XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

Análisis del concepto función, para la construcción de una propuesta de enseñanza

Claudia Cecilia Castro Cortés
Grupo INVEDUSA, Universidad Sergio Arboleda
Colombia
mathclaudiacastro@yahoo.com
Luz Mery Díaz Camacho
Universidad de América
Colombia
dicamelu73@yahoo.es
Yolanda Céspedes Guevara
Grupo INVEDUSA, Universidad Sergio Arboleda
Colombia
cespedes_yolanda2004@hotmail.com

Resumen

La propuesta que se presenta hace parte de la investigación en curso: "Planteamiento didáctico del concepto de función para estudiantes de educación superior", en ésta se contempla tres aspectos básicos: la revisión histórico-epistemológica del concepto de función; algunos elementos fundamentales de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud y por último unos aportes acerca del aprendizaje significativo propuesto por Ausubel, teorías en las cuales se soporta el diseño de una propuesta de enseñanza-aprendizaje del concepto de función, que busca superar dificultades y evitar la deserción de los estudiantes de primer semestre de ingenierías.

Palabras clave: educación, matemática, función, situaciones.

Planteamiento del problema

El concepto de función es relevante en los procesos de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería no solo porque se evidencia en los fenómenos de cambio, sino por las diversas aplicaciones en los distintos campos de conocimiento, al respecto Azcarate y Deulofeul, afirman que:

> "A los problemas generados por la física y especialmente por el estudio del movimiento, verdadero motor inicial del desarrollo de las funciones, debemos añadir las numerosas situaciones que podemos encontrar a nuestro alrededor, tanto en nuestra vida cotidiana como en cada una de las ciencias incluidas en las propias matemáticas" (Azcárate C. y Deulofeu J., 1996).

Aunque éste concepto es abordado en los cursos de la educación básica y media y posteriormente retomado en los primeros semestres de cálculo en estudiantes de ingeniería, en diversas investigaciones realizadas por autores como Azcárate, Higueras, Robledo entre otros, respecto al concepto de función, se ha identificado que en general, las dificultades de los estudiantes se deben a:

- La construcción deficiente que realizan del concepto.
- La falta del uso de situaciones significativas durante su aprendizaje, lo cual está directamente relacionado con el uso de modelos pedagógicos tradicionales usados por los profesores.
- La clase de actividades desarrolladas con los diferentes registros de representación que no propician la comprensión de los elementos inmersos en el concepto.
- La ejercitación de lo simbólico, lo cual propicia el dominio de procesos algorítmicos en las situaciones problema donde se utiliza el concepto de función, pero que al enfrentarse a situaciones contextualizadas, los estudiantes se encuentran con dificultades para solucionarlas por la poca comprensión de elementos como: dependencia entre las variables, identificación de las variables y la clase de función.

Esta situación nos lleva a la necesidad de plantear una propuesta de enseñanza con la que se pretende superar las dificultades mencionadas, con el fin, de lograr una mejor comprensión del concepto, de disminuir la repetición en los cursos de cálculo y evitar la deserción de los estudiantes en los primeros semestres.

Fundamentación Teórica

Con el propósito de darle sustento al diseño de la propuesta, se realiza una revisión teórica respecto al recorrido histórico y epistemológico del concepto, que proporcionará referencia frente al reconocimiento de las situaciones que originaron el surgimiento del concepto y las dificultades u obstáculos que se generaron en su desarrollo; a la teoría de los campos conceptuales propuesto por Vergnaud, que propicia la necesidad de diseñar una propuesta en la que cobre sentido el uso de situaciones y por último la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel que muestra la importancia del conocimiento previo como principal factor, en la adquisición de nuevos conocimientos.

Se iniciará entonces con la revisión histórica y epistemológica, con un cuadro que presenta de manera sucinta la evolución del concepto, las formas de representación y los obstáculos epistemológicos a través del tiempo:

Tabla 1

Evolución histórico-epistemológica del concepto de función

MUNDO ANTIGUO
Evolución del Concepto **Los babilonios** con sus avances en astronomía, realizaron observaciones sistemáticas de diversos

fenómenos que se repetían periódicamente y que registraron en tablas con el fin de hallar regularidades, que contribuyen al conocimiento de las funciones. Bell (1985, p. 184) sostiene, que los matemáticos babilónicos poseyeron un auténtico sentido de funcionalidad puesto que una función no es más que una tabla o una correspondencia.

Representación

- Aparecen relaciones funcionales generalmente lineales, en forma tabulada.
- Al parecer hay una concepción de función como una relación que asocia elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto. (Peterson, 1974).
- Los griegos utilizaron tablas para mostrar sus resultados.

Obstáculos Epistemológicos[1]

1. *"…profundizando en los métodos cuantitativos desarrollados por los astrónomos babilónicos, cuyo documentos contienen auténticas funciones tabuladas… con uso de interpolaciones y extrapolaciones y la búsqueda de regularidades, no se podría avanzar más rápidamente en el establecimiento de métodos más generales que llevaron a la formulación del concepto de función". (Azcarate. p. 40).*
2. *La idea de proporción constituyó un serio obstáculo debido a que en ellas se esconde la dependencia que existe entre magnitudes distintas (Azcarate. p. 41).*
3. *Disociación entre el número y la magnitud: los números o las razones entre enteros positivos se discretizan frente a las magnitudes que permiten expresar la continuidad, lo cual tiene una clara repercusión sobre la idea de magnitud variable, que a partir de este momento, no podrá expresarse mediante números más que en casos particulares (Azcarate. p. 42). La concepción de variabilidad como característica exclusiva de las magnitudes físicas, son un claro obstáculo para el desarrollo de la noción de función. (Higueras. p. 108).*

EDAD MEDIA. (S. XIII - final del imperio romano hasta el s. XV)

Evolución del Concepto

Se incrementa el número de funciones, entre otras, la mayoría de las funciones trigonométricas y se mejora en su tratamiento y estudio. El estudio cuantitativo de fenómenos adquiere importancia. Una de las mayores preocupaciones de la edad media fue el estudio de los fenómenos sujetos al cambio y al movimiento, se analizan cualidades y formas de fenómenos diversos como la luz, calor, densidad, velocidad. Aparecen los conceptos ligados a la idea de función como: cantidad variable, velocidad instantánea, aceleración.

Se desarrollaron dos métodos para expresar las relaciones funcionales, como lo referencia Flórez (2002, p. 435), el primero fue el álgebra de palabras utilizado por **Bradwardino** de Oxford, el cual consistía en el uso de letras en lugar de números, para sustituir las cantidades variables, las operaciones realizadas con estas cantidades, se describían con palabras en vez de ser representadas por símbolos. El segundo, fue a través de un método geométrico por medio de gráficas, con el cual se hicieron descripciones cinemáticas de varias formas de movimiento, entre ellas se encontraba la que iba a permitir el análisis del

[1] Bachelard define los "obstáculos epistemológicos", como las ideas que obstaculizan el surgimiento de nuevas ideas: hábitos intelectuales arraigados, teorías científicas que funcionan como dogmas, y sobre todo, dogmas ideológicos que dominan a las diferentes ciencias, además de opiniones altamente aceptadas, tomado de: http://es.shvoong.com/social-sciences/1730853-la-noci%C3%B3n-obstaculo-epistemologico/#ixzz1I8TJg1c2

movimiento realizado por galileo.

Boyer (1999, p. 339), afirma que a **Oresme** antes del año 1361 se le ocurrió por medio de una grafica o dibujo representar las cosas que varían, lo que serían las primeras representaciones gráficas de las funciones. Oresme *escribía que: todo lo que varía, se sepa medir o no, se podía imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo*. Es evidente que la concepción que se tenía de número se daba como conjunto de unidades, diferente al de magnitudes, análogo al pensamiento griego.

Representación

- Se utiliza el lenguaje verbal para expresar situaciones y operaciones.
- Se propone la representación gráfica como formas continuas a partir de segmentos rectilíneos.

Obstáculo

Durante el final de la Edad Media no fue posible avanzar más, ello se debió a la desproporción entre el nivel de abstracción de las teorías abordadas y la falta de un correcto aparato matemático (falta de simbolismo matemático adecuado) para su desarrollo (Higueras. p. 142).

EDAD MODERNA

Evolución del Concepto

Galileo (1638), realizó avances en el estudio del movimiento que implicaron leyes sobre las magnitudes que son autenticas relaciones funcionales. Aborda el problema de la correspondencia entre conjuntos infinitos y aspectos relacionados con el continuo.

Bell (1985, p. 149), menciona que **Descartes** establece una correspondencia inequívoca entre las curvas planas y las ecuaciones de dos variables x, y: para cada curva hay una ecuación determinada $f(x, y) = 0$, y para cada ecuación $f(x, y) = 0$ hay una curva determinada. Además, Descartes sabía que las letras de sus ecuaciones representaban variables y reconoció, sin lugar a dudas, la diferencia entre variables y constantes arbitrarias, aunque no las definió formalmente.

Fermat en una publicación de 1679, expone los principios fundamentales de las coordenadas: *toma un eje de referencia y en él un punto fijo, el origen de segmentos variables, generalmente perpendiculares a aquellos, de manera que el extremo de este segundo segmento dibujará una curva que dependerá de la relación algebraica establecida entre los dos segmentos variables. (Azcarate p. 48).*

Newton analiza las variables dependientes como cantidades continuas que poseen una determinada velocidad de cambio, tales como: longitudes, áreas, velocidades, aceleraciones etc., según, Bell (1985, p.161), Newton, vuelve a abordar la continuidad y traslada la dificultad central a un movimiento continuo.

Leibnitz determinó que la tangente de una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y las abcisas cuando éstas tienden a cero. El término función aparece por primera vez en un manuscrito de su autoría en 1673, según Collette (1998, p. 192), Leibnitz se sirve de la palabra función para designar toda cantidad que varía de un punto a otro de una curva, por ejemplo la longitud de la tangente, la subtangente y de la normal.

Bernoulli describe una función de forma vaga, según Boyer (1999, p. 553), como una cantidad compuesta de cualquier manera a partir de una variable y constantes arbitrarias. Trabajó sobre la trigonometría y los logaritmos desde lo analítico y propuso como notación inicial para la función la expresión $\emptyset x$.

Euler introduce en 1740 la notación $f(x)$, además hace un detallado estudio del concepto y de otros conceptos relacionados con éste. Collette (1998, p. 192), afirma que Euler define la función de una cantidad variable como una expresión analítica formada de cualquier manera con esta cantidad variable, con número y con constantes. Euler distingue las funciones que tienen una sola imagen de las que pueden tener una sola imagen de las que pueden tener más de una imagen para el mismo valor de la variable independiente.

Bell (1985), cita que para Euler una función era un conjunto de representaciones formales transformables una en otra mediante ingeniosos artificios que usaban desde el algebra elemental hasta el cálculo.

En 1755, Euler define función en términos de dos nociones: la concepción formal de expresión analítica y la concepción más general de correspondencia arbitraria así:

Si ciertas cantidades dependen de otras cantidades de tal manera que si las otras cambian también, entonces, tenemos la costumbre de nombrar estas cantidades funciones de estas últimas… si x designa una cantidad variable, entonces todas las otras cantidades variables que dependen de x, no importa de qué manera, son llamadas funciones de x. (Euler; cit. Por Youschkevictch, 1976. p.49).

Representación

- Hasta el S. XVII, una función podía introducirse utilizando una expresión verbal, una tabla, una gráfica, y en ciertos casos una comparación de carácter cinemático.
- Descartes considera las funciones como relaciones entre conjuntos, más que como entre cantidades y muestra que se pueden representar por medio de fórmulas.
- Aparece por primera vez el término función en el año 1673.
- Primera definición explícita de función como una expresión analítica.
- Euler introduce la notación $f(x)$ utilizada en nuestros días.

Obstáculos

4. *La simbolización algebraica hizo que se generara otro nuevo obstáculo en el desarrollo del concepto de función. Se llegó a pensar que las únicas relaciones dignas de estudio eran aquellas que pueden ser descritas por medio de expresiones algebraicas y ecuaciones. Esta fuerte dependencia entre expresión analítica y función se constituye en obstáculo hasta que la idea de correspondencia arbitraria fue surgiendo en la mente de los matemáticos.* (Higueras. p. 143).
5. *En un principio, las curvas no fueron considerados como gráficos de la relación funcional, sino que fueron tomadas como trayectorias de puntos en movimiento (curvas "mecánicas").* (Higueras. p. 143).

SIGLO XIX - LA TEORIA DE CONJUNTOS

Evolución del Concepto

Lagrange limita el concepto de función a las llamadas funciones analíticas que están definidas por series de potencias. Collette, (1998, p. 238), muestra que Lagrange quizo sustituir todo lo hecho hasta entonces por un método algebraico, el cual consiste en utilizar el hecho de que toda función f puede expresarse de la forma: $f(x+h)=f(x)+ph+qh^2+rh^3+\cdots$

donde los coeficientes "$p, q, r, ...$" dependen de x pero son independientes de h.

Fourier con el estudio de las series trigonométricas, llamadas series de Fourier, desarrolla funciones arbitrarias, lo que produjo una gran revolución al lograr representar por medio de series de funciones analíticas, funciones arbitrarias formadas por leyes analíticas distintas en diferentes intervalos de la variable independiente. Según Boyer (1999, p. 686), esta fue su mayor contribución, cualquier función $y=f(x)$ se puede representar por lo que se conoce por el nombre de serie de Fourier, que se representa de la forma: $y=\frac{1}{2}a_0+a_1 cosx+a_2 cos2x+\cdots+a_n cosnx+b_1 senx+b_2 sen2x+\cdots+b_n sennx+\cdots$

Dirichlet trabajó sobre los desarrollos en serie de funciones completamente arbitrarias, mostrando que poseía ya el concepto general de función, Boyer (1999, p. 687) afirma que Dirichlet en 1837, propuso la siguiente definición de función: si una variable y está relacionada con una variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.

Representación

- Las definiciones dadas a partir de la teoría de conjuntos pierden muchos de los atributos que tenían las definiciones clásicas, como la idea de variación, de continuidad, de la variable como parámetro temporal, de dependencia.

SIGLO XX

Evolución del Concepto

Fernandez (1976), considera el concepto de función así: sea X e Y dos conjuntos no vacios. Una función f definida en un conjunto X y con valores en Y es una ley mediante la cual se hace corresponder a cada elemento de X un elemento de Y. se dice también que f es una aplicación de X en Y.

Godement (1971), llama función a la terma $f = (G, X, Y)$ en donde G, X, Y son conjuntos que verifican las siguientes condiciones:

1. $G \subset X \times Y$
2. Para todo $x \in X$ existe un y solo un $y \in Y$, tal que, $(x, y) \in G$, G es la gráfica de la función f.

El único elemento y de Y tal que $(x, y) \in G$ se llama el valor de la función de f en x y se utiliza para designarlo $y = f(x)$.

Apóstol (1960), define: una relación F se llama una función cuando $(x, y) \in F$ y $(x, z) \in F$ implique $y = z$. una función es, pues, un conjunto de pares ordenados que tiene la propiedad especial de que siempre que dos parees (x, y) y (x, z) del conjunto tienen el mismo primer elemento, deben siempre tener idéntico el segundo.

La evolución histórica muestra que el surgimiento del concepto de función se fue dando a partir de la indagación y desarrollo de situaciones de fenómenos de cambio, de lo que es posible concluir que es importante, reconocer que el proceso de enseñanza de este concepto se puede realizar a partir de un trabajo, en el que el estudiante se enfrente al análisis de situaciones significativas que provoquen interés y en el que se vayan incorporando los diferentes elementos que conforman el concepto.

Vergnaud (1982), parte de la premisa que el conocimiento está organizado en campos conceptuales, lo cual implica que un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, y operaciones de pensamiento, conectados unos a otros y probablemente entrelazados durante el proceso de adquisición. Esta teoría maneja unos conceptos claves que para Vergnaud (1990), implican la conceptualización como núcleo del desarrollo cognitivo, y lo define como la apropiación consciente del concepto que define como la terna (S, I, R), donde:

- S: Conjunto de situaciones que dan sentido al concepto: combinación de tareas, para su solución los estudiantes requieren el uso de conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos relacionadas entre sí.
- Las situaciones pueden ser de dos clases: en las primeras los estudiantes utilizan estrategias conocidas, por tanto resuelven la situación de forma casi inmediata, en las situaciones de la segunda clase los estudiantes no disponen de todas las competencias necesarias para solucionar la situación, luego requiere del análisis, exploración y reflexión de posibles estrategias que lo conduzcan a una respuesta coherente.

- I: Conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad del concepto: Los invariantes son conceptos, propiedades y relaciones que pueden ser reconocidos y usados por los estudiantes para analizar y solucionar las situaciones.
- R: Conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento.

La conceptualización se da en el proceso de aprendizaje si los estudiantes utilizan los tres elementos del concepto en forma simultánea; es a partir de la solución de las primeras situaciones sobre un concepto que los estudiantes construyen sus concepciones iniciales, las cuales se modifican progresivamente con la inclusión de nuevas situaciones y con el tiempo van evolucionando a la construcción formal del concepto, para Vergnaud el conocimiento previo cumple un papel muy importante en la adquisición de nuevos conocimientos.

En este mismo sentido, Ausubel (1980), considera que un aprendizaje significativo se da por la interacción de un nuevo conocimiento con el conocimiento previo. El modelo de aprendizaje significativo caracterizado por Ausubel, es una teoría de aprendizaje, que tiene en cuenta "todos y cada uno de los elementos, factores, condiciones y tipos que garantizan la adquisición, la asimilación y la retención del contenido que la escuela ofrece al alumnado, de modo que adquiera significado para el mismo" (Rodríguez, 2004).

En este enfoque, el docente para planear las actividades de enseñanza ha de tener en cuenta los conceptos previos de los estudiantes, pues estos son los que permiten adquirir nuevos conocimientos de manera significativa ya que al relacionarse con los anteriores que ya dominan, se reelabora y modifica su estructura cognitiva. En palabras de Ausubel, un conocimiento nuevo es subordinado a otro si ya existe o superordenado si el conocimiento es nuevo. El rol del docente y el estudiante, es que sean cuestionadores de su propio aprendizaje.

La relación que se establece entre las propuestas de Vergnaud, la de Ausbel y el recorrido histórico epistemológico, se muestra en el siguiente esquema:

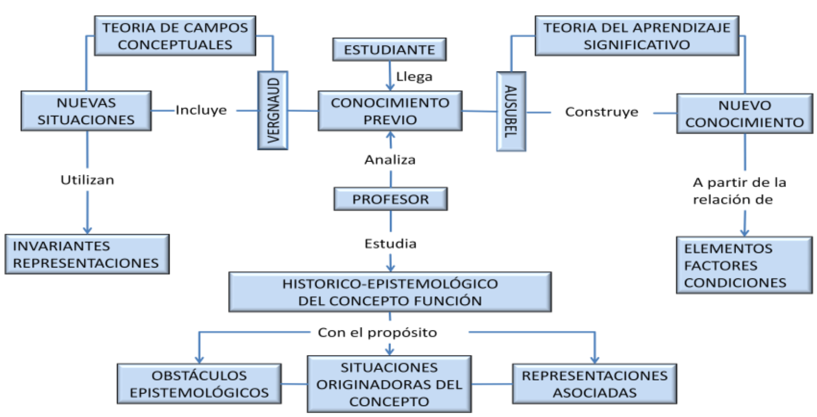


Figura 1. Relación entre la teoría de los campos conceptuales, el aprendizaje significativo y el estudio de la evolución histórico-epistemológica del concepto de función

Diseño y Metodología

La relación que se establece entre la teoría de los campos conceptuales, el aprendizaje significativo y el estudio de la evolución histórico-epistemológica del concepto de función, proporcionan elementos para la construcción de una propuesta, en la que el análisis que hace el profesor acerca de los conocimientos previos con los que llega el estudiante, sirve de base para formular un proceso de enseñanza de un concepto determinado.

Vergnaud (1994), afirma que los estudiantes le encuentran sentido a un concepto cuando se han enfrentado a diferentes clases de situaciones, la complejidad de las mismas, van proporcionando conocimiento adicional de los diferentes elementos que forman parte del concepto, además de generar una serie de competencias que les permiten enfrentarse a cualquier tipo de situación.

Como producto de la revisión teórica realizada, se presenta una organización de las diferentes clases de situaciones que se utilizarán para plantear una propuesta que busca que los estudiantes alcancen la comprensión del concepto de función.

Figura 2. Organización de clases de situaciones para la enseñanza del concepto de función.

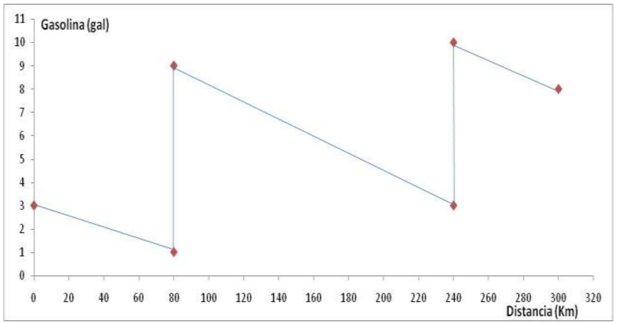
Situaciones de Relación: estas serán las primeras situaciones que se formularán a los estudiantes permiten el análisis de variables, para las cuales, los valores determinados de una variable encuentran valores de la otra variable. Dichas variables, contemplarán contextos familiares a los estudiantes como: la relación entre la temperatura de un lugar determinado durante un tiempo específico, la relación entre la cantidad de gasolina en un carro durante un viaje por carretera, la relación entre el costo de una llamada y el tiempo de duración de la misma, etc.

Con el fin de analizar estas situaciones, se utilizará la representación gráfica y tabular; con respecto a la primera se busca que los estudiantes realicen una lectura de la gráfica en la cual identifiquen las variables en los ejes, el significado del origen, la unidad utilizada y las graduaciones de los ejes como lo propone Azcárate y Deulofeu (1996). En cuanto a la representación tabular, los estudiantes deberán identificar las variables con sus respectivas unidades de medida, identificar relaciones de dependencia, realizar la lectura sobre una tabla dada y cambio entre estos dos registros.

Tabla 2

Ejemplo de Situaciones de Relación

La siguiente gráfica representa la cantidad de gasolina que hay en el tanque de un carro a lo largo de un viaje de 300 Km.



Contesta las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos galones de gasolina tenía el carro al iniciar el viaje? ¿Y al finalizar?
- ¿En qué kilometro se encontraba cuando tenía 1 galón? ¿Y cuándo tenía el tanque lleno?
- ¿Qué sucedió en el Km 80? ¿Y en el 240? ¿Cuándo puso más gasolina?
- ¿Cuántos galones gasto durante el viaje?
- Completa la tabla:

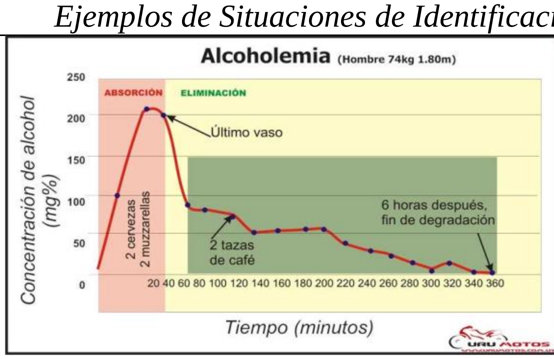
	0		80	240		
		1			10	

Situaciones de Identificación de Funciones: estas situaciones, al igual que en las anteriores contempla dos variables, con la característica que a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente, para estas se utilizarán como contexto situaciones de cambio.

El trabajo que se realizará en este tipo de situaciones, estará enmarcado en las representaciones gráfica, tabular y verbal. Respecto a la representación gráfica, se espera que además de la lectura, se haga interpretación, es decir, que el estudiante sea capaz de identificar y describir una función de forma general y las variaciones que se presentan en ella. En cuanto a la representación tabular, se debe avanzar en dos aspectos, por una parte el análisis de regularidades que encuentre en la misma y por otra parte, la construcción de tablas, dada la gráfica; en cualquiera de los dos casos se espera que el estudiante se acerque a procesos de generalización. Finalmente, en el uso de la representación verbal se debe evidenciar la comprensión de las ideas de variable y de dependencia funcional entre variables a partir del análisis de ejemplos de fenómenos de cambio, como lo afirma Cuesta (2007).

Tabla 3

Ejemplos de Situaciones de Identificación de funciones



Plantee una situación que corresponda a la información presentada en la gráfica.
Construya la representación tabular de la situación.

Elabore algunas preguntas pertinentes según la situación propuesta.

Gráfica tomada de: Concentración de alcohol en sangre tomada cada 20 minutos durante aproximadamente 5 horas luego de haber comenzado la ingesta. (Motos, 2010).

Situaciones de Identificación de Atributos de Función: Cuando los estudiantes identifiquen entre las relaciones las que son funciones y determinen la dependencia entre las variables, se les presentarán, situaciones en las que determinen los dominios y codominios y analicen la continuidad de las funciones presentadas, la monotonía, periodicidad y simetría, propiedades básicas de toda función.

Para solucionar estas situaciones donde se caracterizarán en forma general las funciones, se utilizará adicional a las representaciones verbal, gráfica, tabular y la algebraica con la cual los estudiantes deben representar la relación de dependencia identificada y la regularidad determinada entre ellas.

Tabla 4
Ejemplo de Situaciones de Identificación de atributos de funciones

Caída de una piedra

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5
Distancia caída (metros)	0	5	20	45	80	125

Gráfica los datos presentados.
¿Observas alguna regularidad en esta tabla? Descríbela y halla una expresión algebraica que la simbolice.
Si se lanza una piedra desde un avión. ¿Cuántos metros caerá en 10 segundos?

Situaciones de Caracterización de Funciones: en éstas los estudiantes deben especificar las características a tener en cuenta, para determinar las diferentes propiedades de una función en las diferentes clases de registro, es decir, que sus competencias para determinar por ejemplo, el dominio y codominio de una función, no dependen de la representación utilizada. Además, se pretende que los estudiantes den características específicas de las diferentes clases de funciones.

Tabla 5
Ejemplo de Situaciones de caracterización de funciones

A cada grupo se le entregará dos situaciones representadas de manera verbal, con las que se busca que determinen las propiedades de la función a partir de la comparación de las respuestas obtenidas.

Situación 1.Cuando era nuevo mi carro me costo $30.000.000, su valor se deprecia a un ritmo de 20% anual. Esto quiere decir que después de un año su valor era: $30´000.000 \times 0.8 = 24´000.000$. ¿Cómo continuará cambiando su valor?

Situación 2. ¿Cómo depende el tamaño de los ángulos interiores del número de lados de un polígono regular?

La muestra que se presenta de las diferentes clases de situaciones hace parte de una propuesta de enseñanza que se aparta de las tradicionales, en las cuales se inicia con la definición formal del concepto de función y se continua con el trabajo sobre cada uno de los diferentes tipos de funciones, incorporando las propiedades en cada una de ellas, además, se le da prioridad al trabajo de tipo algebraico dejando un poco de lado las situaciones contextualizadas. En contraste, esta propuesta incorpora las diferentes clases de funciones a partir de situaciones contextualizadas que permiten identificar, caracterizar y clasificar cualquier tipo de función, teniendo en cuenta los conocimientos previos que traen los estudiantes desde la educación básica y media.

Conclusiones

Una propuesta de enseñanza sustentada a partir de un referente teórico que proporcione elementos de carácter histórico, epistemológico, didáctico y pedagógico, permite que para su construcción, se tengan en cuenta:

- los conocimientos previos de los estudiantes; lo que permite que tengan elementos para el análisis de las situaciones,
- los acontecimientos históricos y los obstáculos presentados durante la construcción del concepto; que fundamentan la organización de una serie de situaciones contextualizadas, que propicie un orden natural en el uso y cambio en las formas de representación,
- los roles del estudiante y el docente, que implican cambios en el papel del estudiante, como partícipe de la construcción del concepto y el docente como orientador del proceso
- finalmente, pero no menos importante, la metodología de trabajo en el aula, la cual debe ser activa, generadora de preguntas, que permita el trabajo en grupo y la consolidación de conceptos a partir de las discusiones que se generen, alrededor de las respuestas obtenidas.

La propuesta se desarrolla a partir de una serie de situaciones de contenencia, es decir, que los elementos abordados en las primeras situaciones son esenciales para afrontar el siguiente tipo de situaciones, dejando de esta manera una enseñanza de tipo tradicional, que presenta de forma fragmentada el proceso de conceptualización de los conceptos. Esta propuesta, busca que los estudiantes dominen todos los elementos del concepto, los interrelacionen adecuadamente y analicen, comprendas y utilicen las diferentes formas de representaciones.

El estado del arte que se realizó como parte del desarrollo de la investigación, nos muestra la necesidad de construir una propuesta en la que el estudiante lleve a cabo procesos de interpretación, identificación y caracterización de los distintos elementos que permiten comprensión del concepto de función; esto estará ligado a una propuesta metodológica detallada para el profesor, en la que se indique: algunas preguntas adicionales en algunas situaciones, tipo de recursos para orientar la clase (presentaciones de diapositivas, retroproyector de acetatos, uso de hojas milimetradas…), entre otras. Se espera que sea claro para cualquier docente que tenga a su alcance esta propuesta, no solo la metodología, sino lo que se espera que el estudiante alcance en el desarrollo de cada una de las situaciones.

Referencias y Bibliografía

Apostol, T. (1960). Análisis Matemático. Barcelona. España. Reverté.

Ausubel, D. y. (1980). Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.

Ausubel, D. y. (1983). Psicología Educativa. México: Trillas.

Azcárate, C. y Deulofeu J. (1996). Funciones y gráficas. Madrid. España. Sintesis.

Bell, E.T. (1985). Historia de las matemáticas. México D.F.. México. Fondo de cultura económica.

Boyer, C. (1999). Historia de la matemática. (1986). Madrid. España. Alianza Editorial.

Collette, J. (1998). Historia de las matemáticas. Tomo I y II. México. Siglo veintiuno editores.

Fernández, J. (1976). Lecciones de análisis matemático. Madrid. España. Tecnos.

Flórez, C. la ciencia de Salamanca en el siglo XVI: la conjugación del arte y la ciencia. Recuperado el 22 de marzo de 2011. http://arbor.revista.csic.es.

Godement, R. (1971). Álgebra. Madrid. España. Tecnos.

Motos, U. (20 de Octubre de 2010). Uro Motos. Recuperado el 20 de Enero de 2011, de http://www.urumotos.com.uy/f12/alcohol-y-conduccion-2549/

Robledo, J. (s.f.). Formación matemática en un primer curso de matemáticas de la Universidad del Valle, Cali. Recuperado el 30 de junio de 2010, de http://www.icesi.edu.co/evenmat/memorias/ConferenciaRobledo.pdf

Robledo, J. (2003). Registros semióticos de representación y Matemáticas universitarias. Tesis de maestría en Educación con énfasis en educación matemática, Universidad del Valle.

Rodríguez, M. (2004). La teoría del aprendizaje significativo. Santa Cruz de Tenerife. Recuperado el 25 de noviembre de 2010, de http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.pdf

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. (1982). Addition and subtraction. A cognitive perspective. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 39-59.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didáctique des Mathematiques . La Pensée Sauvage: CNRS y Université René Descartes.

Youschenvttch, A. (1976). The concept of function up the middle of the 19th century, Archive for history of exact sciences.