XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

Un modelo didáctico para la enseñanza aprendizaje de la teoría de la divisibilidad

Eduardo Enrique **Forero** Uribe
Universidad Antonio Nariño
Colombia
Foe76@hotmail.com

Mauro **García** Pupo
Universidad Antonio Nariño
Colombia
mauro@uan.edu.co

Resumen

Se propone y argumenta un modelo didáctico soportado en la comprensión y aplicación de criterios de divisibilidad de forma tal que pueda favorecer la conceptualización de la teoría de números en los estudiantes. Este modelo fue concebido bajo la existencia de estructuras de pensamiento y su desarrollo. En definitiva, estas últimas son las que pueden al estudiante presentarles dificultades; fundamentalmente en la asimilación de nuevos conocimientos, y su acomodación en dicha estructura mental, con este mismo fin, se proponen taxonomías de la divisibilidad que favorezcan la conceptualización de la teoría de la divisibilidad. Se analizan los elementos conceptuales de las que están compuestas para identificar variables que afectan al objeto de estudio y cómo están relacionadas.

Palabras clave: matemáticas, didáctica, modelo, teoría, números, comprensión, divisibilidad, pensamiento, estructura, construcción.

Introducción

Las nuevas políticas educativas y necesidades matemáticas de la escuela colombiana han retado a muchos docentes de matemáticas a evaluar y redireccionar su actuación en el salón de clases. Con esto lo que se quiere expresar es que cuando se quiere incidir en proceso de enseñanza aprendizaje con el fin de mejorar los resultados que generalmente se obtienen; existen diversas maneras de desarrollar acciones, que desde diferentes puntos de vista, tendrán un común denominador que serán las *"acciones didácticas"*. En el caso que ocupa este trabajo, dichas acciones didácticas estarán dirigidas al diseño de un proceso de enseñanza aprendizaje contextualizado, que no solo tenga en cuenta el ámbito básico de las matemáticas, sino también las necesidades de una educación globalizada. Es por esto que es necesario el planteamiento de un aprendizaje activo, que encuentre utilidad en los espacios culturales y sociales existentes, que permita a los estudiantes ir más allá de la sola adquisición de contenidos, y el desarrollo de habilidades del pensamiento con la capacidad de generalizar y crear conocimiento.

Estos planteamientos tienen su finalidad al permitir al estudiante descubrir el mundo que lo rodea y asumir el rol que le corresponde en la sociedad, dando respuesta a las dificultades que se le presentan y siendo asertivo en las problemáticas que afronte.

Este proceso educativo debe tener en cuenta las relaciones existentes entre los estudiantes, entre estos y la matemática y en su relación con los docentes en el desarrollo de las clases de matemáticas. Estas relaciones tienen su importancia en la necesidad de comunicarse y negociar la conceptualización de conocimientos en el proceso pedagógico. Es por esto, que el planteamiento de situaciones matemáticas, tal como la prueba de la divisibilidad de un número por otro o la búsqueda de un criterio general de la divisibilidad, invita y permite a los alumnos a la toma de decisiones; a exponer sus opiniones y de ser capaces de escuchar las de los demás. Todo esto proporciona un clima en el aula favorable a una discusión y generación de conceptualizaciones matemáticas, así como adecuadas argumentaciones de las mismas. Para ello, la organización del aprendizaje matemático debe basarse en el trabajo en equipo y en el fomento de la cooperación entre estudiantes. Así mismo, debe fomentar en los estudiantes el aprecio, la seguridad y la confianza de su hacer matemático, fundamentándose en aquellos conocimientos que ya poseen.

En el caso de esta investigación no es relevante la manera formal o informal del desarrollo de los conceptos adquiridos por los participantes; sino el desarrollo del pensamiento matemático de los mismos, sus concepciones previas, sus potencialidades y sus actitudes; todo esto constituye la base con la que cuentan los docentes para acompañarlos en un proceso de aprendizaje a partir del conocimiento que ya poseen. Aunque, aunque en ocasiones, este conocimiento sea erróneo, es lo único de lo que dispone el docente para que el estudiante inicie de manera activa y participativa su proceso de aprendizaje. A partir de esta base conceptual es que se pueden empezar a confrontar y replantear las pre concepciones existentes del criterio de divisibilidad, al fomentar las potencialidades matemáticas de los estudiantes y modificar las actitudes negativas que puedan existir frente a éstas. El descubrimiento y aprendizaje de nuevos saberes conceptuales y procedimentales de la teoría de la divisibilidad les debe ir dando la seguridad y confianza que el ellos necesitan para avanzar en su proceso de aprendizaje en la teoría de números.

El estudio de la divisibilidad y por ende de la teoría de números, es uno de las principales temáticas de las clases de matemática que los estudiantes de secundaria desarrollan desde los primeros años de educación primaria, lo que debe indicar a los docentes la importancia que ésta tiene dentro del desarrollo del pensamiento. Si este pensamiento es desarrollado con fuertes bases de argumentación y procesos comunicativos, le será de gran utilidad en el momento en que tenga que hacer su transición a la educación superior. Falk M. y Acevedo M. (1997) en su libro *recorriendo el algebra…* expresan "*en la teoría de números, el instrumento de análisis que* *tradicionalmente se usa para explorar propiedades e interrelaciones numéricas es el estudio de la divisibilidad"*[1].

Si se desea que la práctica de la enseñanza desarrolle competencias matemáticas, se debe plantear un proceso de enseñanza y aprendizaje basado en estructuras didácticas que se orienten hacia el desarrollo de las mismas. Todo esto invita al docente a diseñar procesos y actividades contextualizadas de situaciones que muestren al estudiante una visión integral del conocimiento matemático.

En el aula de clase de secundaria la divisibilidad, hoy en día, no se trata con esta visión integral, por lo que debe reformarse la concepción que se tiene de este tema, ya que la misma queda reducida en términos muy simples. Por ejemplo: los criterios de divisibilidad que se estudian en los primeros años de secundaria son muy poco conocidos y recordados. Los más recordados y utilizados por la facilidad con que pueden ser definidos son los de la divisibilidad por 2, 3, 5, 10; pero quedan otros criterios que son excluidos del plan de estudios y difícilmente hasta para el mismo docente se comprenden y recuerdan. Todo lo anterior sin mencionar que la parte propositiva y demostrativa queda olvidada; así como, el estudio del ¿por qué? parece no ser de interés y relevancia en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de la teoría de números en la educación secundaria se conceptualiza la descomposición de un número en sus factores primos, pero se queda en el simple hecho de aprender a calcular el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo. Todo lo cual se aborda desde la praxis, reduciéndolo al "cómo" se desarrollan las problemáticas y a las reglas que puedan corresponder a cada caso. El teorema de la divisibilidad con residuo y la expresión de un número en su forma polinómica en base diez, son del desconocimiento total por los estudiantes. Esta realidad hace que el docente pierda la oportunidad de hacer trabajar a los estudiantes con elementos que deben permitir un desarrollo de muy buenas habilidades matemáticas.

Es por esto que es importante tanto para el docente como para el estudiante el ahondar en el concepto de divisibilidad, utilizando herramientas de la teoría de números, importantes para poder afrontar posteriormente una matemática más abstracta.

Desarrollo

Es prioritario en este trabajo presentar un modelo didáctico e incluirlo dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes de grado noveno de matemáticas, que les permita desarrollar sus habilidades de comunicación y cooperación con sus compañeros; así como, socializar sus capacidades y mostrar las habilidades que han adquirido en el proceso educativo.

La propuesta considera la necesidad de estudiar el **pensamiento** y la **conducta.** Estas dos variables tienen como característica distintiva la ejecución del pensamiento en función del currículo y en este caso específico, la teoría de la divisibilidad y los elementos que permiten comprenderla.

Esta propuesta enfatiza en que se trata de buscar cambios auto dirigidos por el propio estudiante; al entender que es el estudiante quien debe asumir el papel principal, al ser su aprendizaje el producto del descubrimiento dentro de su proceso formativo. Por su parte, al

[1] Falk M. y Acevedo M. (1997) Recorriendo el algebra: de la solución de ecuaciones al álgebra abstracta. Ed. Universidad Nacional de Colombia, Colciencias, p. 10

docente le corresponde brindar el apoyo y el acompañamiento necesario; así como, el desarrollo del clima de aprendizaje necesario que modifiquen sus conductas. Es decir, que el sistema educativo le proporcione espacios pedagógicos que lo motiven y le permitan pensar.

Existen múltiples aproximaciones, de diferentes autores, sobre los procesos de pensamiento; sin embargo para esta propuesta es importante destacar la de Labarrere (1996), quien considera "que el pensamiento es un proceso de búsqueda, de descubrimiento, de investigación constante, que se manifiesta a través de la elaboración de hipótesis, razonamientos y emisión de juicios."[2]. Así mismo, Labarrere (1996) expresa: *"El aprendizaje es una consecuencia del pensamiento ya que de los procesos de éste se derivan: las ideas, los conocimientos, las conclusiones y los argumentos; y en el nivel del pensamiento superior se encuentran: los juicios, la solución de problemas y el análisis crítico"*[3].

Además del desarrollo de pensamiento, esta propuesta considera de vital importancia los procesos de comunicación matemática y retoma los planteamientos de Bereiter y Scardamalia (1986) quienes proponen que *"la escritura es una oportunidad para pensar";* además, señalan a ésta como *"un reflejo y uno de los principales vehículos del pensamiento, pues exige que quien escribe razone, por lo que es considerada como estrategia cognitiva."*[4]. El desarrollo de procesos comunicativos son por tanto necesarios e importantes si se quiere que los estudiantes tengan unos dominios no solo conceptuales matemáticos, sino del propio lenguaje de esta disciplina.

Si se tiene en cuenta que, bajo la mirada de esta propuesta didáctica, el aprendizaje es visto como algo progresivo que se va dando en la medida que el estudiante logra realizar ciertas tareas de pensamiento, y si se toma como referencia a Shuell (1990) quien plantea que *"el aprendizaje significativo ocurre en una serie de fases, que dan cuenta de una complejidad y profundidad progresiva"*[5], entonces se pueden plantear tres fases. Estas fases, con sus propias características y junto a la malla curricular deben orientar y servir como indicador del trabajo a realizar en el aula de clase y así incentivar en los estudiantes los procesos de aplicación, que en este caso es, de los criterios de divisibilidad:

- **Percepción del conocimiento**

Permite al estudiante examinar los problemas generadores, en busca de información, y explorar los diferentes ámbitos desde los cuales puede abordar el problema en busca de una solución. El estudiante percibirá la información encontrada de manera aislada aparentemente sin conexión, y progresivamente irá construyendo un dominio global con la información obtenida.

- **Interiorización del conocimiento**

Se denomina así porque ayuda a despejar ideas y afinar criterios, despojándolos de elementos distractores. En esta fase el estudiante empieza a observar similitudes entre la información recopilada, sus procesos comunicativos dan cuenta de un pensamiento más

---

[2] LABARRERE, A.F. (1996) Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, p. 132.

[3] LABARRERE, A.F. (1996) Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

[4] BEREITER, C. y SCARDAMALIA, M.(1986) Cognitive coping strategies and the problem of inert-knowledge, en Chipman, S., J. Segal y R. Glaser (Comps.), Thinking and learning skills. Researchs and open questions, vol. 2, pag.45.

[5] SHUELL, T. (1990) Phases of meaningful learning. Review of educational research, 60, 4, 531-548

abstracto, el estudiante usa los conocimientos percibidos en la solución de las situaciones problema.

- **Aplicación y demostración del conocimiento**

Recibe esta denominación porque preparan el terreno y abren camino para el hallazgo de soluciones y planteamientos creativos, es aquí donde se observa la aparición progresiva de interrelaciones que permiten dar lugar a esquemas demostrativos y las verificaciones realizadas comienzan a ser más automáticas, así como la ejecución de procedimientos se fundamentan en estrategias y dominios conceptuales específicos

La enseñanza de la matemática debe estar orientada a propiciar el desarrollo del pensamiento, para que el estudiante llegue a la comprensión de los conceptos, como consecuencia de su capacidad para establecer relaciones. Es decir, generalizar e integrar, y por tanto la acción pedagógica debe estar conectada no solamente con aspectos del pensamiento estrechamente ligados al concepto particular que se desea ayudar a construir (en este caso el comprender criterios de divisibilidad), sino que debe extenderse a otros elementos de la teoría de números y de la divisibilidad con los que se relaciona. Es por esto, que es necesario hacer un desglose taxonómico de la divisibilidad, como objeto de estudio que se le plantea a los estudiantes, teniendo en cuenta para este desglose los niveles de competencia:

Taxonomía interpretativa

En la que se identifican todos aquellos elementos y conceptos iniciales necesarios para la comprensión y estudio de la divisibilidad.

Se parte del estudio de la divisibilidad de un número **a>1** (figura 1), por medio de la cual se puede realizar una clasificación del mismo, ya sea:

En un número **primo** cuando **a** tiene como únicos divisores a 1 y el mismo. En esta taxonomía se plantea la criba de Eratóstenes, la cual permite identificar de manera directa los números primos **p**, consistente en escribir una lista de los enteros entre 2 y **m**, para posteriormente ir tachando los múltiplos de cada número primo encontrado así por ejemplo después del 2 se tacharían el 4, 6, 8, ..., ya que cada uno de estos números tiene como factor a 2, y por lo tanto sería compuesto. Posteriormente se toma el primer número no tachado, el 3 que necesariamente debe ser primo, y se eliminan cada múltiplo de 3; es decir, se tacha 6, 9, 12,..., que son compuestos también. Se continúa repitiendo esta operación, y eliminando también los múltiplos de 5, de 7, etc. Es claro que muchos números pueden llegar a ser tachados más de una vez ya que al ser compuestos pueden tener dos o más primos como factores. Este proceso finaliza cuando todos los múltiplos de **p** distintos de **p**, para todo primo **p** ≤ $\sqrt{m}$ han sido eliminados. Los enteros que quedan después de este tamizado son los primos menores o iguales a **n**.

El optimizar este proceso conduce al método de **división por tentativa**, al acotar nuestra búsqueda por medio de un análisis. Si tenemos dos enteros **s, t** tales que **s** > $\sqrt{m}$ y **t** > $\sqrt{m}$, entonces **s t** ≥ $\sqrt{m}\sqrt{m}$ = m. Esto es, entre los factores primos **p** de **m**, necesariamente hay uno que es menor o igual a la $\sqrt{m}$, por lo que, si al dividir **a** por todos los primos menores o igual a su raíz, no hay un cociente 0 se dirá que es primo. En los **compuestos** tomando los análisis anteriores, cuando este **a** posee al menos un divisor primo menor o igual a su raíz, que al dividir **a** da como cociente 0.

Estos hechos permiten plantear para el caso de los números compuestos, los números que son divisores del mismo; Estos divisores son el fundamento para que el estudiante pueda reescribir el número por medio del **teorema de la división con residuo** (Sean a, b enteros, donde b > 0, entonces existe una pareja única de enteros q y r, tal que $a = b.q + r$ y $0 \leq r < b$) o **la expresión en factores primos**, formas que conduce y permiten el estudio del MCD y el mcm, y de allí, la definición y estudio de los primos relativos cuando el MCD $(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n)=1$.

Taxonomía propositiva

se identifican aquellos elementos sobre los cuales el estudiante puede hacer aportes desde sus conocimientos al utilizar sus propios métodos de resolución de problemas y comprensión de criterios. Todo esto, a través de argumentos bien fundamentados a partir de los elementos trabajados en la taxonomía interpretativa; además, se trabajan elementos conceptuales como los criterios de divisibilidad (figura 2).

Cuando se le pide al estudiante que pruebe si un numero es divisible por otro; en general, se encuentra que el estudiante realiza la operación división y justifica su respuesta de acuerdo al cociente obtenido, si este es cero da por hecho que es divisible o de lo contrario si el cociente es mayor a 0 no lo es, Sin embargo, ya que uno de los fines que se pretende dentro del estudio de la divisibilidad es la reestructuración del pensamiento, es aquí donde el estudio de los criterios cobra importancia; más cuando, este estudio pretende no solo el aprendizaje de criterios sino su comprensión por parte del estudiante, al hacer uso de elementos de la teoría de números.

Es sabido que en el aula de clase estos criterios son trabajados de forma oral; por ejemplo, **un número es divisible por dos, sí y solo si es par o termina en cero**. Aunque supongamos que el estudiante es capaz de recordar estos criterios, su desarrollo en términos matemáticos y su comprensión quedan supeditados a las necesidades del currículo, razón por la cual se pierde la oportunidad de realizar un verdadero proceso de enseñanza aprendizaje de la teoría de la divisibilidad.

En esta taxonomía propositiva el uso de los procesos de comunicación matemática constituyen el medio por el cual es estudiante podrá apropiarse de la teoría de la divisibilidad, al lograr reescribir los componentes lingüísticos en términos matemáticos, tomando el ejemplo, $\mathbf{2 \mid a \leftrightarrow a_0 = 2n}$ ó **0;** así mismo, es en esta taxonomía donde plantea la oportunidad que estudiante proponga de acuerdo a la comprensión que realiza las propiedades de la división.

Taxonomía argumentativa

se incluyen aquellos elementos que el estudiante puede utilizar para dar soporte y argumentar las pruebas realizadas; tales como: las congruencias, las ecuaciones diofánticas o la expresión polinómica de un número (figura 3).

La integración y el trabajo con estos tres niveles taxonómicos de la divisibilidad generan la malla conceptual que se denominó **taxonomía de la divisibilidad** la que permite identificar los saberes negociables y no negociables, que debe desarrollar el estudiante para la comprensión de la divisibilidad, así como, el planteamiento de la prueba y la argumentación .

Con base a los planteamientos anteriores y teniendo en cuenta los pasos para el diseño de la **malla curricular** mencionados posteriormente, se integran los elementos necesarios dentro del proceso de enseñanza aprendizaje, con la cual se construye el modelo didáctico que se plantea:

- **Definir el objeto problémico**

Se debe señalar aquí cuál es la meta problémica por ciclo para el área, cuál será el problema a abordar a nivel del ciclo dentro del área. El objeto problémico por ciclo será la encargado de orientar todas las acciones pedagógicas, para garantizar la coherencia y articulación de los conceptos y saberes seleccionados en torno a él.

El objeto problémico del ciclo bien podría asumirse de forma interdisciplinaria a partir de las diversas áreas del saber dando lugar a la constitución de campos del conocimiento integrados y con una misma meta en común.

- **Establecer los objetivos del trabajo a desarrollar acorde al objeto problémico**

Se debe indicar en este punto el propósito u objetivo básico que se pretende cumplir, teniendo en cuenta el objeto problémico que se planteo; es por esto, que la finalidad en el caso de este proyecto de investigación es el de observar e identificar qué elementos de la teoría de la divisibilidad y la teoría de números surgen de manera espontánea dentro del proceso de comprensión que de los criterios de divisibilidad hacen los estudiantes, para establecer posibles mejoras al proceso de enseñanza aprendizaje.

- **Priorizar saberes mínimos no negociables**

Se establecen aquí los contenidos o conceptos claves o mínimos, imprescindibles de ser trabajados, sobre los cuales se hace la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes.

La relación de los saberes no negociables equivale al rigor disciplinar y hace las veces de estándares de calidad. Por tanto, deben ser el punto de partida para la elaboración de las preguntas problematizadoras y de los indicadores de logro y/o niveles de desempeño de competencias que deben ser tenidos en cuenta para los procesos de evaluación y promoción.

- **Definir los logros correspondientes a cada saber mínimo**

Se debe señalar aquí el logro correspondiente al saber mínimo no negociable señalado, que tenga relación además con el objeto problémico del ciclo y la finalidad del grado.

- **Generar los indicadores del logro propio de cada saber**

En correspondencia al logro previamente planteado, a la finalidad y objeto problémico; se deberá reseñar aquí, los respectivos indicadores de logro requeridos además como criterios de evaluación.

- **Crear una pregunta problematizadora que integre y sirva de hilo conductor**

Se debe definir aquí, la pregunta problematizadora cuyo objeto será generar procesos de desequilibrio cognitivo en los estudiantes de manera que conlleve a acciones de consulta e investigación para resolver la situación planteada. Por tanto, se convierte en el punto de partida de la ruta a seguir por el grupo de estudiantes. Esta pregunta originará otras preguntas las que deben ser formuladas y contestadas por los estudiantes, con el acompañamiento del docente.

Cuando el docente está diseñando el problema que va a plantear a sus estudiantes debe tener en cuenta que el problema ante todo debe captar el interés de todo el grupo; además, debe motivarlos a consultar y examinar en diferentes fuentes de información sobre los conceptos y objetivos que se quieren aprender. El problema debe ser planteado en relación con el objeto problémico, los objetivos que se plantearon y procurando que sea contextualizado al entorno del estudiante. De esta manera los alumnos deben encontrar un sentido en el trabajo que realizan. Así mismo, debe ser planteado de manera tal que motive al estudiante a tomar decisiones o plantear hipótesis siempre de manera fundamentada y con argumentos lógicos. El problema debe permitir el afianzamiento de su desarrollo cognitivo tanto en la información necesaria como en la identificación de pasos o procedimientos necesarios para resolver el problema. De esta forma, debe permitirle justificar cada una de sus decisiones y razonamientos que guarden coherencia con el objeto problémico.

- **Establecer qué ámbitos o ejes generadores se verán implicados en el problema a indagar**

En esta sección se definen, partiendo de los ámbitos, ejes o dimensiones conceptuales generales establecidos por el MEN[6], en qué medida están siendo abordados desde la pregunta problematizadora.

Los ámbitos generadores: numérico y sistemas de numeración, espacial y sistemas geométricos, métrico y sistemas de medida, aleatorio y sistemas de datos, variacional y sistemas algebraicos y analíticos, se constituyen en las diferentes formas en que se puede realizar una aproximación a los conceptos disciplinares. Estos ámbitos recogen el objeto de estudio de cada una de las disciplinas que conforman el área y permite establecer un diálogo interdisciplinar en su interior, dando coherencia y cohesión a los saberes integrados. Estos ámbitos permiten abordar un mismo objeto problémico pero desde diferentes dimensiones, aportando una visión global de los procesos y enriqueciendo la interpretación que el estudiante hace de la realidad.

- **Explicar paso a paso los elementos de la ruta de trabajo**

Permite establecer por momentos o escenarios, el proceso fundamentado en las fases de pensamiento que guiará la ejecución o gestión del problema planteado para el logro. La ruta de trabajo dará lugar a la guía o módulo de trabajo que desarrollarán los estudiantes en su proceso de hallazgo de la solución al problema planteado.

Los elementos y dinámicas de la propuesta mencionados anteriormente y que se resumen en la figura 4, hacen parte de lo que denomina D'Amore (2010) el **contrato didáctico** el cual se define como *"una comunidad de prácticas compartidas que tienen como propósito la construcción de conocimiento"[7], en el esquema se observan las "cláusulas"[8],* que hacen referencia a los compromisos que adquieren tanto el docente como el estudiante; así como, las necesidades y condiciones necesarias que se derivan de la propuesta didáctica planteada en el presente trabajo de investigación con el fin del desarrollar las habilidades de pensamiento que permitan al estudiante afianzar sus prácticas de verificación y prueba de manera argumentada.

A manera experimental esta propuesta se introdujo en un estudio de diez y seis casos, con una muestra no probabilística a juicio (a voluntad de los estudiantes). En la que se realizo un **análisis y síntesis** de las realidades observadas y plasmadas en las producciones o pruebas escritas. Además, se le realizaron entrevistas a los estudiantes. Esta experiencia permitió **inducir y deducir** las variables que influyen en los estudiantes de noveno frente al reto de **comprender**

[6] Estándares básicos de competencias en matemáticas, Ministerio de Educación Nacional, p. 58

[7] D'AMORE, B. et al. (2010) "La didáctica y la dificultad en Matemática. Análisis de situaciones con falta de aprendizaje". Editorial Magisterio, Bogotá, Colombia. P. 150

[8] D'AMORE, B. et al. (2010) "La didáctica y la dificultad en Matemática. Análisis de situaciones con falta de aprendizaje". Editorial Magisterio, Bogotá, Colombia. P. 156

criterios de divisibilidad, partiendo de elementos de dicha teoría, con el fin de **modelar** una aplicación generalizada en la resolución de problemas de la misma. Posteriormente se realizo un análisis de tipo cuantitativo con el fin de triangular la información obtenida y así integrarla para la obtención de una visión global de las problemáticas: el estado de pensamiento y los elementos que influyen dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de esta temática.

Conclusiones

Se pudo apreciar que los procesos de comunicación matemática de los estudiantes, objeto de este estudio, fueron pobres en cuanto al "vocabulario" utilizado al formalizar y socializar los aportes. Se observan una mediación errónea entre lo que piensan, hacen y dicen. Esto conlleva a inferir que estos estudiantes poseen bajas competencias en la expresión oral y escrita de las matemáticas; hecho que, puede ser la causa de los resultados no deseados a la hora de realizar verificaciones o las pruebas necesarias para justificar un resultado.

El bajo desarrollo de pensamiento abstracto y la no existencia de estructuras de pensamiento le dificulta al estudiante la asimilación de nuevos conocimientos, y su inclusión en la estructura mental. Esto conlleva a que el estudiante memorice momentáneamente nuevos saberes, razón por la cual es recomendable el uso de propuestas que construyan el conocimiento por medio del descubrimiento, fundamentado en las estructuras de pensamiento reales que poseen los mismos y no de procedimientos o conocimientos insertados sin relación alguna. Es decir, cuando no tienen un sentido lógico con la estructura de su pensamiento.

Los conflictos cognitivos que presentan los mismos al abordar la pregunta problematizadora y tratar de plantear una solución no son resueltos con facilidad; se observa que al pedirle al estudiante que trate de identificar los saberes no negociables necesarios para la resolución de la pregunta problema no logra identificarlos y trata de hacer uso de saberes que no tienen relación alguna con el objeto problémico.

Aunque las situaciones problema se plantearon con el fin de generar un conflicto conceptual en los mismos, se observó que éstas realmente no lo lograron ya que los estudiantes no procuraron una búsqueda de estrategias nuevas para su solución. Sólo encontraron la manera de hacer uso de estrategia conocidas, la cual se pretendía no fuera utilizada. Por lo anterior, es recomendable aquellos docentes que implementen una propuesta, análoga a esta, deben buscar situaciones problema que realmente lleven al estudiante a romper los esquemas con los que cuenta para la resolución de los mismos; es decir, sean capaces de enfrentarlo como un reto.

Un trabajo coherente con esta propuesta desde los grados iniciales debe permitir a los estudiantes generar toda una estructura de un pensamiento matemático concreto con el cual podrá abordar situaciones problema sin verse inhibido por el desconocimiento de los elementos necesarios o no comprensión de lo que se le está planteando.

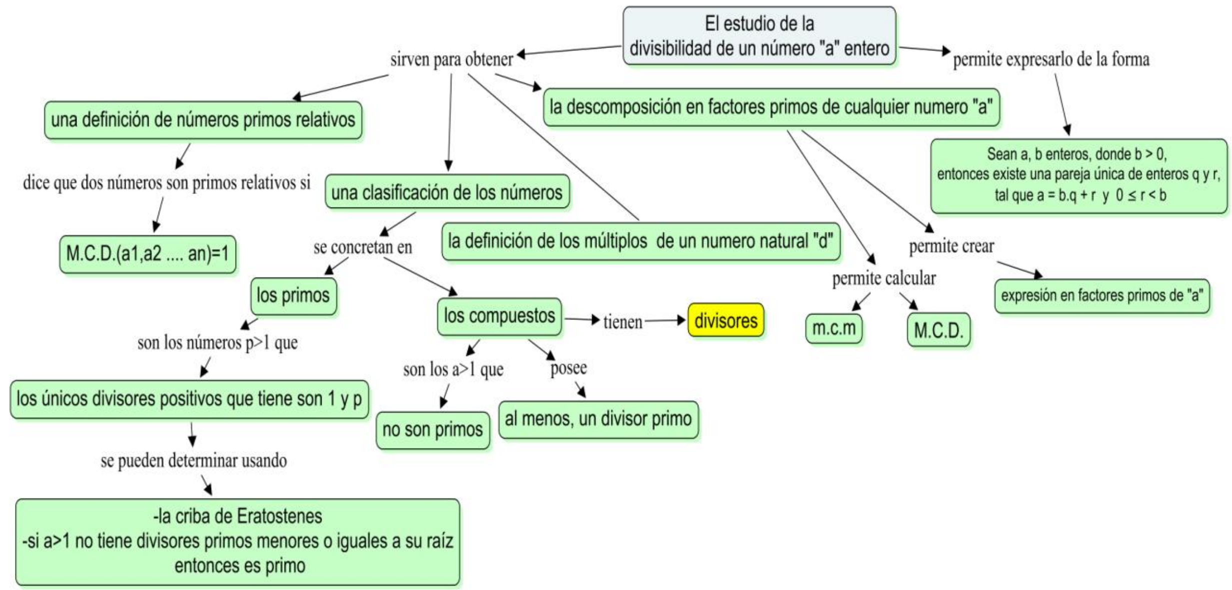

Figura 1. Taxonomía interpretativa de la divisibilidad

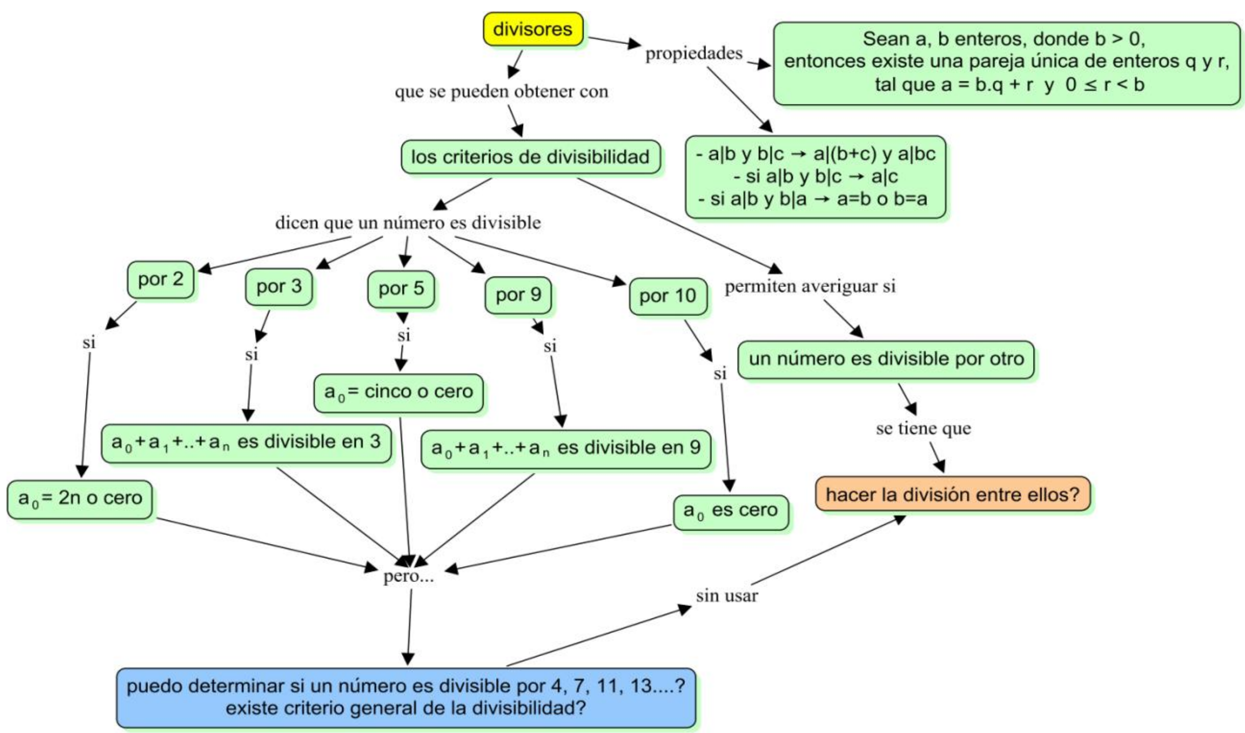

Figura 2. Taxonomía propositiva de la divisibilidad

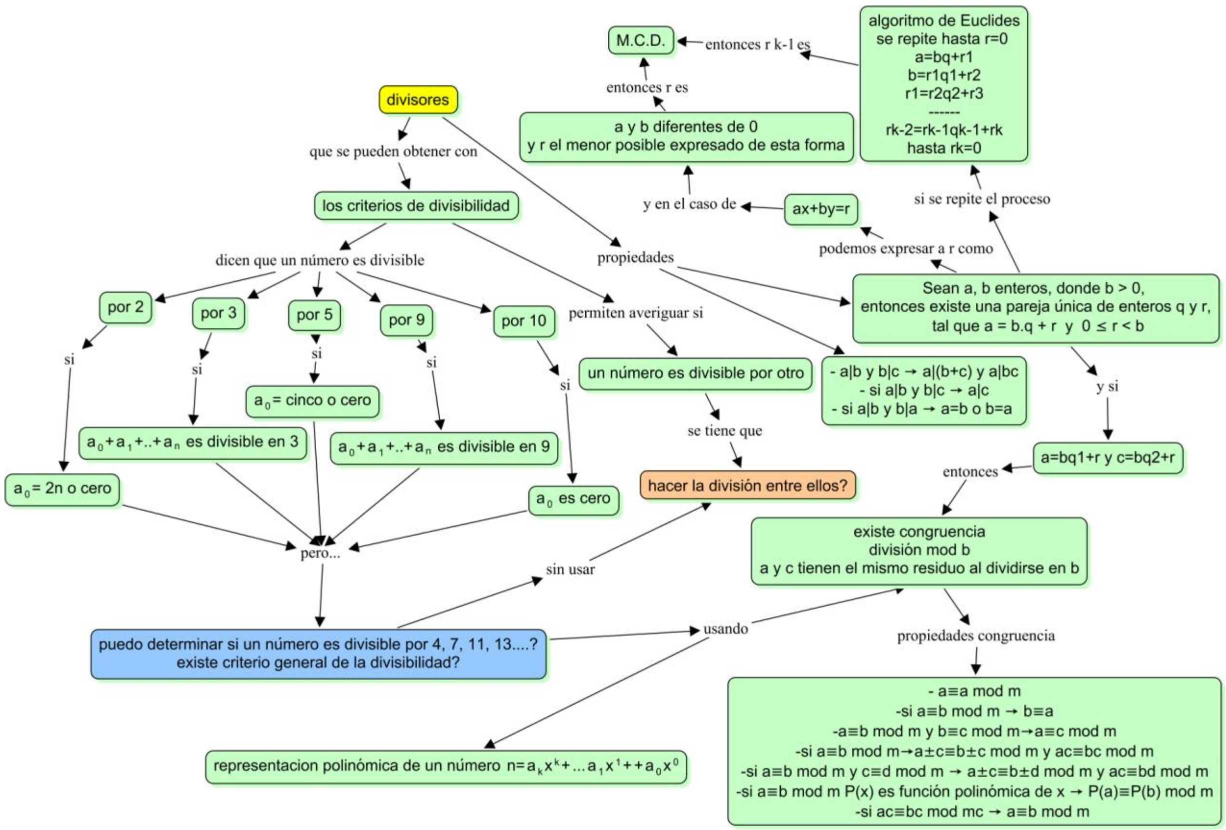

Figura 3. Taxonomía argumentativa de la divisibilidad

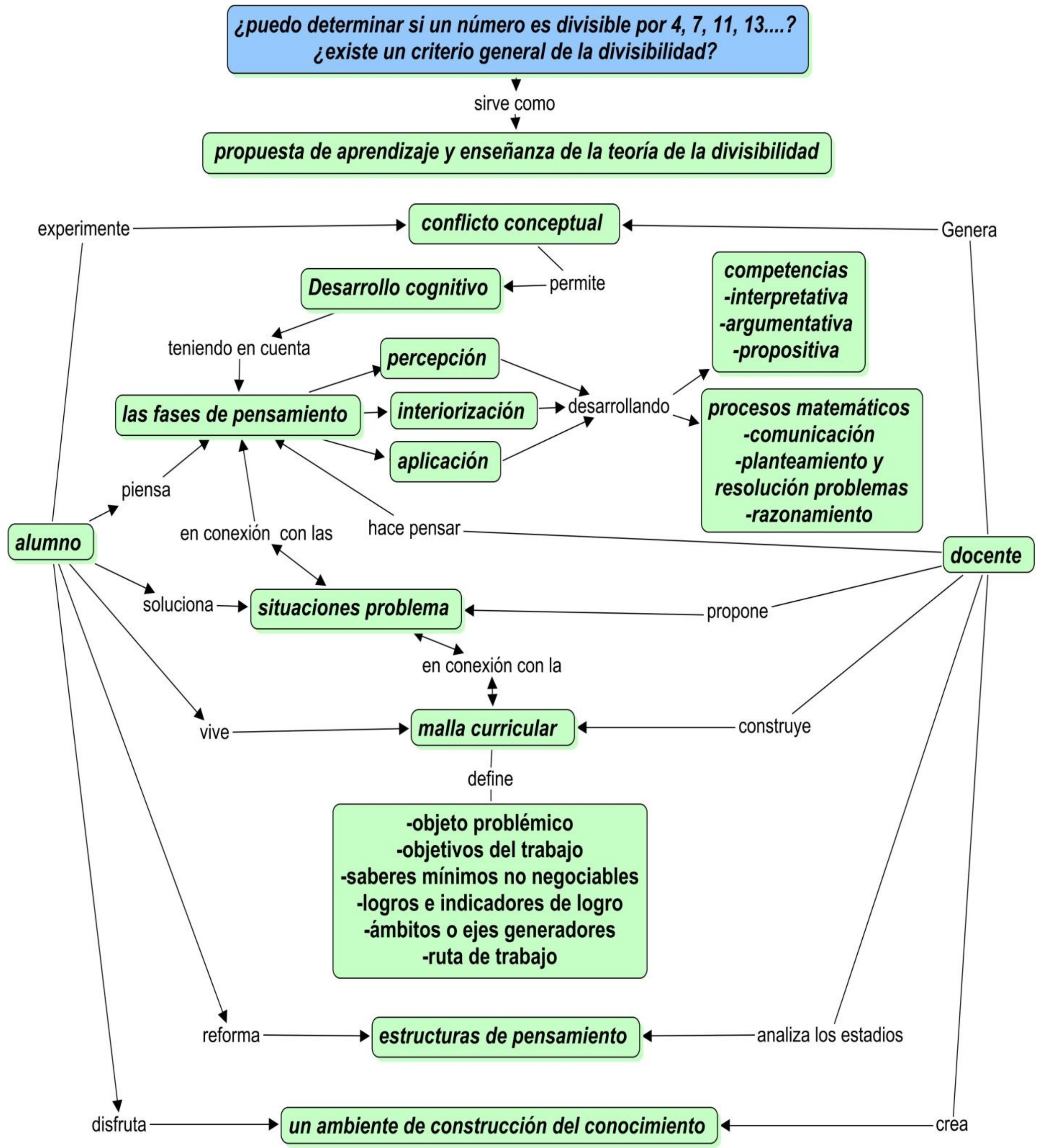

Figura 4. Modelo didáctico de la propuesta

BIBLIOGRAFIA

Bereiter, C. & Scardamalia, M.(1986) Cognitive coping strategies and the problem of inert-knowledge, Thinking and learning skills. Researchs and open questions.

Bodi, P. (2008) "Análisis de la comprensión de la divisibilidad en los números naturales"

Brochero, F. & Restrepo, J. I.. (2006) "Un recorrido por la Teoría de Números". Editorial de la Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

D'amore, B. et al. (2010) "La didáctica y la dificultad en Matemática. Análisis de situaciones con falta de aprendizaje". Editorial Magisterio, Bogotá, Colombia.

Díaz, F. & Hernández, G. (1998) "Estrategias docentes para un aprendizaje significativo". Editorial Mc Graw Hill, México.

Falk, M. & Acevedo, M. (1997) "Recorriendo el algebra: de la solución de ecuaciones al álgebra abstracta". Universidad Nacional de Colombia, Colciencias, Bogotá, Colombia.

Fandiño P., M. I. (2010) "Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática". Editorial Magisterio, Bogotá, Colombia.

García P., M. et al. (2008) "Metodología de la Investigación". Universidad de Holguín, Cuba, Edición digital

Hayman, J. (1981) "Investigación y educación". Ed. Paidós

Labarrere, A. F. (1996) "Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos". Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Ministerio de Educación Nacional (2005) "Estándares básicos de competencias en matemáticas"

Shuell, T. (1990), "Phases of meaningful learning". Review of educational research

Zazkis R. (2001) "Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes", Revista latinoamericana de investigación en matemáticas educativa, vol.4 número 1.