



As relações pessoais esperadas dos estudantes no processo de aprendizagem da noção de derivada de uma função

Lucia Helena **Nobre Barros**
Universidade Bandeirantes de São Paulo
Brasil
lucianobre@ibest.com.br

Resumo

Apresentam-se alguns resultados da pesquisa sobre as relações pessoais esperadas dos estudantes no processo de aprendizagem de derivada de uma função na transição ensino médio e superior. Esta pesquisa faz parte do trabalho de dissertação de mestrado, do qual tenta entender quais as dificuldades que os estudantes enfrentam em aprender Cálculo Diferencial e Integral. Para tal, escolhemos como referencial teórico os pontos de vista definidos por Thurston (1995) para a noção de derivada de uma função, a definição de ponto de vista segundo Rogalski (1995), e para melhor refino das análises, considera-se também, a noção de quadro e mudança de quadros de Douady (1984), a abordagem teórica em termos de níveis de conhecimento de Robert (1997) e as relações pessoais esperadas segundo Chevallard (1992, 1996) e os ostensivos e não ostensivos segundo Bosch e Chevallard (1999). Na seqüência, analisam-se as relações pessoais esperados dos estudantes via macro avaliações institucionais, para isso, constrói-se uma grade de análise, obedecendo ao modelo de Dias (1998), objetivando identificar os conhecimentos prévios supostos disponíveis para que possibilitem aos estudantes a execução das tarefas. Por fim, efetuam-se alguns comentários e análises dos resultados encontrados, que tendem a mostrar que existe uma preocupação de introduzir alguns pontos de vista que na continuidade da pesquisa observamos que são revisitadas em diferentes etapas de escolaridade.

Palabras chave: derivada de uma função, pontos de vista, quadro e mudança de quadros, níveis de conhecimento, relações pessoais esperadas, ostensivos e não ostensivos.

Introdução

Analisar as dificuldades apresentadas pelos estudantes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral tem sido objeto de estudo de várias pesquisas. O propósito deste artigo é apresentar parte da pesquisa de mestrado, onde procuramos compreender melhor, por meio das relações

pessoais esperadas, via macro avaliações, as escolhas para o tratamento dessa disciplina, em particular quando se considera a noção de derivada de uma função ao ser introduzida no Ensino Médio e retomada no Ensino Superior.

Assim, fazendo uma breve análise do quadro atual de ensino, percebemos que o nosso objeto de estudo poderia se expandir, isto é, que o Ensino Médio poderia ser um ponto de partida para melhor compreender as dificuldades que essa noção pode levar para o Ensino Superior. Então, a preocupação com os conteúdos determinados pelos currículos e a forma como eles se apresentam, tornou-se o foco de estudo.

Dessa forma, na tentativa de compreender melhor o que se espera do estudante egresso do Ensino Médio escolhemos analisar quais as relações pessoais desenvolvidas para o ensino e aprendizagem dessa noção, ou seja, neste trabalho, buscamos identificar as relações pessoais por meio das tarefas apresentadas nas avaliações institucionais do Estado de São Paulo para os egressos do Ensino Médio, para isso, construímos uma grade de análise, modelo de Dias (1998), objetivando identificar os diferentes tipos de pontos de vista sugeridos por Thurston (1995) que colocam em evidência a importância da noção de derivada no trabalho do matemático.

Sendo assim, para operacionalizar melhor nosso trabalho, escolhemos os referenciais teóricos que se seguem.

Referencial teórico da pesquisa

O referencial teórico central para essa pesquisa são os pontos de vista identificados por Thurston (1995), para a noção de derivada, cuja denominação sugere a escolha para a definição dessa noção, como é possível observar no texto abaixo:

Podemos pensar a derivada como: 1. **Infinitesimal**: a razão da mudança infinitesimal do valor da função pela mudança infinitesimal da variável. 2. **Simbólico**: a derivada de x^n é nx^{n-1} , a derivada de $\sin x$ é $\cos x$, a derivada de $f \circ g$ é $f' \circ g \cdot g'$, etc. 3. **Lógica**: $f(x) = d$ se e somente se, para cada ε , existe um δ tal que se $0 < |\Delta x| < \delta$ então $\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \varepsilon$. 4. **Geométrico**: a derivada é a inclinação da tangente ao gráfico, se o gráfico tem uma tangente nesse ponto. 5. **Taxa**: a velocidade instantânea de $f(t)$ se t é o tempo. 6. **Aproximação**: a derivada de uma função é a melhor aproximação linear dessa função próxima do ponto. 7. **Microscópica**: a derivada de uma função é o limite do que se observa com um microscópio aumentando cada vez mais (Thurston, 1995).

Além disso, consideramos a definição dada por Rogalski (1995) para a noção de ponto de vista:

Dois pontos de vista diferentes sobre um objeto matemático são diferentes maneiras de observá-los, de fazê-los funcionar, eventualmente de defini-los. Nesse sentido, observar um objeto em diferentes quadros é considerar diferentes pontos de vista. Mas, podem-se considerar vários pontos de vista em um mesmo quadro (Rogalski, 1995).

Consideramos, ainda, a abordagem teórica sobre os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1997), a saber:

Níveis de conhecimento esperados dos estudantes: nível técnico que está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma

determinada tarefa. Exemplo: Determinar a derivada da função $f(x) = x^2$; nível mobilizável que corresponde a um início de justaposição de saberes de um certo domínio, podendo até corresponder a uma organização, nesse nível o que se questiona é explicitamente pedido. Exemplo: Determinar a derivada da função $f(x) = x^2$ utilizando a definição; nível disponível que corresponde a saber responder corretamente o que é proposto sem indicações, esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas, ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Exemplo: A função horária do movimento de uma partícula é $f(t) = e^{2t-1}$ Int. Calcule a velocidade escalar no instante $t = 10$ (Robert, 1997, apud Nobre Barros e Dias, 2009, pp.4-5).

A definição de níveis de conhecimento de Robert (1997) conduz às noções de quadro e mudança de quadros de Douady (1984), a saber:

[...] constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do domínio. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas (Douady, 1984, p.128).

A mudança de quadros é uma transposição do trabalho do matemático para a didática que Douady (1992) considera como:

[...] um meio de obter formulações diferentes de um problema que sem ser, necessariamente, equivalente, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação. [...] Qualquer que sejam as traduções de um quadro em outro, elas terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, na criação de novos objetos matemáticos, em suma, no enriquecimento do quadro original e dos quadros auxiliares de trabalhos (Douady, 1992, pp. 135-136).

Após essa breve descrição do referencial teórico considerado na pesquisa, apresentamos a metodologia escolhida para desenvolver a investigação.

Metodologia da pesquisa

- Seleção das tarefas que evocam os pontos de vista do objeto de investigação, as noções de derivada de uma função;
- Classificação das tarefas levando em conta os pontos de vista identificados por Thurston, considerando o trabalho geral das mesmas;
- Observamos as regularidades, e analisamos a forma como os diferentes pontos de vista para a noção de derivada são gerados institucionalmente, por meio das macro avaliações;
- Identificam-se os pontos de vista que podem ser considerados como conhecimentos prévios para a introdução de novas formas de tratamento da noção de derivada, isto é, outros pontos de vista possíveis.

A seguir, apresentaremos as tarefas gerais.

Tarefas gerais

Para melhor posicionar as análises, apresentaremos abaixo as tarefas gerais, dessa forma classificaremos as questões trabalhadas nas macro avaliações identificando-as como segue.

- **TAREFA 1:** Verificar se uma função é positiva ou negativa; crescente ou decrescente por meio de seu gráfico.
- **TAREFA 2:** Determinar a taxa de variação de uma função.
- **TAREFA 3:** Articular a taxa de variação de uma função com o seu crescimento ou decrescimento por meio de seu gráfico.
- **TAREFA 4:** Determinar o coeficiente angular de uma reta dados dois pontos articulando com a taxa de variação.
- **TAREFA 5:** Determinar a taxa de variação de uma função definida por meio de uma situação contextualizada.
- **TAREFA 6:** Esboço do gráfico de uma função e estudo do seu comportamento utilizando a noção de derivada.
- **TAREFA 7:** Dado o gráfico da derivada de uma função, esboçar o gráfico da função.
- **TAREFA 8:** Associar o gráfico de uma função com o gráfico de sua derivada.
- **TAREFA 9:** Determinar a equação da reta tangente à função em um ponto dado.
- **TAREFA 10:** Estudar a variação da função (crescimento/decrescimento) e pontos críticos (máximos, mínimos e inflexão) por meio da derivada.
- **TAREFA 11:** Determinar os extremos relativos (máximo/mínimo local) por meio de uma situação contextualizada.
- **TAREFA 12:** Esboçar o gráfico de uma função articulando com os pontos de máximo e mínimo, e de crescimento e decrescimento.

A grade de análise

A grade deve servir como um instrumento para analisar as relações pessoais esperadas e as marcas que essas podem auxiliar no desenvolvimento da noção, objeto de estudo da nossa pesquisa.

Essa grade permite identificar às seguintes variáveis das tarefas usualmente encontradas para a introdução da derivada de uma função.

- Pontos de vista em jogo na tarefa;
- Ostensivos associados aos pontos de vista considerados;
- Quadro em que a tarefa é enunciada;
- Quadro para solução da tarefa;
- Níveis de conhecimento esperados dos estudantes.

Iniciaremos, a seguir, com as análises das avaliações aplicadas ao Ensino Médio, Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP. Dessa forma, consideramos que tais avaliações possibilitam identificar os pontos de vista em jogo associados à

noção de derivada com as dificuldades observadas quando essa noção é desenvolvida no Ensino Médio e introduzida no Ensino Superior.

O Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP – é uma avaliação externa da Educação Básica, realizada desde 1996 pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEE/SP. A sua implantação teve por finalidade a criação de um sistema de avaliação que permitisse obter dados sobre o ensino, por meio de rendimento escolar dos estudantes, em princípio, na rede pública desse estado.

Em 2010 foi realizada a décima terceira edição desse processo de avaliação. Considerado eficiente entre gestores, educadores e especialistas, como meio de obtenção de informações sobre o desempenho dos estudantes, o SARESP abrange, atualmente toda a rede de ensino do estado, pública e privada.

O SARESP além de se propor a avaliar o rendimento escolar dos estudantes, avalia, também, as competências e habilidades desenvolvidas pelos mesmos, nas diferentes etapas escolares. Assim, ele indica quais os componentes curriculares, em particular, aqueles que foram avaliados, necessitam uma intervenção, isto é, informa quais fatores intervenientes relativos ao desempenho escolar, por exemplo: recursos familiares e transições educacionais, estabelecendo relações entre eles.

Utilizando dois instrumentos de avaliação, o SARESP visa medir o desempenho do estudante em leitura e escrita, sendo eles: o *Questionário do aluno*, que coleta as informações pessoais, sociais, culturais, econômicas, a trajetória escolar, as percepções com relação aos professores, gestores e escola e, participações em projetos educacionais; o segundo, provas com os possíveis componentes curriculares trabalhados ao longo das etapas escolares anteriores.

Nossa pesquisa consiste em analisar o SARESP, ao longo de sua execução, buscando compreender quais os pontos de vista apontados por Thurston e os demais instrumentos de análise e, como eles podem estar relacionados com as relações institucionais esperadas e existentes.

Na seqüência, apresentamos as tarefas mais recorrentes nas macro avaliações estudadas.

TAREFAS 4 e 5

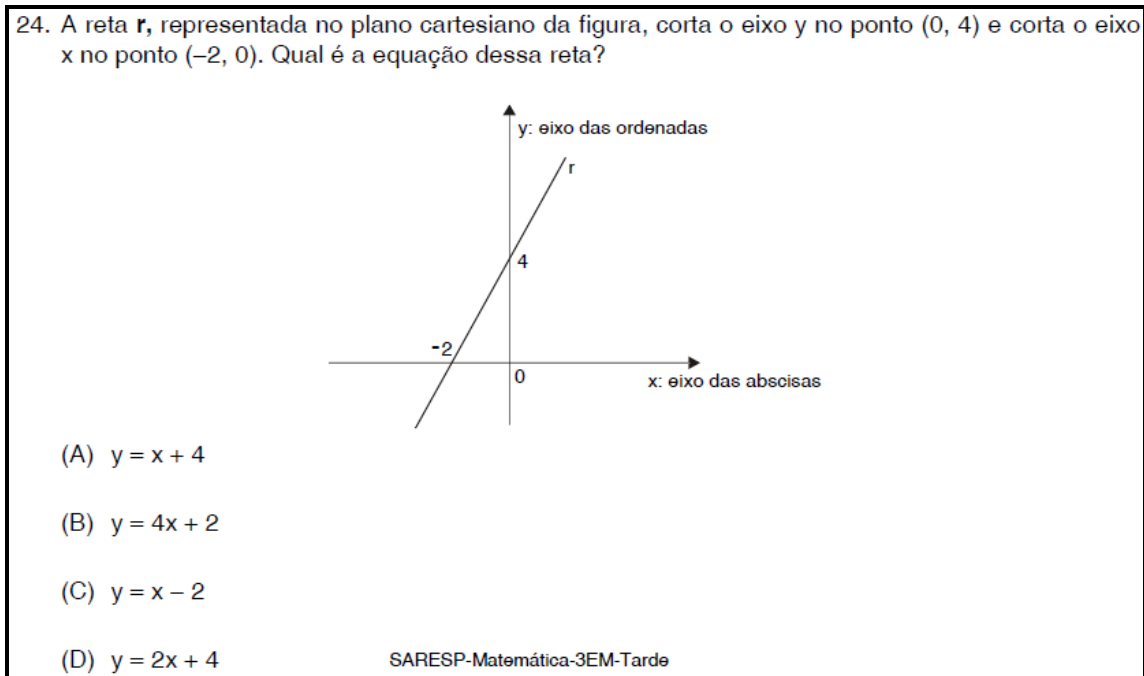


Figura 1 – Tarefa 4 – SARESP 2007 – 3ª. série EM – Tarde – Fonte: São Paulo (Estado), 2007a

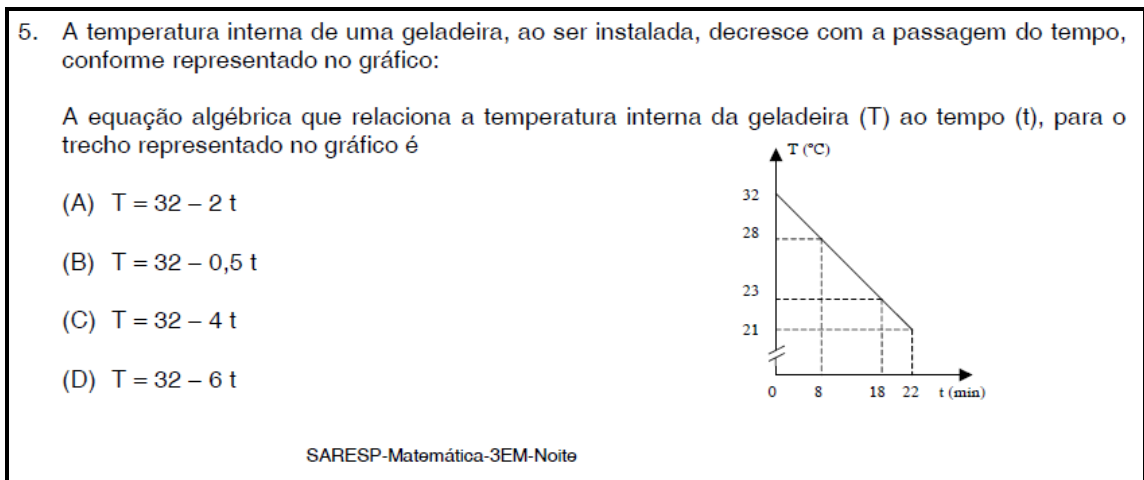


Figura 2 – Tarefa 4 e 5 –SARESP 2007 – 3ª. série EM – Noite – Fonte: São Paulo (Estado), 2007b

Pontos de vista em jogo na tarefa:

Ponto de vista geométrico.

Ostensivos associados aos pontos de vista considerados:

Ostensivos visuais, gestuais, discursivos, gráficos, escriturais, gráficos.

Quadro em que a tarefa é enunciada:

Quadro da geometria analítica.

Quadro para solução da tarefa:

Quadro algébrico.

Níveis de conhecimento esperados dos estudantes:

Mobilizável em relação à determinação das coordenadas cartesianas e, em relação à variação da reta (decrece) para a tarefa da 3^a. série do Ensino Médio do noturno.

Disponível em relação ao comportamento do gráfico, isto é, identificação das variações de crescimento, decrescimento e constante para a tarefa da 3^a. série do Ensino Médio do vespertino.

Disponível em relação à determinação dos coeficientes angular e linear para a identificação da equação reduzida da reta.

Análise das questões:

As tarefas poderão ser solucionadas pelos estudantes quando se considera os conhecimentos prévios supostamente desenvolvidos na 1^a série do Ensino Médio para as noções de função afim, ou seja, para que o estudante possa solucioná-la, ele deverá dispor dos conceitos de crescimento e decrescimento associados aos intervalos descritos na questão, bem como identificar os pares ordenados articulados com os ostensivos de representação escrita na forma algébrica das alternativas.

Para isso, é necessário um discurso tecnológico que justifique as escolhas, isto é, uma mudança de quadro, considerando que a tarefa é anunciada no quadro da geometria, quando se considera as questões tarde e noite apresentadas sob os ostensivos de representação escritural gráfico; e em particular para a questão do noturno, a tarefa é anunciada do quadro da Física, quando se considera as noções de terminologia; e solucionada no quadro algébrico.

Nessa tarefa, a noção de derivada pode ser manipulada no nível disponível quando se considera o ponto de vista geométrico para o ostensivo de representação visual; ou o ponto de vista taxa para o ostensivo de representação escrito e simbólico.

Para a 3^a série do Ensino Médio, a tarefa se encontra no nível mobilizável, pois no seu enunciado explicita claramente o que é esperado dela. Sendo assim, o estudante deverá ser capaz de determinar a equação da reta na sua forma reduzida, podendo utilizar de recursos similares aos expostos da questão apresentada acima do SARESP 2005. Levando em conta que para a questão do noturno existe uma contextualização do problema exposto, o que classifica essa atividade como uma TAREFA 5, observando o quadro das tarefas gerais.

Articular a noção de decrescimento com o coeficiente angular da reta na tarefa da 3^a. série do noturno, apesar de ser explicitado no problema, é uma tarefa usual nos livros didáticos, como podemos verificar no capítulo 5. Fazendo uma pequena mudança no enunciado da questão do período da tarde, essa tarefa pode ser revisitada no quadro das funções, porém a noção de derivada permanece implícita, considerando que o quadro algébrico por se só dá conta de solucionar tais tarefas.

Considerações finais

As análises apresentadas das relações pessoais esperadas mostram uma grande preocupação em fazer funcionar os conteúdos desenvolvidos na Educação Básica com a preparação do estudante egresso (considerando que analisamos a transição médio-superior) para o pleno exercício da cidadania, ou seja, colocar em evidência as possibilidades de articulação entre os conhecimentos matemáticos com as situações-problema que fazem parte ou não do cotidiano desse estudante.

Alem disso, é interessante observar que existe uma tentativa de melhorar o trabalho do professor e do estudante, pois as Matrizes de Referências – acervo de questões a serem

trabalhadas em sala de aula pelos professores, sugerem que ao invés de estudarem conceitos isolados da Matemática, é necessária uma articulação desses conceitos tanto na interdisciplinaridade quanto transdisciplinaridade, isto é, o conhecimento passa de algo local para um conhecimento integrado a outros saberes interagindo entre si e assim rompendo fronteiras de saberes diversificados, construindo novos conhecimentos em um processo cíclico (Brousseau, 2009).

Constatamos que as tarefas mais recorrentes nos livros didáticos, quando se considera a noção de derivada, também são as que mais se fazem presentes nas avaliações do SARESP, haja vista que essa tarefa esteve em todas as avaliações anteriores, analisadas na pesquisa maior, onde este artigo está inserido. Assim, quando essas tarefas forem revisitadas no contexto de derivadas, esperamos que o estudante seja capaz de relacionar o movimento de crescimento e decrescimento com a taxa de variação, noção intuitiva básica para a introdução desse conceito.

Além disso, é possível verificar que essas tarefas pouco são exigidas nas avaliações oficiais, quando se analisa as provas para o Ensino Médio, o que mostra que existe pouca preocupação em avaliar essa noção.

Observamos ainda que, são privilegiados mais o estudo de função, como um conteúdo quase sempre isolado às noções de derivada. Portanto, apresentar ao estudante a importância do conceito de função associando aos de derivada, por meio de problemas relevantes podem ajudá-los a compreender e, em uma próxima etapa de escolaridade, articular tais noções.

Dessa forma, procuramos mostrar, por meio dessa pesquisa, que inserir as noções de derivada nos conteúdos do Ensino Médio, não é uma tarefa difícil, basta que haja uma reestruturação nos planos de ensino e nas tarefas, particularmente, para que estes sejam trabalhados nos livros didáticos de forma mais explícitas. Assim, quando o estudante ingressar no Ensino Superior, supomos que promova uma melhor compreensão na utilização da noção de derivada, bem como, para o desenvolvimento de outros conceitos ligados ao Cálculo, diminuindo então, o *abismo* que existe nessas etapas escolares, aqui estudadas neste trabalho, em particular, quando se considera os cursos de Matemática Licenciatura.

Bibliografia e referências

- Bosch, M. & Chevallard, Y., (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77- 123.
- Brousseau, G. (2009) Notas do Curso de Altos Estudos – *Teoria das Situações*. UNIBAN: São Paulo.
- Chevallard, Y.,(1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Grenoble : *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.
- _____. (1996). Conceitos fundamentais da didactia: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, Jean. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.115-153.
- Dias, M. A. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat, Paris, Université Paris VII.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse de Doctorat, Paris, Université de Paris VII.

Douady, R. (1992) Ingénierie Didactique et evolution du rapport au savoir. Paris. *Repères IREM*, 6, 132-158.

Nobre Barros, L. H. & Dias, M. A., (2009). Os pontos de vista disponíveis para a Introdução de Derivada de uma Função na Transição do Ensino Médio e Superior [CD-ROOM]. *In: Anais do Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 4*. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto.

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques*. 192-212

Rogalski, M. (1995). *Notas manuscritas do Seminário de São Paulo*. Brasil.

Thurston, W.P. (1995) Preuve et progrès en Mathématiques. Paris. *Repères IREM*, 21, 5-26
São Paulo. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. (2005). SARESP – Ensino Médio – 3ª série. São Paulo: SEE, 2005.

_____. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. (2007a). SARESP – *Ensino Médio* – 3ª série – tarde. São Paulo: SEE.

_____. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. (2007b) SARESP – *Ensino Médio* – 3ª série – noite. São Paulo: SEE.