser discutidas, recusadas ou aceitas.
>
> Chamamos prova uma explicação aceita por uma comunidade em um determinado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate entre a significação e a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.
>
> Entre as provas, certamente há uma particular, elas são uma seqüência de enunciados seguindo regras determinadas: um enunciado é conhecido como sendo verdadeiro, ou bem é obtido a partir daqueles que lhe precedem com o auxílio de uma regra de dedução tomada de um conjunto de regras bem definidas. Chamamos demonstração essas provas.
>
> Nós reservamos a palavra raciocínio para designar a atividade intelectual, na maior parte do tempo não explícita e manipulação de informações para, a partir de dados, produzir novas informações. (BALACHEFF, 1987, p. 147-148).

No que se refere aos tipos de provas, pragmáticas e intelectuais, a diferenciação é feita pela possibilidade de acesso ou não à experimentação. Nesta última, o aluno pode verificar a conjectura construída por meio de ações experimentais sobre os objetos estudados. Obtendo resultado positivo, pode considerar a conjectura como válida. Nas provas intelectuais, o discurso é teórico, não se tomam observações experimentais como argumentos para validar uma conjectura, mas apenas resultados teóricos já observados, como definições, teoremas, axiomas etc.

O status e a natureza do conhecimento, ao lado da evolução da linguagem, pontuam a passagem das provas pragmáticas às provas intelectuais. As provas pragmáticas encerram saberes advindos da ação, enquanto nas provas intelectuais, os saberes devem ser colocados como objeto de reflexão ou debate. Na pesquisa de tese aqui relatada buscamos analisar como a passagem de um tipo a outro de prova (da pragmática para a intelectual) pode assinalar a evolução nos níveis de raciocínio geométrico do aluno.

Balacheff (1987) afirma que entre as provas pragmáticas e intelectuais, podem-se identificar quatro tipos que se distinguem pelo conhecimento mobilizado e pelo tipo de raciocínio.

O primeiro deles é o *empirismo ingênuo*, no qual a validade de uma conjectura é baseada em observações de um pequeno número de casos.

A experiência crucial é o segundo tipo de prova, e consiste na colocação da generalização de modo explícito, isto é, o aluno realiza experiências como no empirismo ingênuo, mas aqui ele tem consciência de que busca um resultado geral.

O terceiro tipo é *o exemplo genérico*. O aluno trabalha sobre um objeto particular, mas tendo em mente a classe de objetos do qual o primeiro é um representante. Portanto, neste tipo de prova, o aluno busca uma generalização baseada em exemplos, mas procura justificá-la com a teoria geométrica.

A experiência mental é o quarto e último tipo de prova e consiste em interiorizar a ação e separá-la de seu representante particular. Entendemos que aqui não há mais referência ao caso particular e a afirmação é elaborada para uma classe de objeto, e a validação é inteiramente sustentada pela teoria.

A relação entre os quatro tipos de provas e os níveis de raciocínio geométrico proposto por Parzysz (2001, 2006) prescinde de estudos, uma vez que Balacheff (1987) não fez referências explicitas aos objetos geométricos evocados em dada prova, tal qual fez Parzysz (2001) ao elaborar a classificação dos níveis de desenvolvimento geométrico. A tese aqui apresentada buscou analisar a hipótese de existência de relações entre o proposto por estes dois autores, por meio do estudo das produções e diálogos de alunos durante a resolução de problemas que envolvem a demonstração em Geometria. Tal estudo apontou um aspecto da resolução de problemas geométricos em ambiente de geometria dinâmica, objeto deste texto.

A tecnologia e o ensino e aprendizagem de Geometria

A tecnologia informática trouxe para a sala de aula possibilidades impensadas para o ensino e aprendizagem de Matemática. Tais possibilidades são extremamente ampliadas no que se refere à Geometria, pois o desenvolvimento de softwares de geometria dinâmica conferiram, de modo irrevogável, movimento às figuras geométricas, antes estáticas,

> [...] permitindo a manipulação direta de objetos geométricos representados na tela do monitor, via teclado ou mouse. Desta forma, o movimento surge relacionado a este "dinamismo" das figuras, que provêm dos recursos dos programas que possibilitam o deslocamento dos objetos, designado pelo "agarrar-arrastar" dos elementos geométricos (DIAS, 2005, p. 58).

Tal movimentação preserva as relações de construção subjacentes às figuras. Tomando a designação estabelecida por Laborde (1994), segundo a qual figura e desenho são considerados elementos distintos, sendo a primeira referente ao objeto geométrico teórico, enquanto que o segundo refere-se à entidade material[1]. Pode-se afirmar que o que se movimenta na tela do monitor são os desenhos relacionados às figuras que são por eles representadas.

A utilização de softwares de geometria dinâmica no ensino e aprendizagem de Geometria tanto pode ser mais uma ilustração para a aula como um rico material didático que instiga a curiosidade dos alunos e aguça seu espírito investigativo, levando-os a elaborar conjecturas sobre situações diversas. O professor desempenha um importante papel nestas duas opções, pois é ele que decide o tipo de abordagem destas atividades. Se objetiva que o aluno permaneça no nível perceptivo[2], ele explorará tais softwares como meros ilustradores para as propriedades das figuras geométricas. Mas, ao contrário, se o professor encaminha os alunos para tarefas de observação, formulação e testagem de conjecturas em ambientes de geometria dinâmica, estes serão utilizados como instrumentos de suporte ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo (OLIVERO, PAOLA e ROBUTTI, 2003).

Hofstadter (1997; apud VILLIERS, 2002) atenta para o fato de que experimentações em Geometria utilizando software de geometria dinâmica contribuem para reforçar a convicção de

---

[1] Assim, por exemplo, desenhos de paralelogramos representam uma entidade teórica que é a figura paralelogramo definida como o quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.

[2] Segundo Parzysz (2006), o aluno encontra-se no nível perceptivo quando se refere a objetos da "realidade", ou seja, objetos que são realizações materiais de objetos teóricos.

que certo fato é verdadeiro e também para incentivar a demonstração. Afirma, também, que a movimentação de uma figura na tela do computador (ele se refere ao Geometer´s Sketchpad) pode determinar o grau de confiança na validade de uma conjectura e a necessidade da demonstração como explicação para tal validade.

A tecnologia e a demonstração em Geometria

Considerando o exposto no parágrafo anterior, a validação obtida por meio dos softwares de geometria dinâmica é considerada pragmática, nos termos de Parzysz (2001, 2006) e Balacheff (1987), pois está apoiada nas observações do objeto físico, que são as figuras construídas pelo usuário no software. Deste modo, a validação pragmática fornecida pelos softwares de geometria dinâmica não é considerada como uma demonstração no sentido proposto Balacheff (1987), pois não estão apoiadas na teoria geométrica, não sendo fruto de deduções matemáticas. Ainda segundo o afirmado por esse autor, podemos classificá-la como prova do tipo empirismo ingênuo ou experiência crucial. Segundo Parzysz (2001), a validação pragmática está relacionada ao nível de raciocínio geométrico G0 e G1.

Otte (2003) destaca uma contribuição relevante dos sistemas dinâmicos de geometria: a interação entre a observação e o raciocínio propiciada por estes sistemas pode estimular o raciocínio hipotético-dedutivo do aluno, pois ao observar a movimentação das figuras monitor, o estudante percebe relações entre os elementos destas figuras, e pode esboçar estratégias de argumentação a fim de justificar as suas observações. Este tipo de raciocínio favorece a construção de provas do tipo “exemplo genérico” e “experiência mental”, sendo compatível com os níveis de raciocínio geométrico G2, no sentido proposto por Parzysz (2001).

Para Villiers (2002), não se deve utilizar a geometria dinâmica no início do trabalho com demonstrações como meio de verificação, pois será mais significativo para os alunos iniciar o estudo de demonstrações com a função de explicação e descoberta. Mas ele alerta que os alunos precisam ser iniciados o quanto antes nas atividades de resolução de problemas, possibilitando-os situações de sala de aula nos quais os mesmos possam explorar, conjecturar, refutar, reformular, explicar, etc. O autor, ainda, ressalta a utilização dos softwares de geometria dinâmica como instrumento adequado para verificação de conjecturas verdadeiras e construção de contraexemplos. A partir da articulação visada entre as teorias aqui apresentadas, podemos supor que as atividades de verificação de conjecturas verdadeiras em ambientes de geometria dinâmica são adequadas aos níveis de raciocínio geométrico G1 no qual a validação é perceptiva. Por outro lado, a construção de contraexemplos exige uma elaboração teórica pelo aluno, o que é compatível com o nível de raciocínio geométrico G2. Do trabalho empreendido pelo aluno para compor um contraexemplo, poderá resultar em uma prova do tipo experiência mental, nos termos definidos por Balacheff (1987).

Metodologia

O objetivo fixado para a pesquisa e as questões formuladas nos conduziu a eleger a pesquisa de natureza qualitativa (REY, 2002) como metodologia mais adequada ao estudo que pretendemos desenvolver. Por outro lado, nosso trabalho se constitui em um estudo diagnóstico, pois submete o objeto de estudo à influência de certas variáveis, em condições controladas e conhecidas por nós (o uso dos ambientes papel e lápis e geometria dinâmica). Deste modo, lançamos mão de aspectos de um estudo de caso (MARTINS, 2008), cuja unidade de estudo é o conjunto formado por três duplas de alunos.

Os instrumentos para coleta de dados foram: as atividades resolvidas pelos alunos, tanto no formato de redação em ambiente papel e lápis, como no formato eletrônico quando as atividades eram desenvolvidas em ambiente computacional; os arquivos construídos pelos alunos no software Geogebra durante a resolução da atividade em tal ambiente; as áudio-gravações dos diálogos e as observações da própria pesquisadora, feitas em formato de diário de bordo. Além desses, foram realizadas também entrevistas semiestruturadas após os encontros para realização das atividades.

Nossa escolha recaiu sobre a aplicação de atividades que deveriam ser desenvolvidas tanto em ambiente papel e lápis como em ambiente de geometria dinâmica Geogebra. Os seis alunos que participaram da pesquisa cursavam o sexto período de um curso diurno de licenciatura em Matemática de uma instituição pública, localizada no interior do Estado do Rio de Janeiro. Tal curso possui sete períodos, portanto já haviam cursado mais de 80% dos conteúdos curriculares do curso. A pesquisadora os conhece desde o primeiro período do referido curso, quando foram seus alunos na disciplina Geometria I e tal escolha foi feita para facilitar a comunicação entre os participantes e a pesquisadora, minimizando assim as possibilidades de desvio de resultados devido a esse tipo de problema.

Tais alunos estudaram dois períodos de Geometria Plana Euclidiana e dois períodos de Geometria Espacial Euclidiana, sabiam utilizar os recursos dos ambientes de geometria dinâmica, pois cursaram a disciplina Educação Matemática e Tecnologia em períodos anteriores, na qual realizaram um estudo instrumental e pedagógico de vários softwares gratuitos, entre os quais se inclui o Geogebra, software escolhido para essa pesquisa após análise das possibilidades e por ser o software utilizado no projeto desenvolvido pelo grupo de pesquisa PEA-MAT, na PUC-SP, do qual esta pesquisa é parte integrante.

A experimentação e análise dos dados

Os seis alunos foram organizados em três duplas e resolveram a atividade em dois encontros de três horas cada, com uma semana de intervalo entre estes encontros. As duplas foram identificadas com nomes fictícios: Rita/Guilherme, Helena/Júlia e Patrícia/Diana. A atividade constava de duas questões cujos enunciados apresentamos na sequência.

Questão 1: *É sempre possível construir uma circunferência tangenciando três lados de um quadrilátero convexo? Justifique sua resposta.*

Questão 2: *Considere um quadrilátero ABCD, o ponto médio M de CD e o ponto P, interseção da diagonal AC com o segmento BM. Estude a relação entre as áreas dos triângulos ABP e MCP nos casos em que ABCD é: a) paralelogramo; b) trapézio; c) quadrilátero convexo qualquer.*

Para cada questão foi realizada uma análise didática prévia, que consistia em um estudo das possíveis estratégias dos alunos para resolver a atividade e as dificuldades que eles poderiam encontrar durante a tentativa de resolução, a partir da análise dos resultados observados em outras pesquisas na área, que constituíram nossa revisão bibliográfica.

As duas questões foram resolvidas no ambiente papel e lápis no primeiro encontro, no qual os alunos utilizaram par de esquadros, compasso e régua graduada. No segundo encontro, resolveram a mesma atividade no ambiente geogebra. Tal escolha na ordem de apresentação dos contextos (papel e lápis ou computacional) deveu-se à análise de resultados obtidos em um teste exploratório, no qual os alunos tiveram forte resistência no uso do papel e lápis pelo conhecimento da solução já encontrada no ambiente computacional. Dessa forma, ajustamos os enunciados e propusemos primeiramente a reflexão sobre possíveis estratégias a partir do uso dos instrumentos clássicos do desenho geométrico.

Neste texto, nos deteremos na questão 2.

Análise das soluções apresentadas pelos alunos para a questão 2

Na análise didática prévia desta questão para o ambiente lápis e papel, fizemos a hipótese que ao começar a investigação dos quadriláteros na ordem sugerida no enunciado da questão, o aluno poderia adquirir segurança para prosseguir na busca de uma solução para o problema proposto, uma vez que o paralelogramo é um polígono com muitas propriedades familiares ao aluno, facilitando o estabelecimento de relações. Foi exatamente o que ocorreu. Este fato foi enfatizado por Júlia, quando ela afirmou que começar pela ordem sugerida no enunciado poderia "dar alguma dica". Também ocorreu com as outras duplas: o estudo no paralelogramo clareou as ideias para analisar o trapézio, o que facilitou muito a determinação de uma solução geral, mas a solução prevista na análise teórica só foi alcançada por Guilherme e Rita.

Nenhum aluno cogitou calcular a área dos triângulos para saber a relação entre as mesmas, e todos visualizaram a semelhança dos triângulos ABP e CMP, justificada pelo caso ângulo-ângulo. Apenas Guilherme quis provar a semelhança destes triângulos pelo caso lado-lado-lado, mas só conseguiu devido à orientação dada pela pesquisadora sobre a proporcionalidade dos lados correspondentes. Observe-se que a pesquisadora não forneceu respostas, mas apenas orientou caminhos, fazendo questões que provocaram a reflexão do aluno sobre as propriedades buscadas em seus conhecimentos anteriores.

A busca por uma solução para o item c ocupou maior tempo das duplas Patrícia/Diana e Júlia/ Helena, mas o motivo foi o fato de todos acreditarem que obrigatoriamente deveria existir uma solução e não cogitaram a possibilidade de inexistência da relação procurada. Foi necessária a intervenção da pesquisadora no trabalho das duas duplas para que estas viessem a pensar em tal possibilidade. Júlia e Helena terminaram por justificar corretamente por que no quadrilátero qualquer proposto pelo enunciado não havia relação entre as áreas dos triângulos analisados. A dupla Rita/Guilherme apesar de indicar a percepção de que esta relação poderia não existir, produziram respostas escritas que mostram que a dúvida com relação à existência persistiu. Em todos os casos, constatamos a influência do contrato didático: se o professor propôs um problema, então ele tem sempre uma solução possível.

As construções com régua e compasso exerceram o papel de orientação no decorrer da resolução da questão, mas não foram determinantes para a definição das respostas. A análise dos diálogos ocorridos durante as construções geométricas nos permite afirmar que todos os alunos observados trabalharam no nível G2 nos termos de Parzysz (2006), tal como apresentamos em nosso quadro teórico.

As justificativas apresentadas por Rita e Guilherme foram as mais completas, se comparadas com as apresentadas por Patrícia/Diana e com as de Júlia/ Helena. No entanto, esperávamos justificativas mais estruturadas do ponto de vista matemático, devido ao grau de escolaridade dos alunos participantes da pesquisa. Assim, podemos inferir que a aprendizagem em Geometria, para estes alunos, não cumpriu os requisitos necessários para a evolução do raciocínio geométrico.

Por fim, concluímos que todos os alunos alcançaram as fases relatadas para a resolução da questão, sendo que apenas Rita e Guilherme obtiveram a razão entre os lados do trapézio em função das bases. As justificativas apresentadas foram compatíveis com o tipo de prova experiência mental.

Na resolução da questão 2 no ambiente Geogebra, pudemos observar que a configuração do software tanto para a nomeação dos pontos como para a adoção do número de casas decimais para os valores numéricos não foram fonte de dificuldades para os alunos, seja porque os resultados fornecidos na tela não apresentavam diferença (no caso de Júlia, Rita e Guilherme), seja porque foi compreendido como uma aproximação (no caso de Patrícia e Diana).

Rita e Guilherme utilizaram as construções e os resultados fornecidos pelo Geogebra (medidas de áreas e de lados dos triângulos) para confirmar os resultados obtidos no ambiente papel e lápis para os itens *a* e *b*. No caso do item *c*, eles buscaram indícios de uma resposta diferente da que encontraram no ambiente papel e lápis. Após analisar as figuras construídas por eles, concluíram que não havia relação entre as áreas dos triângulos, caracterizando que mesmo em ambiente de geometria dinâmica eles permaneceram na observação de figuras diversas construídas para o mesmo enunciado , o que evidencia o apego ao visual e não às propriedades e axiomas relativos à figura trabalhada.

Desde o início da resolução do problema no ambiente Geogebra, Rita e Guilherme afirmaram o paralelismo de dois lados, que garantia a semelhança dos triângulos; portanto, a relação entre as suas áreas estava ausente do quadrilátero qualquer referente ao enunciado. Ainda assim, eles insistiram na investigação, realçando o poder de convencimento da ferramenta computacional, pois nos itens *a* e *b* o resultado fornecido pelo Geogebra coincidiu com o encontrado no ambiente papel e lápis. No item c, mesmo tendo o respaldo teórico de seus conhecimentos geométricos, eles ainda duvidaram das conclusões obtidas no ambiente papel e lápis, persistindo na procura por resultados, ou seja, na busca de uma solução, ainda que inexistente, caracterizando o efeito de contrato já citado.

Diana e Patrícia utilizaram os resultados obtidos pelo uso do Geogebra a fim de validar a solução encontrada no ambiente papel e lápis para todos os itens da questão. No item c, a ausência do paralelismo de dois lados foi suficiente para que elas concluíssem que não havia relação entre as áreas dos triângulos, e não insistiram na investigação, caracterizando a permanência dos alunos em um nível de prova pragmática em um raciocínio dentro de G1 (*spatio graphique*).

Júlia não utilizou a ferramenta *área,* do Geogebra, e usou as ferramentas de medição de ângulos e de segmentos. Com estes dados, calculou as áreas dos triângulos no item a, e concluiu pela existência de uma razão de ¼ entre elas. No item *b*, o paralelismo de dois lados a levou inferir que os triângulos eram semelhantes, e por isso, a razão entre as áreas era igual ao quadrado da razão de semelhança. No item *c*, após realizar medições de lados e ângulos, concluiu que não havia relação entre as áreas. Júlia foi a que utilizou menor variedade de ferramentas do Geogebra. Pode-se dizer que usou o software como régua e transferidor eletrônicos, ou seja, não fez uso do caráter dinâmico do software para explorar e construir conjecturas.

Pudemos constatar que, para os alunos observados, a experimentação no ambiente Geogebra não contribuiu para um avanço em relação aos resultados obtidos pelos alunos no ambiente papel e lápis, funcionando como um instrumento de confirmação dos resultados obtidos neste ambiente. Podemos fazer a hipótese de que tal utilização do ambiente é consequência da forma de abordagem dos softwares nas disciplinas anteriores, já que nossas atividades não visavam a familiarização com o Geogebra, mas sim um diagnóstico do seu uso na resolução de problemas envolvendo demonstração.

Rita e Guilherme oscilaram entre os níveis de raciocínio geométrico G1 e G2. Eles poderiam ser identificados em G2 quando justificaram suas afirmações a partir de fatos geométricos, e em G1 quando duvidaram do resultado encontrado, apesar dos argumentos teóricos. Também buscaram alguma solução por meio da movimentação da figura no ambiente Geogebra, ou ainda, retornando ao desenho produzido no ambiente papel e lápis. As demais alunas participantes tiveram comportamento idêntico ao de Rita e Guilherme.

As justificativas apresentadas pelos alunos foram do tipo experiência mental, porém de modo incompleto, ou seja, no texto havia referência a algumas propriedades, mas continha omissões de argumentação. Consideramos que tais justificativas foram escritas pelos alunos como uma extensão do que haviam feito no ambiente papel e lápis. Eles registraram apenas o que consideraram diferente do que havia na resolução naquele ambiente, e quando não houve acréscimo, nada foi escrito.

Com base na análise apresentada, podemos observar que as soluções elaboradas pelos alunos, no ambiente papel e lápis, não foram modificadas pelos mesmos, após a resolução no ambiente Geogebra. Sublinhamos que, no caso do aluno Guilherme, o qual apresentou duas formas distintas para demonstrar as relações da questão 1 e do item a da questão 2, estas ocorreram quando o aluno trabalhava no ambiente papel e lápis. Portanto, constatamos que a experimentação no ambiente Geogebra não acrescentou outras possibilidades para a elaboração das justificativas, ou seja, não despertou novas idéias, gerando, assim, a necessidade de aprofundamento da pesquisa na busca das reais causas dessa limitação: conhecimento das ferramentas e potencialidades dinâmicas do software, tipo de apresentação do problema, ou outros motivos a serem diagnosticados.

Cabe registrar que os alunos trabalharam oscilando entre os níveis G1 e G2. A evocação de representações para os objetos geométricos envolvidos no problema indica que nenhum aluno participante desta pesquisa estava no nível de raciocínio geométrico G3 ou apresentou um tipo de prova que pudesse ser categorizada como intelectual. Novamente atentamos para a necessidade de pesquisa empírica, envolvendo um número suficientemente grande de alunos, para validar a existência ou não da articulação teórica aqui proposta.

Ao final da experimentação, fizemos uma entrevista com os alunos para que falassem sobre as suas impressões a respeito da investigação realizada em dois ambientes distintos. A pergunta inicial direcionada aos alunos foi:

– Vocês trabalharam dois problemas de Geometria, numa situação de investigação, e tinham que fazer uma demonstração. Trabalharam primeiro no ambiente papel e lápis, depois trabalharam os mesmos problemas num ambiente de geometria dinâmica. Que diferença vocês veem entre um ambiente e outro, do ponto de vista do aluno?

Transcrevemos aqui apenas o trecho da fala do aluno Guilherme, que se relaciona com o objetivo deste artigo. Considere G para a fala de Guilherme e Pesq. para a fala da pesquisadora:

> G: Um erro seu, você pode consertar aqui bem mais rapidamente do que você está fazendo com régua e compasso, no papel. Então, eu acho que facilita bastante sim. E fora os recursos que são... por exemplo, a gente aqui está comparando a área, a gente primeiro teve que achar uma razão de

semelhança, provar. No caso do GD, a gente apenas digitou a função da área do triângulo e a gente verificou rapidamente qual era a razão entre as duas áreas. Aqui não seria possível a gente fazer isso, porque não tem como a gente achar, para um caso, mas todos a gente não poderia confirmar. Então, no papel a gente teria realmente que provar de outra forma, não encontrando a área.

Pesq: E você acha que se, por acaso, vocês tivessem vindo para cá, não tivessem passado pelo papel e lápis, tivessem começado a investigação nesse ambiente, as ideias para fazer a demonstração teriam sido mais rápidas? Vocês lembram que demoraram um pouquinho para chegar à bissetriz, na primeira questão?

G: Eu acho que seria mais rápido sim. Pelos recursos que o software oferece, por tudo que é mais fácil construir. Tudo isso daria as ideias mais rápido sim. Só que por outro lado, eu não sei se eu faria essa demonstração do mesmo jeito, se tivesse o software de GD.

Pesq: Faria de que jeito?

G: Por exemplo, na 2, aqui está pedindo para investigar relação entre as áreas. Como no software de GD eu tenho essa opção, de calcular a área final, eu ia acabar primeiro, logo, de início assim, tentar calcular a área dos triângulos e tentar fazer uma relação. No paralelogramo, que é a a (o item a), o software de GD teria um valor fixo , 4; mas no trapézio, eu já não ia perceber isso rápido, porque o valor ia mudar sempre, aí pra mim, não teria nenhuma relação entre as áreas.

Pesq: Ia acabar afirmando que não existia...

G: Ia acabar afirmando que não ia ter relação nenhuma, então teria que realmente estudar mais a fundo para perceber qual era a relação, que ali tem.

Pesq: Teria que fazer um estudo no papel e lápis?

G: Exatamente.

Observamos na fala de Guilherme o levantamento de um aspecto da utilização de softwares de geometria dinâmica na resolução de problemas geométricos: o caso da solução do problema ser uma expressão que generaliza uma dada situação geométrica, sendo representado por uma expressão literal. Embora não tenha sido experimentado, em questões como o item b da questão 2, o software apresenta resultados particulares, o que pode distanciar o aluno da busca por uma resposta completa, caso este não domine as características oferecidas pelo aspecto dinâmico do software.

Considerações Finais

Creditamos, em parte, à subutilização das ferramentas do Geogebra pelos alunos, o fato de estes não extraírem das experimentações neste ambiente informações que poderiam compor a argumentação desejada. Por outro lado, detectamos que o bom rendimento do trabalho de investigação no software de geometria dinâmica pode estar relacionado ao tipo de problema geométrico proposto. Em problemas geométricos, nos quais a solução seja expressa por uma expressão literal, os resultados fornecidos pelo software, que são quase sempre numéricos, podem confundir o aluno e conduzi-lo a uma conjectura falsa, ou seja, os resultados numéricos podem afastar o aluno da solução procurada. As características de problemas geométricos adequados para serem investigados em ambientes de geometria dinâmica, bem como a inversão da ordem dos ambientes papel e lápis e geometria dinâmica, constituem um estudo atualmente em desenvolvimento.

Referências Bibliográficas

Balacheff, Nicolas (1987). Processus de Preuve et Situations de Validation. *Educational Studies in Mathematics,*18, 147-176.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodoes de la didactique des mathématiques. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, 7.2, 33-115.

Dias, Mônica Souto da Silva. (2003). Contribuições de um ambiente informatizado para a resolução de questões abertas em Geometria. *Reunião Anual da SBPC*, 55.

Gil, Antônio Carlos. (2009). *Estudo de caso*.

Laborde, Colette; Bernard Capponi. (1994). Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabri-Géomètre. *Em aberto*, 62, 51-62.

Martins, Gilberto de Andrade. (2008). *Estudo de caso: uma estratégia de pesquisa***.**

Olivero, Federica; Paola, Domingo; Robutti, Ornella. Approaching theorical thinking within a dynamic geometry enviromente. (2003). *Educação Matemática Pesquisa,* v.5, 1, 85-103.

Otte, Michael. (2003). Análise de prova e o desenvolvimento do pensamento geométrico. *Educação Matemática Pesquisa.* v.5, 1, 13-55.

Parzysz, Bernard. Articulation entre perception et déduction dans une démarcge géométrique en PE1. (2001). *Coloquio de COPIRELEM*.

Parzysz, Bernard. La géometrie dans l´enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s´agit-il ? (2006). *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 17.

Rey, Fernando Luis González. (2002). *Pesquisa Qualitativa em Psicologia: caminhos e desafios.*

Villiers, Michael de. *Por uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica***.** Tradução de Rita Bastos. Disponível em http.//mzone.mweb.co.za/residents/profmd/profmat2.pdf. Acesso em: 21 mai.2008.