Introducción a la programación lineal.
Una mirada desde la Teoría de Situaciones Didácticas

Carolina **Reaño** Paredes
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
creano@pucp.edu.pe
Uldarico **Malaspina** Jurado
Pontifica Universidad Católica del Perú
Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Resumen

El presente trabajo de investigación, detalla la construcción, aplicación y análisis de resultados de una secuencia didáctica que contribuye a que los alumnos usen comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la Programación Lineal. El marco teórico para el presente trabajo es fundamentalmente la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau. El proceso metodológico para concretar lo propuesto se apoya en la Ingeniería Didáctica y en el análisis de los resultados se usa también la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval. Un objetivo específico es que la secuencia didáctica propuesta contribuya a que, al resolver problemas contextualizados de programación lineal, los estudiantes coordinen los diferentes registros de representación (con énfasis en el gráfico) y obtengan conclusiones interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal.

Palabras clave: sistemas de inecuaciones lineales, óptimo, programación lineal, registro, gráfica, situaciones, ingeniería didáctica.

Planteamiento del problema

La poca atención dedicada al tema Programación Lineal en la etapa escolar de los estudiantes peruanos

Las deficiencias mencionadas se hacen también evidentes cuando los estudiantes llevan los primeros cursos de matemática en la universidad.En Malaspina (2008) se muestra los resultados de una encuesta realizada a los ingresantes 2007-I de la Pontificia Universidad

Católica del Perú (PUCP) que culminaron sus estudios en el año 2005 ó 2006 e ingresaron a la PUCP en el 2006 o en el primer semestre 2007 y se matricularon en el semestre 2007-1. Este número asciende a 1610 estudiantes. En esta encuesta se identificó la Programación Lineal como conocimiento previo muy poco frecuente entre los ingresantes a la PUCP, con percepciones similares entre ingresantes a letras y ciencias. Destaca el resultado relacionado con la Programación lineal, pues un 66% manifiesta que no le enseñaron, lo cual revela la poca atención que se brinda en la secundaria a temas de optimización a pesar de su importancia.

Las dificultades al enseñar la P.L. a alumnos de humanidades, específicamente a los alumnos de la UARM

Por otro lado existen en el Perú universidades dedicadas únicamente a impartir carreras de humanidades como La Universidad Antonio Ruíz de Montoya (UARM), donde la gran mayoría de los alumnos tiene poca base académica en las ciencias básicas en general y en matemática en particular.

En la experiencia de dictado de los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la Programación Lineal se han notado, en los alumnos, serias deficiencias. En este trabajo se prestará especial atención a las siguientes:

Los estudiantes muestran mucha dificultad para transitar y coordinar los diferentes registros de representación (verbal, algebraico y gráfico), principalmente para analizar e interpretar las gráficas.

Sus explicaciones se ven limitadas por la falta de experiencias previas en el empleo adecuado de argumentos, procedimientos, proposiciones y lenguaje formalizado, a pesar de que muestran capacidades para intuir las respuestas correctas a los problemas propuestos.

Por todo lo anterior se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo general Diseñar, elaborar, aplicar, analizar y proponer una secuencia didáctica que permita usar comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables poniendo énfasis en sus aplicaciones a problemas contextualizados de programación lineal.

Objetivos específicos

1. Diseñar y elaborar una secuencia didáctica que contribuya a que, al usar los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables para resolver problemas contextualizados de programación lineal, los estudiantes coordinen los diferentes registros de representación (con énfasis en el gráfico) y obtengan conclusiones interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal.
2. Experimentar la secuencia didáctica y analizar los resultados a la luz del marco teórico adoptado.
3. Rediseñar la secuencia didáctica diseñada originalmente, considerando el análisis de los resultados de su experimentación en aula.

Antecedentes

Esta investigación tomó en cuenta resultados encontrados en trabajos anteriores, dentro de los cuales destacan los siguientes:

Segura(2004) declara lo siguiente como objetivo de su investigación:

"El objetivo del trabajo consiste en diseñar y poner a prueba una secuencia de enseñanza de calidad que vuelva asequible el aprendizaje y solución de los objetos sistemas de ecuaciones lineales, con miras a propiciar comportamientos matemáticos y cognitivos en el quehacer de los alumnos, haciendo que el tratamiento y pasaje de registros de representación sea el eje alrededor del cual gire la construcción de las actividades".

Al término de la secuencia, se constató el logro de las intenciones didácticas propuestas, siendo esto justificado en la confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori. Así, se logró desarrollar en las alumnas comportamientos matemáticos y cognitivos que no solo sirvieron para asimilar los objetos, sino también para encontrar otra forma de aprender.

Barbosa (2003) sostiene lo siguiente como resultado de su investigación:

"Hay que valorar las oportunidades de estudio de ese concepto para el desarrollo del pensamiento matemático y cambiar la manera de enseñar las inecuaciones. Es necesario proponer actividades, basadas en el esquema de inecuación, que involucran la interpretación y las resoluciones no sólo algebraicas, valorando el análisis de las implicaciones y equivalencias, sino también resoluciones gráficas que propicien el pensamiento flexible, al considerar esas visiones relacionadas".

Oaxaca (2002) mencionan las siguientes conclusiones:

La solución del sistema de ecuaciones lo asocia con el valor de x o de y pero no interpreta el punto que forma esta pareja.

Los profesores debemos ayudar a nuestros alumnos a desarrollar las formas de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético para que ellos puedan transitar en ambas formas.

Los libros de texto se inclinan por el pensamiento analítico- aritmético o únicamente dan una introducción a sus representaciones gráficas y continúan resolviendo los problemas en forma algorítmica provocando que el alumno memorice o mecanice los métodos.

Malaspina (2008) formula las siguientes conclusiones:

Se perciben deficiencias en el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos al resolver los problemas de optimización.

Una deficiencia específica de argumentación al resolver problemas de optimización radica en la poca presencia de justificación de que el resultado es óptimo, lo cual se vuelve más notorio cuando la variable es discreta.

Se perciben capacidades para intuir las respuestas correctas a los problemas propuestos, más no han sido fortalecidas con experiencias previas en el empleo adecuado de argumentos, procedimientos, proposiciones y lenguaje formalizado

Fundamentación teórica

Se ha escogido la Teoría de Situaciones Didácticas como marco teórico ya que en la actualidad es una teoría con una sólida fundamentación científica que nos ayuda a interpretar las actitudes, procedimientos y relaciones que se llevan a cabo en una puesta en escena analizando los procesos a que da lugar la comunicación del saber matemático e indagando las mejores condiciones de su realización. Debido a que en este trabajo de investigación la componente didáctica tiene una relevancia especial, se considera idónea como soporte teórico la Teoría de las Situaciones desarrollada por Guy Brousseau.

Brousseau sostiene que la didáctica estudia la comunicación de los saberes y tiende a teorizar su objeto de estudio, pero no puede responder a este desafío más que con las siguientes condiciones:

1. Poner en evidencia fenómenos específicos que parecen explicados por los conceptos originales que propone.
2. Indicar los métodos de pruebas específicas que utiliza para ello.

Estas dos condiciones son indispensables para que la didáctica de las matemáticas pueda conocer de forma científica su objeto de estudio y permitir así acciones controladas sobre la enseñanza.

Ya que por la naturaleza del tema en estudio, la necesidad de coordinación entre los registros verbal, algebraico y gráfico es notoria, consideraremos también el enfoque cognitivo desarrollado por Raymond Duval para analizar y poner en evidencia el rol que juegan los registros de representación en las respuestas de los estudiantes.

Este enfoque, que ha sido la perspectiva de análisis para numerosas investigaciones en didáctica de las matemáticas desde hace más de 10 años se apoya en la noción semiótica de registro. Considera los registros gráfico, algebraico (o formal) y verbal (o lengua natural) y sostiene que distinguirlos y coordinarlos debería constituir objetivos pedagógicos en la enseñanza de las matemáticas.

Diseño y metodología

La metodología de investigación que se consideró la más adecuada para este trabajo es la ingeniería didáctica, ya que permite analizar exhaustivamente todos los componentes de los procesos de construcción y comunicación de los saberes matemáticos en la clase.

Fases de la ingeniería didáctica

Consta de cuatro fases, donde en cada una de ellas puede predominar la función investigadora o la función de enseñanza aprendizaje según las actividades realizadas por el ingeniero-profesor.

Fase	**Función predominante**
Análisis preliminar	Investigación
Concepción y Análisis a priori	Investigación/Enseñanza aprendizaje
Experimentación	Enseñanza/aprendizaje
Análisis a posteriori y evaluación	Investigación

En la presente investigación se trabajaron las tres primeras fases.

Visión general

La secuencia didáctica está formada por cuatro actividades a desarrollarse en momentos de trabajo individual y en otros grupalmente. Las tres primeras son de maximización y tienen un contexto inicial común, al que se van haciendo variaciones, considerando los diversos casos descritos anteriormente al especificar las variables microdidácticas adoptadas para este estudio.

La cuarta actividad es de minimización, en un contexto diferente, considerando también desarrollos individuales y grupales y concretando casos no vistos en las actividades anteriores.Al diseñar las actividades, se tuvo como marco didáctico orientador, las diversas fases consideradas en la TSD (acción, formulación, validación, institucionalización).

Determinación de variables

Variables macro-didácticas

Al poner en escena las situaciones diseñadas se tuvo en cuenta las siguientes consideraciones:

Los estudiantes formaron libremente 7 grupos de 3 ya que eran 21 alumnos matriculados en el curso.

Al inicio de cada una de las tres sesiones, cada alumno recibió un material escrito que contenía la descripción de cada situación didáctica. Este material incluía los enunciados y las preguntas tanto de la parte individual como grupal.

Gran parte de los conocimientos previos requeridos, se trabajaron en un curso prerrequisito llamado Matemática Aplicada a la Economía I. Adicionalmente, se revisaron antes de iniciar la experimentación del presente estudio.

El nivel de tratamiento del tema estaba acorde a las características del grupo. Recordemos que son alumnos de la carrera de turismo con marcada disposición para los cursos de letras. Se diseñaron situaciones con contexto real y cercano a sus experiencias, que se resuelven usando dos variables. De esta forma, se esperaba una adecuada comprensión de los conceptos y un adecuado manejo de los procedimientos.

Para enfrentar con éxito las situaciones planteadas era necesario que los alumnos transiten y coordinen los tres tipos de registros: verbal, algebraico y geométrico.

Variables micro-didácticas

Recordemos que la finalidad de las situaciones didácticas es estudiar las condiciones y relaciones propias de un conocimiento. El docente puede variar algunas de estas condiciones de tal manera que según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y por lo tanto el conocimiento necesario para resolver la situación.

Para el presente estudio escogimos las tres variables que se muestran a continuación, teniendo en consideración que no son las únicas existentes.

Tabla 1

a. Número de restricciones presentes en un problema de optimización

(Adicionales a las restricciones de no negatividad de las variables).

Número de restricciones	Descripción	Gráfico	Caso

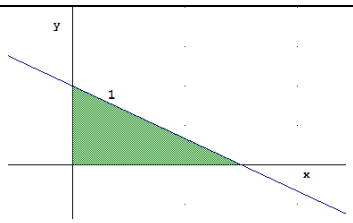
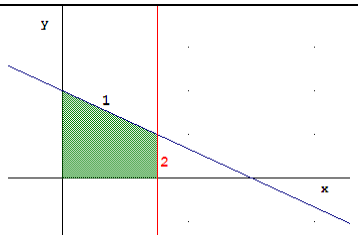
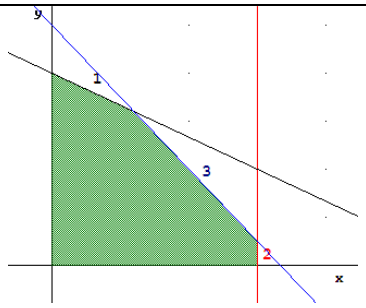
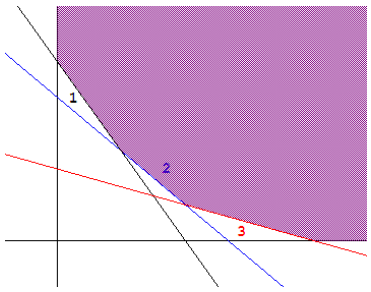
Una	1. $a_1x+b_1y\le c_1$		A
Dos	1. $a_1x+b_1y\le c_1$ 2. $x\le d$		B
Tres	1. $a_1x+b_1y\le c_1$ 2. $x\le d$ 3. $a_2x+b_2y\le c_2$		C1
	1. $p_1x+q_1y\ge r_1$ 2. $p_2x+q_2y\ge r_2$ 3. $p_3x+q_3y\ge r_3$		C2

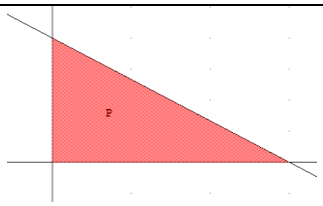
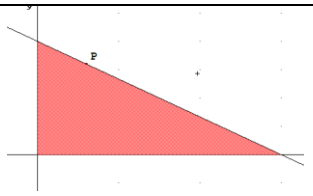
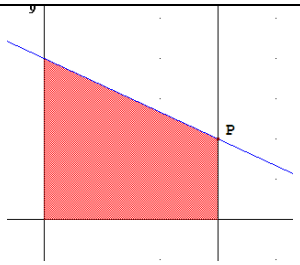
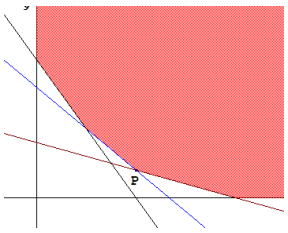
Tabla2

b. Tipo de optimización

TIPO DE OPTIMIZACIÓN	**DESCRIPCIÓN**
Maximización	La función objetivo es $P=ax+by$. La región factible es $S\subset\Re^2$ Se va a ***maximizar*** la función objetivo P, en S.
Minimización	La función objetivo es $P=ax+by$. La región factible es $S\subset\Re^2$. Se va a ***minimizar*** la función objetivo P, en S.

Tabla 3

c. Tipo de punto en la región factible

TIPO DE PUNTO EN LA REGIÓN FACTIBLE	***DESCRIPCIÓN***	***Grafica***	***Caso***
Punto interior de la región factible	Se analiza un punto donde no se ha agotado la única restricción dada.		E
Punto fronterizo de la región factible	Punto en donde se cumple una restricción con la igualdad.		F1
	Punto donde se cumplen dos restricciones con la igualdad.		F2
	Punto donde se cumplen dos de las tres restricciones con la igualdad.		F3

Solo trabajaremos con restricciones formuladas usando $\geq$ o $\leq$.

Actividades diseñadas

Aquí se presentan los enunciados de las tres primeras actividades, pero por motivo de espacio, solo se especifican las actividades individuales y grupales correspondientes a la primera de ellas.

<u>ACTIVIDAD 1</u> **NUEVOS JUGOS…**

La empresa "FRESH" dedicada a la venta de jugos envasados, ha decidido lanzar al mercado dos nuevos jugos de fruta mezclando dos o más concentrados.

Frutitrío: piña, naranja y plátano

Frutiduo: naranja y plátano

Un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.

Un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.

La empresa cuenta con un máximo disponible de 24 000 onzas de concentrado de jugo de naranja para la producción ya que no es temporada alta de la naranja, y se sabe que el abastecimiento de los demás concentrados se encuentra garantizado.

Trabajo individual Parte I

a. ¿Cuántas onzas de concentrado de jugo de naranja se necesita para fabricar 3 Frutitríos y 5 Frutidúos?
b. ¿Es posible fabricar 1 000 Frutitríos y 1 000 Frutidúos? ¿Por qué?
c. ¿Es posible fabricar 1 500 Frutitríos y 1 000 Frutidúos? ¿Por qué?
d. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de naranja se usará al fabricar "x" Frutitríos e "y" Frutidúos?
e. Utilizando lo encontrado en d, ¿cómo representarías la restricción que se tiene por no ser temporada alta de la naranja?
f. ¿Podrían "x" e "y" tomar valores negativos? Escribe las desigualdades que representan estas restricciones.
g. Grafica en el mismo plano cartesiano las restricciones encontradas en las partes e y f.
h. Si se fabrica 600 Frutitríos, ¿cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar?
i. Si se fabrica 3 000 Frutitríos, ¿cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar?
j. Si se fabrica 2 000 Frutidúos, ¿cuántos Frutitríos como máximo se pueden fabricar?

Trabajo grupal

Parte II

Los integrantes del grupo deben comparar el resultado que obtuvieron la parte g del trabajo individual, llegando a tener una única respuesta. A partir de esta respuesta se trabajará el resto de la actividad.

Parte III

Se sabe que la ganancia al vender un Frutitrío es de S/.1,00 y la ganancia al vender un Frutidúo es de S/.0,8.

a. ¿Cuál es la ganancia que se obtiene al vender 6 Frutitríos y 4 Frutidúos?
b. ¿Cuál es la ganancia que se obtienen al vender "x" Frutitríos e "y" Frutidúos?
c. Encuentra la ganancia que se obtendría en cada uno de los casos propuestos en las preguntas h, i, j de la parte individual e indica en qué caso ha sido mayor. ¿Habrá algún otro caso en que la ganancia sea mayor que las encontradas? Explique.

d. ¿En cuál de los casos analizados en la parte individual, se ha agotado la cantidad de concentrado de naranja disponible? Ubica dichos puntos sobre la gráfica resultante de parte II (grupal).

e. Si no es indispensable fabricar ambos tipos de envases ¿Qué cantidad de cada producto le recomendarías al fabricante para obtener una ganancia máxima? ¿Cuál sería dicha ganancia?

ACTIVIDAD 2 Además de los datos dados en la actividad 1, se sabe que por problemas de transporte se tiene un máximo de 12 000 onzas de concentrado de piña para la fabricación de los Frutitríos y Frutidúos,

ACTIVIDAD 3 Adicionalmente a los datos dados en las actividades 1 y 2, ahora se sabe que por el problema de transporte solo se puede contar con 10 000 onzas de concentrado de plátano. Para alcanzar la ganancia máxima, ¿cuántos Frutitríos y cuántos Frutidúos debe comercializar la empresa?

Tabla 4

Identificación de variables en las actividades de aprendizaje

Actividad de aprendizaje	**Variables didácticas**
Activida**d 1:** Determinación de restricciones y función objetivo	▪ Número de restricciones presentes en un problema de optimización: Caso A ▪ Tipo de optimización: maximización ▪ Tipo de punto en la región factible: Casos E y F1
Actividad 2: Determinación de la región factible y sus vértices.	▪ Número de restricciones presentes en un problema de optimización: Caso B ▪ Tipo de optimización: maximización: ▪ Tipo de punto en la región factible: Casos F1 y F2
Actividad 3: Solución de un pro-blema de maximi-zación, graficando la función objetivo sobre la región factible	▪ Número de restricciones presentes en un problema de optimización: Caso C1 ▪ Tipo de optimización: maximización: ▪ Tipo de punto en la región factible: Caso F2
Actividad 4: Solución de un proble-ma de minimización aplicando la propiedad	▪ Número de restricciones presentes en un problema de optimización: Caso C2 ▪ Tipo de optimización: minimización ▪ Tipo de punto en la región factible: Caso F3

Conclusiones

Hemos comprobado en la práctica cómo funcionan las diversas interacciones entre el alumno, el profesor y el medio, descritas en la Teoría de Situaciones Didácticas, entendiéndolas como un todo que nos habla del proceso de producción en clase como una trama compleja que no se puede limitar a ninguna de sus partes.

Hemos visto que es posible concebir una situación fundamental que utilizando los conceptos de situación adidáctica, devolución, contrato didáctico y los distintos tipos de

interacciones con el medio, entre otros, logre que los alumnos puedan construir el concepto de Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a problemas de Programación Lineal, transitando y coordinando los diferentes registros de representación, con énfasis en el registro gráfico, y que induzca a los estudiantes a obtener conclusiones, interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal.

A continuación presentamos conclusiones y aportes más específicos de este trabajo de investigación, en relación explícita con los objetivos específicos propuestos.

En relación al primer objetivo específico de este trabajo de investigación concluimos:

1, La ingeniería didáctica, fundamentalmente en el análisis preliminar, en sus dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva contribuye al diseño y elaboración de una secuencia didáctica de acuerdo al segundo objetivo específico propuesto ; en particular a prever los obstáculos que podrían presentar los alumnos en el proceso de enseñanza aprendizaje del tema en estudio y permite tener mayor claridad teórica para el uso del método gráfico como estrategia de solución de problemas de programación lineal de dos variables. Este enfoque facilita la propuesta de situaciones problemáticas que para resolverlas se requiere coordinar los diferentes registros de representación, poniendo énfasis en el registro gráfico.

   Por otra parte, el tránsito entre el registro gráfico y los registros algebraico y verbal favorecen el uso de la intuición optimizadora y su interacción con el lenguaje formal para la obtención de conclusiones.

2. El análisis de restricciones considerado en la ingeniería didáctica permite detectar particularidades del grupo de estudiantes con el que se experimentará la secuencia didáctica; estas particularidades pueden significar obstáculos en el proceso de enseñanza-aprendizaje por lo que hay que tenerlas en cuenta al elaborar el diseño.

   Por ejemplo nuestro estudio de restricciones mostró que los alumnos dedicaban escaso tiempo al estudio en casa, lo cual nos llevó a diseñar un material complementario (anexos 5 y 10) para ser desarrollado individualmente en casa y entregado la clase siguiente para su evaluación. Casi la totalidad de los alumnos cumplieron con la entrega, resultando de mucha utilidad para reforzar lo trabajado en clase.

En relación al segundo objetivo específico de este trabajo de investigación concluimos:

3. La experimentación en aula de la situación diseñada y su análisis, permiten verificar comportamientos descritos en investigaciones anteriores y a la vez hacer notorios algunos comportamientos aún no tratados.

   a.Se notó principalmente la dificultad para coordinar los registros de representación, siendo evidente la falta de experiencias previas en el manejo del registro gráfico, lo cual es coherente con el poco énfasis que se le pone en la educación básica.

   b.En las distintas etapas de formulación, se apreció que los alumnos tienen dificultades para obtener conclusiones, interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal. Muestra de mencionado se tiene en las dificultades para justificar sus respuestas correctas a los problemas.

   Estas limitaciones fueron disminuyendo conforme avanzaban las actividades. En el caso (a) esta mejora se puede apreciar por ejemplo comparando las gráficas obtenidas en la primera y la cuarta actividad (figuras 38 y 55 respectivamente).

En el caso (b) esta mejora se puede apreciar por ejemplo comparando las respuestas dadas en la segunda actividad (figura 44) con las de la cuarta actividad (figuras 58 y 59).

4. La secuencia propuesta nos lleva a afirmar que se llevó a cabo el proceso de devolución.

   En la puesta en escena se observó que las situaciones diseñadas resultaron suficientemente atractivas para que los alumnos asuman con entusiasmo, interés y compromiso las diversas actividades planteadas.

5. El pasar de un trabajo individual a compartir sus resultados grupalmente y tener que dar una única respuesta, permite que la fase de validación se lleve a cabo. Es uno de los aspectos más valorados por los alumnos.

6. El proceso de institucionalización es fundamental para el aprendizaje y se enriquece al incluir los resultados obtenidos individual o grupalmente por los alumnos. En la experiencia didáctica desarrollada, se aclararon dudas y se formalizó la teoría con la participación de los estudiantes.

   Ver recapitulaciones realizadas (anexos 3, 6, 8 y 11).

7. El proceso de enseñanza aprendizaje basado en la teoría de situaciones didácticas permite mejores resultados que los obtenidos en una enseñanza basada en la exposición y la repetición de ejercicios.

   Los resultados obtenidos en la evaluación de salida mostraron que la mayoría de los alumnos podía resolver un problema contextualizado de programación lineal, hecho que según las experiencias docentes previas, no se apreciaba en años anteriores en que el dictado se realizaba en forma tradicional.

8. Los alumnos valoran la metodología basada en la teoría de situaciones didácticas.

   La mayoría de los alumnos manifestó estar de acuerdo con la metodología empleada valorándola por distintos aspectos (apartado 5.3).

   Los pocos alumnos que manifestaron no estar de acuerdo, mencionaron que no permitía resolver muchos problemas, que prefieren la práctica individual y que necesitan mayor explicación por parte del docente.

En relación al tercer objetivo específico de este trabajo de investigación concluimos:

9. Las observaciones registradas durante la experimentación en aula, sobre las reacciones de los estudiantes frente a cada una de las actividades propuestas, permitieron rediseñar la situación original, proponiendo una secuencia didáctica que facilite la construcción del objeto de estudio.

   En el presente trabajo de investigación, este rediseño incluyó mejoras en los enunciados a fin de hacerlos más claros, eliminando así ambigüedades detectadas. Se eliminó preguntas que resultaron redundantes y se planteó una mejor distribución de los tiempos destinados para las recapitulaciones, trabajo individual, trabajo grupal y evaluaciones (apartado 5.4).

Sugerencias para futuras investigaciones

- ✓ Realizar el análisis a posteriori de la secuencia didáctica propuesta y luego hacer una comparación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori (validación), comparando los comportamientos esperados con lo que realmente sucedió en la clase.

- ✓ Continuar la presente investigación considerando la posibilidad de emplear otros casos de las variables didácticas consideradas y nuevas variables didácticas como la inclinación de la recta que representa la función objetivo. En la investigación se sugiere una actividad.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. y otros. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación Matemática.* Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Arya, J. y Lardner, R. (2002). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*.Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación.

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Relime,* 6, 199-219.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas.* Universidad de Burdeos. Traducción de J. Centeno y otros.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Investigaciones en Matemática educativa II, Université Luis Pasteur de Strasboug.

González, F. y Diez, M. (2002). Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en Álgebra. Propuesta para la interacción didáctica. Revista Complutense de Educación, 13, 281-302.

Lezama, F. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas.* Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias, en la especialidad de Matemática Educativa. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Oaxaca, J. (2009). *Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético en la solución de sistemas de ecuaciones lineales*. Trabajo presentado en el Primer Congreso internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Cuautitlán Izcali, México.
Posner, G. (2003). *Analysing the curriculum*. (Trad.G.Arango).Bogotá, Colombia: McGraw-Hill. (Original en inglés, 2001).

Sydsaeter, K. y Hammond, P. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Madrid, España: Prentice Hall.

Tan, S. (2005). *Matemáticas para administración y economía*. Itztapalapa, México: International Thompson Editores.

Panizza,M. (s.f.) Conceptos básicos de la teoría de las situaciones didácticas.

http://crecerysonreir.org/docs/Matemáticas_teorico.pdf

Segura, S. (2004).Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7, 49-78.

http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2095347