



Competencias matemáticas empleadas por los estudiantes de educación primaria en la resolución de problemas geométricos

Susan **Sanhueza** Henríquez
Universidad Católica del Maule
Chile
ssanhueza@ucm.cl

Miguel **Friz** Carrillo
Universidad del Bío-Bío
Chile
mfriz@ubiobio.cl

Marjorie **Samuel** Sánchez
Universidad Católica del Maule
Chile
msamuel@ucm.cl

Carlos **Villegas** Muñoz
Universidad Católica del Maule
Chile
cvillegas@ucm.cl

Resumen

La investigación se focaliza en el estudio de las competencias matemáticas implicadas en la resolución de problemas geométricos en estudiantes de educación primaria. A través de técnicas etnográficas (observaciones y entrevistas), se indaga sobre las competencias que presentan dos estudiantes de cuarto año de educación primaria de un centro público ubicado en la zona centro sur de Chile. Hemos empleado como marco analítico las competencias matemáticas formuladas por el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) como son pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar y utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones. Los resultados demuestran que las competencias más desarrolladas son comunicar y modelizar, mientras la utilización de un lenguaje simbólico, formal y técnico aún representa una tarea pendiente en los escolares.

Palabras clave: modelizar, competencia, matemática, primaria, geometría.

Introducción

En educación, ya desde los años setenta se fortaleció una corriente denominada educación basada en competencias caracterizada por enfatizar la especificación, aprendizaje y demostración de aquellas competencias (conocimientos, destrezas y actitudes) que tienen una importancia central para determinadas tareas.

Actualmente, existen diversas revisiones de investigaciones sobre competencia y su relación con la enseñanza de las matemáticas (Godino, 2002; Rico, 2005). Específicamente en el ámbito de la educación matemática la competencia ha ido asociada a la noción de *conocimiento* (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Desde un punto de vista pragmático, conocer/saber implica el uso competente de los objetos constituyentes del conocimiento, la capacidad de relacionar entre sí dichos objetos, o sea, comprender, y de aplicarlos a la solución de problemas. De esta manera, en la medida en que los estudiantes desarrollan diversas capacidades mediante el dominio de estructuras conceptuales y el uso experto de distintas estrategias van incrementando paulatinamente sus competencias en matemáticas. Esta noción de competencia, según lo señala Lupiáñez y Rico (2008) permite describir los modos en los que los escolares actúan cuando hacen matemáticas y cuando se enfrentan a problemas; en resumen, las competencias que posee un escolar ponen de manifiesto su nivel de *alfabetización matemática*.

Asimismo, las capacidades que adquieren los estudiantes en distintas situaciones matemáticas contribuyen a la evolución de sus competencias intelectuales y personales, con especial incidencia en aquellas que se vinculan con mayor fuerza a las matemáticas. Por lo tanto, el término general de *capacidad*, puede ser descrito como el conjunto de condiciones necesarias para llevar a cabo una actividad concreta. Son cualidades complejas, adquiridas paulatinamente, y que controlan la realización de esa actividad Dorsch (1985).

La *Organisation for Economic Co-operation and Development* (2005) define la *competencia matemática* como la capacidad de los estudiantes para reconocer, comprender y participar en las matemáticas y opinar con fundamento sobre el papel que desempeñan las matemáticas en la vida diaria. Si los conocimientos específicos son importantes, aún es más relevante la aplicación de estos conocimientos en la vida cotidiana, lo cual requiere de destrezas más generales como la comunicación, adaptabilidad, flexibilidad, capacidad para solucionar problemas y la utilización de las tecnologías de la información y comunicación.

Por otra parte, es innegable la importancia que tiene la geometría en los currículos oficiales fundamentalmente porque su enseñanza favorece la experimentación directamente con las formas de los objetos cotidianos, los que, paulatinamente, van permitiendo tomar posición del espacio para orientarse, analizando sus formas, y estableciendo las relaciones espaciales o simplemente por la contemplación, en un comienzo en forma intuitiva, exploratoria y posteriormente en forma deductiva (Lastra, 2005).

En Chile, la enseñanza de la geometría es un tema sensible ya que investigaciones realizadas en este ámbito (Espinoza, 2004) muestran que los profesores de estos niveles educativos, debido a su escasa formación matemática y didáctica, tienen serias dificultades para ir más allá de una enseñanza de la geometría centrada en la clasificación rígida y formal de figuras y cuerpos, en la memorización de propiedades y en el cálculo de áreas y perímetros. Por ello, tienden frecuentemente a postergar la

enseñanza de la geometría para finales del año escolar, terminando por enseñarla superficialmente por cuestiones de tiempo y disponibilidad en las escuelas.

Particularmente, en el área de geometría se espera que ésta otorgue las habilidades relacionadas con las imágenes y el espacio, es decir, la concepción del espacio, la orientación, el pensamiento espacial, visualización y percepción. Arrieta (2003) destaca la capacidad espacial por su relación directa con la geometría. La capacidad espacial es esencial en la geometría para desarrollar un pensamiento científico y la utilización de un buen manejo de la información.

Si bien se reconoce la importancia de fortalecer la enseñanza de la geometría y el desarrollo de competencias que faciliten la relación de los estudiantes con su entorno, resulta contradictorio que éstos no logren aprendizajes iniciales y/o básicos para conocimientos de mayor complejidad. Por este motivo, resulta de interés conocer cómo se desarrollan éstas competencias en un área específica como es la enseñanza de la geometría. A partir de los antecedentes expuestos la pregunta que orienta la investigación es: ¿Qué competencias matemáticas desarrollan los estudiantes de cuarto curso de educación primaria cuando resuelven problemas geométricos?

A partir de los antecedentes expuestos, el propósito de la investigación es analizar las competencias matemáticas empleada por los estudiantes cuando resuelven problemas geométricos. Para ello, nos planteamos como objetivos específicos: (a) diseñar e implementar situaciones geométricas con el apoyo de instrumentos técnicos que favorezcan los diferentes tipos de pensamientos y (b) caracterizar las respuestas que proporcionan los estudiantes frente a un problema matemático identificando la competencia que desarrolla con dicha actividad.

Método

Enfoque y diseño

Para dar respuesta a los objetivos de investigación se optó por un enfoque cualitativo a través de un diseño de estudio de casos. La investigación cualitativa consiste en descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables, es aquella donde se estudia la calidad de las actividades, relaciones, asuntos, medios, materiales o instrumentos en una determinada situación o problema (Albert, 2007). Específicamente, el estudio de caso permite el descubrimiento de nuevas relaciones y conceptos por su carácter inductivo (Bisquerra, 2009).

Contexto y participantes

El estudio fue realizado en un centro público de educación primaria de la zona centro sur de Talca en Chile que atiende a una población escolar ($N = 902$) caracterizada por altos niveles de vulnerabilidad social. El curso está integrado por 39 estudiantes de entre 9 y 10 años. Los resultados obtenidos por el centro en las evaluaciones nacionales generalmente se sitúan en el nivel bajo lo esperado. La unidad de análisis fue intencionada y estuvo compuesta por un chico (Jaison) y una chica (Josefa) de 9 años¹. Ambos tienen calificaciones situadas en la media del curso.

¹ Se han empleado pseudónimos para proteger la identidad de los participantes en atención al criterio de confidencialidad.

Recogida y análisis de los datos

Se han empleado como técnicas la observación y la entrevista a través de recuerdo estimulado apoyadas del uso del video. La grabación en video nos permite disponer de ciertas ventajas que según Ballester (2001) respecto a la utilización de archivos audiovisuales a la hora de realizar análisis de observaciones, entre el que destaca la posibilidad de llevar un análisis exhaustivo, y de observar repetidamente lo observado de manera que existan múltiples perspectivas analíticas y enfoques.

Problema 1: Completar el tablero

Objetivo de la actividad: armar cuerpos geométricos de acuerdo a características dadas.

Contenido: correspondencia y simetría.

Consigna: completa el tablero.



Figura 1. Tablero empleado para el problema 1.

Problema 2: Identificar propiedades de los cuerpos geométricos

Objetivo de la actividad: Caracterizar y comparar prismas rectos, pirámides, cilindros y conos: utilizar el nombre geométrico; designar sus elementos como caras, aristas y vértices; armar cuerpos de acuerdo a características dadas.

Contenido: Comparar prismas rectos, pirámides: utilizar el nombre geométrico; designar sus elementos como caras, aristas y vértices.

Consigna: ¿Qué tienen en común estas figuras?



Figura 2. Sólidos geométricos empleados para el problema 2.

Problema 3: Construir un cubo

Objetivo de la actividad: ver las equivalencias de las figuras. Armar cuerpos geométricos de acuerdo a características dadas

Contenido: equivalencia y correspondencia.

Consigna: ¿qué le falta al cubo 1 para que sea igual que el cubo 2?



Figura 3. Cubos empleados para el problema 3.

Resultados

A continuación se presentan los análisis de los datos provenientes de las observaciones y entrevistas realizadas a los alumnos participantes del estudio. Se exponen las categorías analíticas encontradas en las situaciones didácticas y posteriormente en la discusión se hará mención a aquellas categorías que no están presentes en las respuestas de los estudiantes.

Tabla 1

Descripción eje correspondencia y simetría

Categoría teórica Rico (2005)	Caso 1	Caso 2
Unidades de significado extraídas del texto		
Pensar y razonar	Profesora: Acá tenemos un cuadrado (se lo da). Josefa: (toma las piezas y las coloca en el cuadrado, probándolas para ver donde van, las pone de una forma y otra hasta que logra completar el cuadro)	Profesora: Este es un cuadrado y debemos completarlo, le faltan piezas. Jaison: (toma las piezas, observa el cuadrado y toma otra pieza, la ubica en la figura incompleto, no le calza, prueba con todas las piezas hasta conseguir el propósito.
Plantear y resolver problemas	Profesora: Aquí falta completarlo (muestra la parte incompleta), y acá están las piezas (toca las piezas) tu tienes que completarlo. Josefa: Prueba una a una las piezas. Profesora: ¿Cómo lograste completarlo? Josefa: No lo sé.	Profesora: ¿cómo lo has hecho? Jaison: probando las piezas, miré los espacios y conté mentalmente cuántos cuadrados faltaban, así llegué a completarlo.

Como se puede observar, en el caso 1 Josefa no construye conjeturas, no logra plantearse hipótesis y sólo llega al resultado de manera intuitiva, mientras que en el segundo caso Jaison resuelve el problema a través de un ejercicio por ensayo y error. Ambos alumnos no realizan una relación de correspondencia y simetría en el tablero. A pesar de la similitud en la forma de razonamiento, se observa que en el segundo caso, el alumno llega a resolver el problema empleando un pensamiento más elaborado, señala la relación que existe entre las piezas a ubicar y los espacios disponibles en el tablero.

Tabla 2
Descripción eje Propiedades de cuerpos geométricos

Categoría teórica Rico (2005)	Caso 1	Caso 2
Unidades de significado extraídas del texto		
Comunicar	<p>Profesora: Muéstrame los vértices (le da una pirámide de base triangular).</p> <p>Josefa: (mira los cuerpos geométricos) no me acuerdo muy bien.</p> <p>Profesora: ¿cuáles crees tú que son los vértices?</p> <p>Josefa: Toca un vértice</p> <p>Profesora: Muy bien, ahora cuéntalos</p> <p>Josefa: (Mira la figura) cinco</p> <p>Profesora: Le da un prisma rectangular ¿cuántos vértices tiene este cuerpo geométrico?</p> <p>Josefa: (mira la figura) ocho</p> <p>Profesora: ¿segura?</p> <p>Josefa: Si</p> <p>Continua de igual manera con los otros cuerpos geométricos (cubo, pirámide de base cuadrada). No confirma si está correcto, tampoco sugiere relaciones entre objetos.</p>	<p>Profesora: Muéstrame las aristas de esta cuerpo</p> <p>Jaison: (comienza a dar vuelta la figura y pasa su dedo por las aristas, las cuenta en voz alta) 1, 2, 3, 4. (las vuelve a contar) seis (toma la otra pirámide y cuenta las aristas, se da cuenta que las dos pirámides no tienen la misma cantidad de aristas, mueve la cabeza negando a su respuesta).</p> <p>Profesora: ¿Qué tienen de semejantes estos cuerpos?</p> <p>Jaison: la forma de pirámide (sigue manipulando las figuras)</p> <p>Profesora: ¿Por qué ésta? (toma el prisma) no es semejante a estas (apunta a las pirámides)</p> <p>Jaison: porque ésta (manipula el prisma y toca los vértices) tiene más vértices que éstas dos (toca las pirámides)</p> <p>Profesora: ¿Cómo sabes que tiene más vértices?</p> <p>Jaison: porque tiene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... tiene 11 vértices.</p> <p>Profesora: ¿qué otra figuras encuentras tú que son semejantes?</p> <p>Jaison: éstas (mira las figuras y toma en cubo y el cuadrilátero)</p> <p>Profesora: ¿por qué?</p> <p>Jaison: en las caras y en los vértices, por ejemplo el cubo tiene 6 caras.</p>

Como se observa en el caso la alumna se limita al conteo de las propiedades de los cuerpos geométricos no mostrando evidencia respecto de la elaboración de un concepto matemático, mientras que el caso dos el alumno comunica de forma verbal y además relaciona las propiedades entre cuerpos geométricos. Llega a resolver el problema empleando este mismo conocimiento. Pensamos que la relación que establece entre objetos matemáticos es evidencia de la competencia de pensar y razonar. Distingue el enunciado y conjetura al dar su respuesta. De interés es la actuación de los profesores en ambos casos ya que en el primero de ellos éste no confirma y/o motiva el conflicto cognitivo en la chica, mientras que el segundo caso la profesora actúa como mediadora entre el instrumento técnico, el contenido matemático y la participación del chico.

Tabla 3

Descripción eje Equivalencias de las figuras y correspondencia

Categoría teórica Rico (2005)	Caso 1	Caso 2
Unidades de significado extraídas del texto		
Pensar y razonar	Profesora: Estos son dos cuerpos (toca los dos cubos, el completo y el incompleto) ¿se parecen en algo estos cuerpos geométricos? Josefa: (mueve la cabeza diciendo no)	Profesora: Mira estos cubos, debemos completar para que queden iguales. Jaison: Si coloco algunos cubos aquí, podré formar un solo cubo más grande.
Plantear y resolver problemas	Profesora: ¿por qué no? Josefa: las dos no tienen la misma forma, (toca el cubo incompleto) este tiene formas de escalera. Profesora: ¿tú dices que este es un cubo y esta tiene forma de escalera? ¿qué podríamos hacer para que estén igual?	Profesora: ¿Cuántos serían? ¿Cuántos podríamos poner ahí? Jaison: nueve, para resolverlo conté los cubos pequeños y traté de adivinar cuántos caían dentro del cubo grande mirando uno de sus lados.
Modelizar	Josefa: completar Profesora: ¿Cuántos cubos le faltarán? Josefa: seis Profesora: Pruébalo! Josefa: (toma el cubo incompleto y le pone cubos pequeños, completa el cubo) Profesora: ¿se completó el cubo con 6 cubos pequeños? Josefa: No, deben ser nueve Profesora: ¿cómo lo sabes? Josefa: sumé los cubos	

En el caso 1 la chica emplea como estrategia la adición para resolver el problema, pero necesita comprobar la situación, lo que desde una perspectiva psicológica indica que la chica posee un pensamiento concreto. La manipulación es un proceso fundamental en este tipo de pensamiento y la representación (escalera) la realiza a partir de objetos contextuales. La semejanza le permite intuitivamente aprender la equivalencia, es decir, no importando el tamaño del cuerpo geométrico entiende el modelo de un cubo y busca estrategias para que la escalera y el cubo sean semejantes. En el caso del chico, éste realiza un cálculo mental y estima cantidades hasta llegar a establecer la equivalencia. El alumno estructura el campo o situación que va a modelarse, relaciona e interpreta modelos matemáticos.

Conclusiones

La descripción de las competencias que el alumnado a puesto en práctica en las distintas situaciones permite conocer la manera en que éstos comprenden las matemáticas y la forma en que aprenden. Los resultados demuestran que las competencias más desarrolladas tienen que ver con aspectos más formales de la matemática como son el pensar y razonar. También se observó que los estudiantes lograron comunicar el saber

matemático mediante diferentes vías por ejemplo de forma verbal y gestual, sin embargo, la argumentación es débil.

La modelización también estuvo presente ya que los estudiantes fueron capaces de identificar los aspectos de una situación (por ejemplo el caso de los cubos incompletos) relacionándolo con otros objetos matemáticos hasta llegar a resolver el problema. Para Llinares (2005) esta competencia implica construir un modelo eficaz que refleja el sentido dado a la situación y usar ese modelo para tomar decisiones. Los resultados demuestran que esta competencia se da principalmente en el segundo caso.

Una de las competencias menos desarrolladas por los estudiantes es la argumentación, ya que una vez realizadas las actividades presentaron dificultades para justificar sus decisiones. El desarrollo de competencias como argumentar y representar necesita de tareas que movilicen en los estudiantes determinadas capacidades, como por ejemplo justificar la utilidad de los procedimientos empleados para alcanzar unos determinados resultados o relacionar diferentes representaciones. También se vio disminuida la competencia para emplear un lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones, lo que podría explicarse por la desvinculación que suele existir entre la matemática que se enseña en la escuela y la matemática empleada en la vida cotidiana (Sáenz, 2007).

Como se puede apreciar, todas estas competencias evaluadas ponen de manifiesto el nivel de *alfabetización matemática* que poseen los estudiantes de ambos casos (Rico, 2005) de allí la importancia de que los profesores las consideren en la planificación de unidades didácticas.

Consideramos que el presente trabajo de carácter exploratorio, aporta información relevante para comprender mejor las competencias que desarrollan los estudiantes de educación primaria en situaciones de didáctica de la geometría y también creemos que es información que puede contribuir en el diseño de instrumentos técnicos que favorezcan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

- Albert, M.J. (2007). *La investigación Educativa*. Madrid: McGraw Hill.
- Ballester, L. (2001). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Mallorca: Universitat de las Illes Balears.
- Bisquerra, R. (Coord.) (2009). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Godino, J.D. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen?. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 29, 9-19.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Lastra, S. (2005). *Propuesta Metodológica de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, aplicada en escuelas críticas*. Universidad de Chile. Santiago de Chile.
- Llinares, S. (Coord.) (2005). *Modelización matemática y competencia lectora en educación secundaria obligatoria*. Universidad de Alicante.

- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.
- OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.
- Rico, L. (2005). Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el proyecto PISA 2003. En Ministerio de Educación y Ciencia (Ed.), *PISA, 2003, pruebas de matemáticas y de solución de problemas* (pp. 11-25). Madrid: Editor.
- Sáenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las ciencias*, 25(3), 355–366.