



El uso de la Matemática en la Búsqueda de Soluciones Aproximadas de un Problema de la Vida Cotidiana

Resumen

En el dictado de la asignatura Matemática, la resolución de problemas constituye un espacio permanente de discusión y exploración en cuanto a las posibilidades de mejorar la calidad del proceso educativo. El trabajo apunta a analizar la aptitud de los estudiantes para enfrentar situaciones respecto a: la clase de problemas “esperables”; su capacidad de estimar el orden de magnitud de la solución previo a la resolución; y su capacidad de discernir si está trabajando en forma exacta o aproximada. La actividad didáctica diseñada se desarrolla a partir del concepto de “aproximación”. Se plantea una situación problemática de la vida cotidiana para, a partir de allí, proceder a la discusión y análisis de la misma. Se pretende analizar si el alumno es capaz de resolver un problema “sencillo” aplicando sus conocimientos previos y el sentido común. Consideramos significativo trabajar la capacidad de estimar y resolver problemas reales en forma aproximada.

Palabras Clave: resolución de problemas, aproximación, estimación, cálculo de área

Introducción

Este trabajo se lleva a cabo en el marco del proyecto “La significación de los contenidos conceptuales en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en las carreras de Ingeniería y Agrimensura” que se desarrolla en la Facultades de Ingeniería y de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina..

Los alumnos de primer año de esta Universidad presentan las dificultades generales inherentes a la crisis educativa que estamos viviendo más las particulares y relativas al cambio de ciclo y a la falta de coordinación entre ciclo medio y superior.

En el marco de las actividades curriculares propuestas para el dictado de la asignatura Matemática -asignatura de 1er año del Ciclo Básico Común de la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas-, la resolución de problemas constituye un espacio permanente de discusión y exploración en cuanto a las posibilidades que brinda para mejorar la calidad del proceso educativo, esto fue posible pues los docentes de la cátedra en que desarrollamos nuestro trabajo pensamos que la presentación de la Matemática como se venía haciendo anteriormente,

más que potenciar las capacidades que se supone debe desarrollar, actúa como elemento paralizante, o cuanto menos, obstaculizador de tal desarrollo.

La idea de la enseñanza de la Matemática que surge de esta concepción (enseñanza vía resolución de problemas) es que los estudiantes deben comprometerse en actividades con sentido, originadas a partir de situaciones problemáticas. Estas situaciones requieren de un pensamiento creativo, que permita conjeturar y aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas, así como probar esas ideas a través de la reflexión crítica y la argumentación. Esta visión de la educación matemática está en agudo contraste con aquella en la cual el conocimiento y manejo de conceptos y procedimientos es el objetivo último de la instrucción.

Entendemos por problema a toda actividad que origine un desequilibrio con los saberes previos, que exija al alumno *algo de sí*, un esfuerzo que lo lleve al límite de sus posibilidades intelectuales y lo obligue a optimizar sus estrategias de razonamiento

Resolver problemas es “hacer matemáticas”.

Esta idea de la actividad matemática es sostenida por Polya, con su trabajo a través del libro “How to solve it” (1954), en el cual introduce el término “heurística” para describir el arte de la resolución de problemas, concepto que desarrolla luego en “Matemática y razonamiento plausible” (1957) y “Mathematical Discovery” (1981).

La conceptualización de Polya sobre la matemática como una actividad se evidencia en la siguiente cita:

“Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados, y casi todos los pasajes de este libro están destinados a mostrar que éste es el procedimiento normal. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel”.

Para Polya, la pedagogía y la epistemología de la matemática están estrechamente relacionadas y considera que los estudiantes tienen que adquirir el sentido de la matemática como una actividad; es decir, sus experiencias con la matemática deben ser consistentes con la forma en que la matemática es hecha. Evidentemente, Polya considera que se debe enseñar vía la resolución de problemas.

Para resolver un problema se requieren las siguientes capacidades y destrezas:

- el conocimiento de conceptos, técnicas o propiedades relativos a la actividad propuesta.
- la habilidad para procesar y transformar los datos necesarios para las operaciones concretas que requiera la solución. (por ej: reducir fórmulas).
- habilidad para separar información relevante de la irrelevante
- habilidad para procesar y transformar datos en varias direcciones, lo que requiere del conocimiento del efecto y oportunidad de uso de cada operación o fórmula. Esta habilidad implica el ejercicio de razonamientos hipotético-deductivo
- habilidad para procesar simultánea y mentalmente un gran número de pasos o etapas en la ejecución de la tarea propuesta. Esta capacidad hace a la posibilidad de proponerse un plan

de trabajo y una estrategia acorde al mismo; o sea, a la posibilidad de dimensionar el trabajo intelectual requerido por el problema

- habilidad para extraer información crítica desde un contexto distinto al contexto de aplicación; o sea, movilidad de los conceptos de un área a otra

Varios autores (Vicente et al. (2008)) han analizado las reglas y presupuestos ocultos que gobiernan (implícita o tácitamente) la interacción docente-alumno al enfrentar la resolución de problemas. Entre estos presupuestos se destacan:

- Todo problema presentado por el docente o por el libro de texto puede resolverse y tiene sentido.
- Cada problema tiene una única respuesta correcta, y ésta es precisa y numérica.
- La solución de cada problema puede y debe obtenerse ejecutando una o más operaciones aritméticas con los números del problema, y casi con toda seguridad con todos ellos.
- La tarea puede realizarse con las herramientas matemáticas que han aprendido como estudiantes, en la mayoría de los casos aplicando los conceptos, fórmulas, y algoritmos expuestos en las clases de Matemática más recientes.
- La solución final, e incluso algún resultado intermedio, implica números “limpios” (generalmente números enteros pequeños).
- El problema por sí mismo contiene toda la información necesaria para generar la interpretación matemática correcta y llegar a su solución de modo que no debe buscarse información “extraña”.
- Las personas, objetos, lugares y razonamientos son diferentes en los problemas de Matemática de la escuela que en las situaciones del mundo real, por lo que no hay que preocuparse demasiado si la situación propuesta por el problema viola los conocimientos previos o las intuiciones basadas en las experiencias cotidianas.

Por otro lado, es innegable la importancia de los contenidos del Cálculo en la formación de los estudiantes de las carreras a las que nos referimos. Pero también es importante que los mismos sean aprendidos de manera significativa. Es decir, de modo que el alumno recurra a ellos para resolver problemas que se presenten en situaciones cotidianas o en su futura labor profesional.

Acorde a las ideas expuestas, la propuesta que presentamos consiste esencialmente en el planteo de una situación problemática de la vida cotidiana para, a partir de allí, proceder a la discusión y análisis de la misma.

Para ello se diseñó una actividad didáctica desarrollada a partir del concepto de “aproximación”. El interés por este concepto surge por ser uno de los temas de mayor importancia en la matemática a partir del nivel medio superior. Es considerado fundamental en el Cálculo y otras ramas de la matemática, con diferentes aplicaciones en otras áreas de la ciencia.

En particular se analizará su aptitud con respecto a: la clase de problemas que son “esperables” para el alumno en función de su experiencia escolar; su capacidad de estimar el orden de magnitud de la solución previo a la resolución; y su capacidad de discernir si está trabajando en forma exacta o aproximada. .

Descripción de la Experiencia

Para indagar en el tema, propusimos a alumnos ingresantes a carreras de Ingeniería una situación problemática (Experiencia N°1, analizada en profundidad en otro trabajo) y a los alumnos de las Licenciaturas una segunda experiencia (que analizaremos en este trabajo) con la intención de analizar, por un lado, su actitud frente al problema, y por otro su capacidad de diferenciar entre un cálculo exacto y uno aproximado.

Una primera experiencia se planteó a un grupo de alrededor de 60 alumnos ingresantes a carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, en el marco de una segunda clase de Análisis Matemático I. En la primera se había realizado una introducción a los temas que trata el Cálculo, en un laboratorio de informática. La actividad se realizó en presencia de dos docentes. Como ya dijimos, esta actividad se analizó en profundidad en otro trabajo, pero la conclusión fundamental fue que los alumnos, a pesar de tener muy buena predisposición, no pudieron reconocer que la realidad puede ser descripta de manera aproximada.

El problema planteado apuntaba a que los alumnos debían calcular la superficie lateral y el volumen de una pileta de forma “rara” (podríamos decir “no esperable” para una clase de matemática), que debían ser calculados en forma aproximada. Esto los “paralizó”, no pudiendo la mayoría encarar la resolución del mismo.

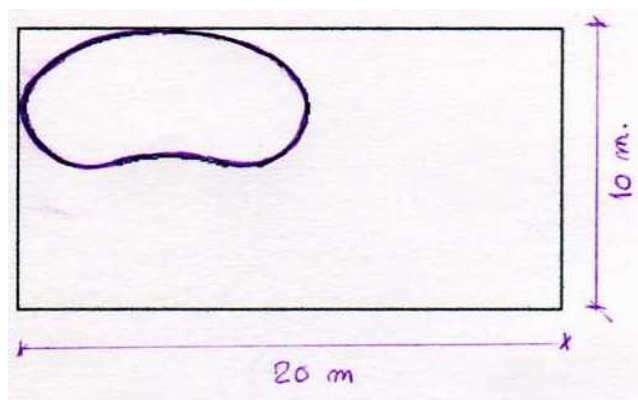
Viendo los resultados obtenidos en la Facultad de Ingeniería, decidimos reformular el problema para los alumnos de las Licenciaturas en Biotecnología y en Química de la Facultad de ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas, de manera más guiada, de modo que pudieran trabajar en grupos sin la intervención del docente.

Se pretende analizar si un alumno ingresante a la Universidad es capaz de resolver un problema “sencillo” aplicando sus conocimientos previos y el sentido común.

La experiencia se les planteó a una comisión de 120 alumnos que se dividieron en grupos de 4 o 5 alumnos cada uno. La edad de los mismos oscila entre los 17 y 18 años.

El nuevo planteo fue el siguiente:

En un patio rectangular de 10 mts x 20 mts. Se construyó una pileta en forma de riñón que está emplazada en $\frac{1}{4}$ del patio como se muestra en el dibujo:



- a) ¿Podrías decir entre qué valores está aproximadamente el área que ocupa la pileta?
- b) ¿Podrías “ajustar” más dichos valores?
- c) Si sabemos que con un litro de pintura se pintan aproximadamente 2 m² ¿Cuántos litros, optimizando tu respuesta, se deberán comprar para pintar el piso?
- d) ¿Cuántos litros de agua entran en la pileta si ésta tiene 1 m. de profundidad?
- e) ¿Cuántas horas llevará llenarla si se tiene una bomba que tira 1000 lts/h.?
- f) ¿Puedes calcular la superficie exacta que ocupa la pileta?

Los alumnos se mostraron muy entusiasmados y predispuestos para realizar la actividad y aunque se les dijo que no hacía falta poner los nombres de los integrantes, casi todos los grupos los escribieron.

Como pretendíamos, no pidieron ningún tipo de ayuda sino que se sintieron motivados frente al desafío planteado.

Análisis de los Resultados de la Experiencia

En el ítem (a) se les pedía que acoten la superficie de la pileta. Como pretendíamos se dieron cuenta que no podían calcular la superficie en forma exacta y que por eso se les pedía acotar; pero la mayoría sólo dieron una cota superior del área a pesar de que se les preguntó explícitamente “entre qué valores está aproximadamente el área que ocupa la pileta”. Sólo 3 de los 24 grupos entendieron la consigna y acotaron correctamente.

Como consecuencia de esto, en el ítem (b) mejoraron solamente el valor dado en (a).

En el ítem (c) se les pedía la cantidad de pintura que debían comprar para pintar el piso de la pileta, lo que pudieron responder sin problemas, claro que con las respuestas de los ítems anteriores. No pudimos analizar si al “optimizar” elegían la cota superior ajustada en el ítem (b) de manera de asegurarse que les alcance la pintura. Los 3 grupos que acotaron correctamente en el ítem (a) eligieron bien. Cabe aclarar que ningún grupo tuvo en cuenta si la pintura comprada era suficiente (o por lo menos no lo reflejaron en su respuesta)

Para responder (d) todos los grupos calcularon correctamente el volumen de la pileta de acuerdo a los valores que habían dado. Nuevamente no pudimos apreciar si elegían la cota correcta (en este caso la menor) para que no se rebalse la pileta, ya que la mayoría de ellos había dado sólo un valor. Los 3 grupos que acotaron correctamente en el ítem (a) eligieron bien. Cabe aclarar que casi todos los alumnos dieron correctamente el resultado en litros, cuando el volumen lo habían calculado en m³.

Respecto al ítem (e) ocurrió algo similar a los anteriores, ya que calcularon correctamente las horas de llenado de la pileta pero no pudimos corroborar si hubiesen elegido la cota correcta.

En cuanto al ítem (f), a si podían calcular la superficie exacta, 15 grupos contestaron correctamente, 6 no respondieron y 3 respondieron mal.

Observamos que los alumnos dieron una respuesta al problema pero no se detuvieron a analizar si los resultados eran coherentes con la realidad. Por ejemplo dieron una cota superior al

dar la superficie de la base y luego, con esa medición, calcularon la cantidad de pintura a comprar, que en ese caso les alcanzaba (respuesta coherente); con ese valor de la superficie de la base, calcularon el volumen de la piletta y la cantidad de agua necesaria para llenarla, pero ni un solo grupo se dio cuenta que la piletta se rebalzaba (respuesta incoherente)

Es importante señalar que hubo alumnos que decidieron, y no de manera inmediata sino luego del análisis detallado del problema, que utilizando integrales podían resolver el mismo. Pero tuvieron en cuenta que: el tema integrales no fue tratado en el curso (sólo se dio una clase sobre números reales), ni es un contenido del curso de ingreso y, que, por ende, suponen que carece de sentido que se les plantee un problema que lo requiriera para su resolución. Desestimando entonces esta situación, buscaron resolver el problema mediante las fórmulas conocidas para figuras cerradas y acotadas con fronteras poligonales como la presentada.

Conclusiones

Luego de analizar las respuestas de los alumnos, observamos:

- Respecto a su actitud frente al problema, demostraron interés y entusiasmo para resolverlo, aplicando conocimientos previos
- En cuanto a su capacidad de estimar el orden de magnitud de la solución, concluimos que es una cuestión a enfatizar en el dictado de la asignatura.
- En relación a su capacidad de discernir si trabajan en forma exacta o aproximada, reconocen que están trabajando de manera aproximada, pero dudan de ello esperando encontrar una única respuesta exacta

Consideramos importante que en el material ofrecido al alumno estuvieran clara y explícitamente expuestos los objetivos del problema. Creemos que tanto la presentación como la metodología con que se implemente una actividad es la que finalmente determina su carácter. Que es muy importante presentar el material con claridad, lógica, orden, consistencia y sencillez ya que la estructura del mismo debe guiar al alumno, servirle como “organizador” de las tareas a realizar. Así, al diseñar el problema pusimos especial cuidado en estas cuestiones.

A la hora de plantear los problemas, en particular los de este taller, no podemos perder de vista que, en cuanto a su naturaleza y función, tenemos dos *tipos* de objetivos: el primero es el objetivo *disciplinar* (enseñar a hallar la función que mejor modelice un fenómeno o proceso dado, a elegir la herramienta que mejor convenga al caso, a saber que esta depende de la forma en que estén dado los datos); el segundo objetivo, no por ello menos importante, es el objetivo *pedagógico* (que el alumno no pierda de vista que “modelar” significa “traducir” la realidad a una estructura matemática y viceversa; que hacer esto requiere conocer la naturaleza última de los conceptos o procesos matemáticos para poder “descubrir” los mismos en el proceso real; que la planificación de la actividad y la elección de las herramientas que convienen a su resolución son pasos importantes).

La enseñanza de la Matemática en la Educación Media y en la Superior debe contribuir a desarrollar en los alumnos capacidades. Una de estas capacidades es la de elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y valorar la conveniencia de la elección de la misma en función de la situación a resolver.

Advertimos que en general los alumnos están intentando resolver problemas “de Matemática” (más que problemas, a secas) y en este contexto se ven en la necesidad de

encuadrar tanto la forma de resolución como la respuesta. Pareciera que este es el legado de la escuela en el ámbito de la Matemática: lo que debería ser algo natural se va perdiendo a medida que se escolariza: así como la geometría se algebrizó, la matemática toda se “endureció”, adquirió una rigidez que, de hecho, no es propia de la Matemática, sí en todo caso, de su lenguaje. Es decir: adquirió rigidez donde no debía: la Matemática debe ser precisa en el uso de los símbolos, es decir en aquello que debe comunicarse.

Así como actualmente parece haber consenso entre los docentes sobre la importancia de que la Geometría vuelva al aula, como promotora del razonamiento lógico, de la orientación en el espacio, como indispensable para describir, analizar y comprender el mundo, consideramos muy significativo que se trabajen la capacidad de estimar y la posibilidad de resolver problemas reales en forma aproximada.

Purcell et al. (2001) plantean en su libro de Cálculo apoyar y desarrollar la habilidad para reconocer una respuesta absurda y sugieren cómo hacer estimaciones mentales, y cómo llegar a una respuesta numérica.

Cuando el alumno enfrenta un problema; es decir, una cuestión para la que no tiene una respuesta inmediata y la cual no presenta un camino directo entre los datos del problema y la solución, la resolución le demandará una serie de acciones y operaciones que deberá ser capaz de imaginar o proponer y que, de poder hacer, darán cuenta de que ha logrado una asimilación significativa del saber involucrado, un efectivo desarrollo de sus capacidades intelectuales.

La enseñanza de la Matemática es una de las actividades que dentro de los procesos educativos presenta mayor complejidad. Esto se evidencia considerando que existe una problemática real girando en torno a este aspecto. Durante el transcurso de las últimas décadas se han desarrollado diferentes estrategias para tratar que de una u otra manera la enseñanza de las matemáticas sea una labor no sólo “cómoda” sino también efectiva, es decir, que cumpla con ciertos estándares.

Es así como para la década de 1980 el “National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)” propone que la resolución de problemas como método integral debe intervenir en la enseñanza de las matemáticas. Esto podría indicar que la resolución de problemas es un proceso que debe incluirse dentro de todo el diseño curricular y proveer el contexto en el cual los conceptos y las actitudes puedan ser aprendidos, permitiendo que los alumnos posean la habilidad de plantear y resolver problemas con una variedad de estrategias y recursos, al mismo tiempo que aprenden matemáticas.

Creemos que una forma de promover el cambio en la educación es insistir en que los esfuerzos docentes se desplacen hacia una efectiva implementación de *la enseñanza por resolución de problemas* (de distinto orden u origen); sin perder nunca de vista el papel fundamental de la formación en lo teórico-conceptual, manteniendo siempre el saludable equilibrio entre ambas actividades.

Esto no es fácil ni sencillo, para ello el docente debe ser acompañado, estimulado, provisto de fuentes o recursos que faciliten su tránsito hacia otra forma de pensar su accionar, lo capaciten para el diseño de sus propias estrategias didácticas. Esta última actividad es una actividad que requiere de conocimientos teóricos y de amplitud de criterio para acudir tanto al pensamiento lógico-formal como a la intuición creadora.

Bibliografía

- Polya, George (1981). *Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley & Sons, Inc.
- Polya, George (1957). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton:Princeton University Press.
- Polya, George (1954). *How to solve it*. Princeton:Princeton University Press.
- Purcell. E., Varbeg, D., Rigdon, S. (2001). *Cálculo* (8va. Edición). México: Pearson
- Quiroga, M., Sorribas, E. et al. (2008). *Análisis de resultados de la implementación del aula taller*. Buenos Aires: VII CAREM- SOAREM
- Quiroga, M., Sorribas, E. et al. (2006). *Aprendizaje de las funciones a través de la resolución de problemas*. VIII Simposio de Educación Matemática. VIII SEM EDUMAT Buenos Aires, Argentina
- Quiroga, M., Sorribas, E. et al. (2004). *Las funciones en la resolución de problemas*. Editorial: CLAME Actas de la RELME 17 Santiago de Chile. Chile
- Vicente, S., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2008). *Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales*. Cultura y Educación Vol. 20 N° 4 pp. 391-406.