A construção de significados para a decomposição em fatores primos

Gabriela dos Santos **Barbosa**
UERJ/FEBF
USS
FIC
Brasil
gabrielasb80@hotmail.com

Resumo

Este trabalho investigou a compreensão da decomposição de um número natural em fatores primos e do seu uso na simplificação de cálculos por alunos do 6º ano do ensino fundamental (10 a 12 anos), do Rio de Janeiro, Brasil. Buscou-se identificar os conceitos matemáticos que se associam à decomposição em fatores primos e tornam-se necessários à sua compreensão bem como o conjunto de situações que lhes dão significado e suas múltiplas representações. Coletaram-se os dados por meio da realização de um teste diagnóstico inicial, de uma intervenção de ensino e de um teste diagnóstico final. Apresenta-se uma análise qualitativa dos resultados baseada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Identificaram-se a multiplicação, a divisão e suas propriedades, as noções de fator e divisor e a distinção entre números primos e compostos como conceitos essenciais e indissociáveis para a compreensão da decomposição em fatores primos. Criaram-se representações aritméticas e geométricas para lidar com tais conceitos.

Palavras-chave: números primos, decomposição em fatores primos, situações, representações, Teoria dos Campos Conceituais.

Introdução

As ideias que apresentamos neste trabalho constituem parte de uma pesquisa mais ampla desenvolvida entre os anos de 2005 e 2008. Tal pesquisa originou a tese de doutorado *O Teorema Fundamental da Aritmética: jogos e problemas com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental* (Barbosa, 2008) e teve como objetivo desenvolver, analisar e avaliar uma proposta de ensino centrada nos principais conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). Buscamos identificar e compreender os argumentos e os procedimentos utilizados por um grupo de 22 alunos de 6º ano (antiga 5ª Série) do Ensino Fundamental, ao trabalharem em um cenário de aprendizagem em que privilegiamos a diversificação das situações nas quais tais conceitos estão envolvidos e o uso das várias simbologias que lhes são associadas.

O TFA garante que todo número natural maior do que um pode ser decomposto de maneira única em fatores primos e os conceitos relacionados a ele são: definições de múltiplos e fatores de um número, critérios de divisibilidade, diferenciação entre primos e compostos e decomposição de um número em fatores primos. Tais conceitos compõem o campo designado Teoria Elementar dos Números. Trata-se de conceitos muito relevantes não só na prática cotidiana, mas, sobretudo, dentro do corpo de conhecimentos matemáticos a serem estudados pelos alunos durante os ensinos Fundamental e Médio.

A divisibilidade associada a números naturais envolve a divisão e a multiplicação. O fato de conhecer alguns critérios de divisibilidade permite ao aluno efetuar cálculos mentais e estimativas. Saber decompor um número em fatores primos auxilia-o na obtenção do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) e do máximo divisor comum (m.d.c.), bem como no cálculo envolvendo radiciação. Todos estes conceitos são partes do conteúdo programático de Matemática desde o 4º ano (antiga 3ª Série) do Ensino Fundamental, sendo retomados nos anos subsequentes apenas com aumento gradual dos números, cuja decomposição é solicitada aos alunos.

A pesquisa foi dividida em três partes. Na primeira, de cunho exploratório, aplicamos um teste diagnóstico, que nomeamos avaliação inicial, a partir do qual pretendíamos obter informações referentes à relação que os alunos já estabeleciam com os conceitos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética, cujos processos de construção estão em questão (propriedades da multiplicação, múltiplo, divisor, números primos e compostos, decomposição de um número em fatores primos). O que já dominavam plenamente? A que estratégias recorriam para solucionar problemas? Que erros cometiam frequentemente? De que pré-requisitos dispunham?

A segunda parte foi de cunho intervencionista, com a implementação de uma proposta de ensino composta por sete atividades e duas avaliações intermediárias. E, por fim, a terceira parte correspondeu à aplicação do segundo teste diagnóstico que nomeamos de avaliação final, com as mesmas questões da avaliação inicial.

O quadro teórico adotado foi a Teoria dos Campos Conceituais. Vergnaud (1990), ao pensar sobre os processos de ensino e de aprendizagem, em sua Teoria dos Campos Conceituais, atribui à criança e suas atividades sobre a realidade um papel decisivo no processo educativo e em seu desenvolvimento cognitivo. Entretanto, não negligencia o papel do professor. Ao contrário, o valor do professor está justamente em sua capacidade de estimular e utilizar essa atividade da criança. O professor é tido como pesquisador que busca identificar os conhecimentos implícitos na ação das crianças para lhes favorecer explicitá-los. Estes conhecimentos implícitos, nomeados teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, podem ser observados nos esquemas mentais e nas ações das crianças.

Embora reconheçamos a importância do trabalho do professor, o aspecto mais relevante na teoria de Vergnaud, que foi decisivo para que a escolhêssemos para fundamentar esta pesquisa, foi o valor que ele atribui às características específicas do conceito a ser construído pela criança tanto em seu processo de construção como em seu desenvolvimento cognitivo. É nessa direção que conduzimos nossa pesquisa, dando oportunidade para o aluno se expressar, descentralizando do professor a fala e o desenvolvimento de modos de pensar sobre o conteúdo matemático que está sendo estudado. Além disso, recorremos a uma diversidade de situações e representações visto que, segundo esta teoria, é por meio de situações a resolver que um conceito adquire sentido para a criança.

Finalmente, encontramos também nas pesquisas de Campbell e Zazquis (2002) um parâmetro para analisarmos os dados que coletamos na intervenção de ensino. Estes autores pesquisaram o processo de construção de conhecimentos da Teoria Elementar dos Números por alunos dos cursos de formação de professores e identificaram uma necessidade urgente de se rever o ensino deste assunto em tais cursos.

Metodologia

Esta foi uma pesquisa intervencionista que se classifica como uma pesquisa quase-experimental. Além disso, ela preserva certas características da pesquisa qualitativa. Os estudos experimentais, para Fiorentini e Lorenzato (2006, P. 104) "*caracterizam-se pela realização de experimentos que visam verificar a validade de determinadas hipóteses em relação a um fenômeno ou problema*". Experimentos compõem a parte da investigação na qual se manipulam certas variáveis e observam-se seus efeitos sobre outras.

Identificamo-nos com a classificação quase-experimental. Nosso "laboratório" foi a sala de aula de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, que possui carga horária semanal de Matemática de 4 horas. O experimento consistiu na realização de um teste diagnóstico inicial, uma intervenção de ensino, que teve 2 meses de duração e um teste diagnóstico final. Contamos com a participação de todos os 22 alunos da turma e da professora.

Quando realizávamos atividades em grupo, a formação destes ocorria aleatoriamente. Não houve a formação rigorosa de um grupo a ser pesquisado. Nossa intervenção de ensino foi composta por quatro blocos de atividades cujo detalhamento pode ser encontrado em Barbosa (2008). Procuramos atividades (jogos, problemas, desafios) e materiais (grãos, cartinhas, questões do livro didático, fichas e listas de exercício) que nos permitissem concretizar nosso objetivo: investigar o processo de construção de significados para a decomposição em fatores primos.

Fundamentadas na Teoria dos Campos Conceituais, as atividades tinham como objetivo geral estabelecer conflitos cognitivos nas crianças para que, dessa forma, elas, de fato, construíssem os conceitos.

Como favorecer a compreensão da decomposição dos números em fatores primos e de seu uso na simplificação de cálculos?

Como já se sabe, fundamentamos nossa pesquisa na Teoria dos Campos Conceituais. Segundo esta teoria, um conceito não pode ser visto isoladamente. Todo conceito está associado a muitos outros, sendo mobilizado em situações distintas e possui uma série de representações. Para favorecermos sua compreensão, deveremos reconhecer estes fatos. Daí a ideia de optarmos por trabalhar considerando o campo conceitual a que o conceito pertence e classificarmos as situações em que ele se apresenta.

Nesse sentido, nosso primeiro passo foi o estudo da Teoria dos Números, mais especificamente, da parte dela que se associa aos números inteiros e à divisibilidade. Por meio de tal estudo, identificamos os principais conceitos associados à decomposição em fatores primos: a multiplicação, a divisão, suas propriedades e a reversibilidade entre elas, as noções de múltiplo e fator, a distinção entre números primos e números compostos, as técnicas de decomposição, o

Teorema Fundamental da Aritmética, o uso da decomposição para simplificar cálculos, listar múltiplos e fatores, obter m.m.c. e m.d.c. entre pares de números.

Em seguida, refletimos sobre como estes conceitos se associam entre si e os tipos de situação em que estão inseridos. Traçamos uma sequencia de ensino que, a nosso ver, posta em prática, criaria condições para que as crianças compreendessem e utilizassem a decomposição em fatores primos na simplificação de cálculos. De acordo com os dados coletados em sala de aula e analisados em Barbosa (2008), tivemos sucesso ao implementar esta sequência e são ações que, coordenadas, favorecem a compreensão da decomposição em fatores primos e seu uso na simplificação de cálculos:

1º) Efetuar divisões e discernir as exatas das não exatas;
2º) Produzir igualdades matemáticas que representem estas divisões;
3º) Aplicar a reversibilidade entre multiplicação e divisão para obter outras igualdades matemáticas a partir de uma igualdade dada;
4º) Refletir sobre as igualdades relacionadas às divisões exatas e, a partir daí, identificar as relações *múltiplo de* e *fator de* que se estabelecem entre os números envolvidos;
5º) Reconhecer as propriedades das relações *múltiplo de* e *fator de*;
6º) Listar o conjunto dos múltiplos e dos fatores de um número;
7º) Diferenciar números primos de números compostos;
8º) Criar representações para o produto envolvendo mais de dois fatores;
9º) Decompor números em fatores e, simultaneamente, escrever e refletir sobre as igualdades matemáticas referentes a cada decomposição; e
10º) Decompor números em fatores primos e, simultaneamente, escrever e refletir sobre as igualdades matemáticas referentes a cada decomposição.

Desta sequência, duas ações mereceram comentários. A primeira foi *listar o conjunto dos múltiplos e dos fatores de um número.* Pode parecer ambíguo e desnecessário termos traçado tais ações, uma vez que, até então, as crianças já seriam capazes de reconhecer se um número é, ou não é, fator ou múltiplo de outro. Contudo, a prática em sala e a análise teórica das condutas das crianças nestas situações nos revelaram que o fato de reconhecerem se a relação de multiplicidade se estabelece, ou não, não lhes assegura a habilidade de listas os conjuntos de múltiplos e fatores. Isto porque, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, para cada um desses objetivos, as crianças mobilizam esquemas distintos.

Para estabelecer a relação de multiplicidade, elas precisam apenas efetuar uma divisão e inferir a partir da análise do resto. Já, para listar os conjuntos, precisam efetuar divisões ou multiplicações sucessivas e aí outros conhecimentos são mobilizados, como, por exemplo, reconhecer quando devem parar de efetuar as divisões ou multiplicações.

A segunda ação que mereceu comentários foi a de *criar representações para o produto envolvendo mais de dois fatores.* Neste caso, podemos pensar equivocadamente que, se os alunos decompõem um número em dois fatores, conseguirão decompô-lo em três ou quatro fatores sem maiores dificuldades. Entretanto, isto não foi verdade para os alunos que participaram de nossa pesquisa. Em princípio, a ideia de decompor em si já lhes pareceu estranha. Acostumados a valorizar o poder de síntese, costume este que é fruto de um ensino de Matemática tradicionalista, eles não compreendiam que a decomposição do número pode ser uma ação útil na resolução de uma situação problema.

A superação desta fase só foi possível com a nossa intervenção que, nos momentos de reflexão conjunta com os alunos, propúnhamos a leitura das igualdades matemáticas da direita para a esquerda, sentido de leitura pouco usual para eles. Tivemos, neste caso, a oportunidade de comprovar a importância das representações para a formação dos conceitos sugerida por Vergnaud (1990). A análise e leitura das igualdades matemáticas pelo grupo favoreceu o processo de construção do conceito de decomposição.

Entretanto, como se fundamentavam em tabuadas e, em razão da ênfase dada aos resultados no ensino das quatro operações, os alunos conseguiam apenas decompor em dois fatores. Quando confrontados com situações que lhes exigiam decompor em três ou mais fatores, não obtinham sucesso. Continuavam decompondo em apenas dois fatores. De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, isso ocorreu porque o esquema empregado na decomposição em três ou mais fatores é mais complexo que aquele empregado na decomposição em dois fatores. De fato, a decomposição em três ou mais fatores requer substituições sucessivas de um número por seus fatores até que todos os números escritos sejam primos. Interessante aí é que, quando admitiram a possibilidade de decompor em três fatores, passaram a decompor em quatro, cinco fatores sem que fosse preciso novamente nossa intervenção.

De que argumentos os alunos se valem durante o processo de significação acima? Que procedimentos adotam?

Como já dissemos, uma de nossas preocupações, ao elaborarmos a intervenção de ensino, foi oportunizar o emprego pelos alunos de procedimentos e argumentos diversificados. Não acreditamos num ensino em que o aluno não atue nem argumente. Assim, a cada atividade que propomos, procuramos criar condições para que os alunos participassem ativamente, expondo seus pensamentos e justificando seus procedimentos. A partir da análise das fichas de atividades dos alunos ao longo da intervenção de ensino, foi possível identificar os seguintes procedimentos:

− Diferentes estratégias de contagem. Nas situações em que foram levados a contar elementos de um conjunto, as estratégias mais usadas pelos alunos foram contar um a um, contar dois a dois, agrupar os elementos a serem contados e somar grupo a grupo, o número de elementos por grupo. Embora preferissem contar a efetuar cálculos, os alunos sabiam que, para lidar com grandes quantidades de elementos, poderiam agrupá-los e multiplicar o número de grupos pelo número de elementos por grupo, adicionando o resto, caso existisse. É importante lembrar que, inicialmente, esqueciam-se de adicionar os restos. Ora escreviam os cálculos no papel, ora realizavam-nos mentalmente. Na contagem, algumas vezes, usavam os dedos. Com eles, apontavam os elementos do conjunto ou indicavam as quantidades envolvidas na ação.

− Diferentes representações. Durante a intervenção de ensino, procuramos favorecer o uso de diversas representações para os conceitos envolvidos nas situações: gestos, desenhos, figuras geométricas, tabelas, língua materna, linguagem aritmética (igualdades matemáticas). No uso e na transferência destas linguagens, alguns alunos não extraíam da situação os elementos necessários ao seu tratamento matemático. Na representação de formas e embalagens, por exemplo, a representação retangular não foi um aspecto relevante para alguns alunos. Ainda com relação à linguagem, os alunos revelaram tendência para produzir igualdades matemáticas com base na sequência de suas ações, o que os conduzia à produção de falsas igualdades matemáticas. Por exemplo: $2 \times 5 = 10 + 4 = 14$.

− Obtenção dos fatores pela busca nas tabuadas. Para obter os fatores de um número, os alunos observavam nas tabuadas de 1 a 10, as igualdades matemáticas nas quais eles figuram. Esta ação tem um domínio de validade restrito, pois, nem todas as decomposições em dois fatores dos números constam nestas tabuadas. Este procedimento, gradativamente, foi sendo substituído pelas divisões nas quais o quociente assumia valores da sequência dos números naturais. Cabe destacar que o reconhecimento de um número primo também seguiu este caminho.

− Tentativa de enunciar critérios de divisibilidade. Quando precisavam decidir se um número é múltiplo de outro ou estimar cálculos nas atividades de decomposição, os alunos tentavam enunciar critérios de divisibilidade. Os critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10 eram enunciados corretamente. Entretanto, alguns alunos adaptavam esses critérios para outros números e produziam erros.

Em resumo, podemos dizer que, as estratégias descritas reforçam as ideias de Vergnaud (1990) no que diz respeito à evolução e mesmo sofisticação dos esquemas mobilizados pelos alunos para lidar com as situações. Inicialmente eles tentavam empregar os esquemas que eram válidos para situações que dominavam em situações que ainda não dominavam plenamente, o que os conduziu frequentemente a erros. A análise das situações, conduzida por nós e mediada pelas representações, permitiu-lhes observar semelhanças e diferenças entre elas. Durante a análise, os alunos levantavam hipóteses, faziam conjecturas, criavam novos esquemas ou alteravam aqueles que já possuíam. As situações iam sendo, assim, progressivamente dominadas.

Quais são os erros mais cometidos? Quais as causas desses erros?

A investigação do erro constitui-se em um domínio complexo. Coloca questões polêmicas sobre suas origens e as condições de sua realização em sala de aula e, ainda, sobre sua função no processo de ensino, não abordadas especificamente neste trabalho. Entretanto, comentamos sobre aqueles erros comumente mais cometidos pelas crianças na construção dos conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética, com vistas a contribuir para discussões mais amplas a respeito do significado do erro para a apropriação do conceito. Inferimos sobre suas causas fundamentadas nos registros orais e escritos e em entrevistas que realizamos informalmente com as crianças. Para esta síntese, os erros foram divididos entre aqueles que esperávamos, pois foram descritos em Barbosa (2002) e nas pesquisas organizadas por Campbell e Zazquis (2002), e os advindos das características específicas de nossa intervenção, portanto, não previstos em outras pesquisas.

Iniciando pelo primeiro grupo, apontamos a identificação das relações *múltiplo de* e *fator de* com, respectivamente, as operações de multiplicação e divisão. Como desdobramento deste erro, citamos, ainda, outro: o emprego equivocado dos termos *múltiplo* e *fator*. Muitas vezes, os alunos empregavam o termo múltiplo quando, na verdade, estavam se referindo ao fator e vice-versa.

A exploração exaustiva das igualdades matemáticas, em todos os momentos da intervenção de ensino, contribuiu bastante para que as crianças compreendessem que esses devem ser empregados para designar uma relação que se estabelece entre um par de números e não uma operação entre eles. Entretanto, observamos que o emprego equivocado dos termos permaneceu, entre alguns alunos e em algumas atividades, até o final da intervenção. Toda vez que tal erro ocorria, procurávamos refletir com a classe sobre ele. Nessas ocasiões buscávamos criar condições para que os alunos tivessem oportunidade de corrigi-lo.

Vale destacar que os ocasionais usos inadequados dos termos não impediram que as crianças avançassem na construção dos conceitos. Julgamos que as características de um ensino que valoriza os resultados, o fazer e não o comunicar é um dos fatores que levavam as crianças a insistir neste tipo de erro. Nesse tipo de ensino, no qual as crianças parecem estar inseridas desde o início de sua escolarização, não há uma preocupação em discutir e corrigir o processo, mas sim o resultado apresentado pela criança.

Outro aspecto que produziu erro foi a extensão das atividades, propostas para números inteiros positivos para o domínio dos racionais. Assim como ocorrido nas pesquisas de Campbell e Zazquis (2002), nas situações iniciais, que envolviam divisões no domínio dos números inteiros, algumas crianças expressavam restos ou quocientes com números racionais, o que as impedia de alcançar a solução dos problemas.

Antes de iniciar o estudo dos múltiplos e fatores, a professora estava trabalhando números decimais com a turma. O entendimento que as crianças tinham dos decimais era que eles eram obtidos quando se continuava a realizar a divisão de dois inteiros cujo resto era diferente de zero. Informadas de que deveriam trabalhar com inteiros e, portanto, não deveriam prosseguir com os cálculos, elas superaram facilmente esse erro.

Temos aí outra conseqüência de um ensino que valoriza o fazer, sem refletir sobre as ações. O aluno memoriza procedimentos sem discernir em que circunstâncias ou domínios eles são válidos, ou não.

Percebemos, também, a tendência de pensar aditivamente situações multiplicativas. Atribuímos tal fato à grande ênfase que a escola dá na introdução da multiplicação, que esta operação nada mais é do que a soma de parcelas iguais. Nessa visão de ensino, o que complica é que parece não haver uma preocupação em estender o conceito da multiplicação, restringindo-o à soma de parcelas iguais e ao algoritmo dessa operação.

Esta tendência pode ser verificada nas várias fases da intervenção: desde os processos de contagem de grãos de feijão, em que a maioria preferia somar os grãos de cada prato em vez de multiplicar o número de pratos pelo número de feijões por prato, até a fase final, em que, em uma situação de jogo, podendo optar por uma maneira de decompor os números, vários alunos optavam por decompor em parcelas. Quando desafiados a decompor um número relativamente grande em fatores primos, primeiramente, decompunham-no em duas parcelas para, em seguida, decompor as duas parcelas em fatores primos. Ou, ainda, quando decompunham um número em fatores primos e algum fator se repetia, escreviam o produto do fator primo pelo número de vezes que ele havia aparecido na decomposição. Erros deste tipo foram sendo extintos na medida que as crianças incorporavam a seus procedimentos, a decomposição em fatores primos por meio do desenho da *árvore de fatores*.

A seguir, apresentamos os principais erros específicos de nossa intervenção, os quais serão apresentados em dois blocos, segundo sua superação, total ou parcial.

Superação parcial

− Os múltiplos e fatores de um número são aqueles que constam nas tabuadas de 1 a 10;

− Uma igualdade matemática não pode representar uma situação. Apenas o resultado é importante, ou seja, o segundo membro da igualdade é o que importa;

− Falsas igualdades matemáticas, como 2 x 3 = 6 + 8 = 14;

− O primeiro número quadrado é o 1;

− O produto de dois fatores de um número sempre será fator deste número; e

− Todo número que tem na ordem das unidades os algarismos 0, 3, 6, 9, é divisível por 3.

Superação total

− Divisão é distribuição, o que significou um obstáculo para a divisão na qual o divisor é 1;

− Toda Progressão Aritmética de razão *n*, é sequência dos múltiplos de *n;*

− Não é possível decompor em mais de dois fatores;
− Não é possível repetir fatores na decomposição;
− Todo número ímpar é primo;
− Todo número primo é ímpar; e
− O conjunto dos múltiplos de um número é finito.

Considerações finais

Como exposto anteriormente, nosso estudo foi realizado com uma amostra escolhida por conveniência, envolvendo uma quantidade pequena de alunos (uma turma com 22 alunos). Embora tenhamos tratado os dados estatisticamente, sabemos que eles não são suficientes para fazermos generalizações para além do nosso estudo. Porém acreditamos, sim, que nossos resultados contribuam para dar pistas sobre a participação dos alunos nos processo de construção dos conceitos que enfocamos. Para que as crianças construam significado para a decomposição em fatores primos, defendemos a ideia da realização de uma intervenção de ensino minuciosa que vise não só ao teorema, mas a outros conceitos e propriedades associados a ele.

Podemos notar que as situações mobilizam esquemas mentais distintos. Há conhecimentos matemáticos que os alunos colocam em ação nas situações voltadas para a obtenção de fatores e para a simplificação de cálculos que não são utilizados nas situações de decomposição. Para que o aluno se valha da decomposição do número em fatores primos e, assim, poder identificar seus fatores ou simplificar cálculos em que ele está envolvido, é preciso realizar um trabalho constante e atento para a escrita numérica do aluno, que envolve a obtenção de igualdades matemáticas a partir da análise da decomposição do número em fatores primos.

É importante, contudo, esclarecermos que, por mais que tenhamos organizado uma intervenção com etapas bem definidas, a construção dos significados para decomposição em fatores primos e para os principais conceitos associados a ela é um processo. Como tal, não é linear, possui continuidades e rupturas. Nele, o aluno comete vários erros e, pautado nas situações que experiência, realiza generalizações, as quais foram descritas ao respondermos nossas questões específicas. Não podemos esperar que este processo se dê em uma semana, nem em um mês, nem em um ano. Como bem afirma Vergnaud (1990) o desenvolvimento de um campo conceitual se dá ao longo de vários anos, e não seria diferente no nosso estudo. Do nosso ponto de vista, assuntos associados à decomposição em fatores primos precisam ser retomados em vários momentos da vida escolar do estudante, contribuindo para que ele avance no reconhecimento e na generalização das propriedades dos números inteiros.

Bibliografias e referências

ALENCAR FILHO, Edgar de. *Teoria elementar dos números*. São Paulo: Nobel, 1988.

BARBOSA, Gabriela dos Santos. *Construção dos Conceitos de Múltiplo e Divisor à Luz da Psicologia de Vygotsky*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Santa Úrsula; Rio de Janeiro; 2002.

________, *O Teorema Fundamental da Aritmética: Jogos e Problemas com Alunos do Sexto Ano do Ensino Fundamental*. (Tese de Doutorado). PUC, São Paulo; 2008.

CAMPBELL, Stephen R.; ZAZKIS, Rina. *Learning and Teaching Number Theory*. Ed. Campbell & Zazkis, Ablex Publishing,Westport, 2002.

VERGNAUD, Gérard. *A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems*. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. (1982). Addition and subtraction. A cognitive perspective. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 39-59.

__________,. *Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'um example: les structures additives*. Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique. La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho, 1983.

__________, *La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23): 133-170, 1990.

__________, et al. (1990). *Epistemology and psychology of mathematics education*. In Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.) Mathematics and cognition: A research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge: Cambridge University Press.