



UM PASSEIO NA HISTÓRIA DA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU – UMA METODOLOGIA DE ENSINO

Anayara **Gomes** dos Santos
Universidade federal de Alagoas
Brasil

anayaragomes@hotmail.com

Vívia Dayana **Gomes** dos Santos
Universidade Federal de Alagoas
Brasil

vidaya14@hotmail.com

RESUMO

Há algum tempo tem-se pensado no uso da História da Matemática como metodologia de ensino, tanto no ensino básico como no superior. A intenção é despertar nos alunos a curiosidade envolta de um determinado conteúdo e até responder a uma das perguntas básicas que muitos de nossos alunos fazem: Quem inventou isso? Baseado na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, que defende a idéia de que para se ter uma aprendizagem significativa o conteúdo escolar a ser aprendido tem que ser potencialmente significativo, esta comunicação tem por objetivo apresentar-lhes aspectos históricos que envolveram a resolução das equações polinomiais do terceiro grau bem como a sua solução, conteúdo geralmente apresentado aos alunos do 3º ano do Ensino Médio. Antes de simplesmente apresentar aos seus alunos a “fórmula” para resolver este tipo de equação, o professor pode despertar o interesse e a curiosidade deste por apresentar-lhes esta fascinante história.

Palavras-chave: história, equação do terceiro grau, resolução.

INTRODUÇÃO

Na intenção de despertar nos alunos o desejo e o gosto em aprender matemática, algumas propostas tem sido lançada e pesquisadas: contextualização, aplicação de

determinado assunto na realidade e na vida cotidiana dos alunos, histórico de determinados assuntos, jogos, programas e aplicativos utilizado as tecnologias de informação etc. Aqui iremos destacar que os fatos históricos sobre determinado assunto podem sim despertar a curiosidade que muitos de nossos alunos têm de saber “quem” e “como” foi descoberto certa regra ou fórmula.

Barbosa & Vaiano(2004), Silva (2005) e Souza(2010) destacou a contribuição de fatos históricos da matemática na aprendizagem de determinado conteúdos.

Conforme dito por Pinedo & Pinedo(2004),

Conhecendo a História da Matemática pode-se superar a maior parte do problema de aprendizado das matemáticas por parte dos estudantes de todas as séries do ensino, embora isto obrigue a os educadores a desenvolver hábitos de pesquisa, leitura entre outros.

Com base na Teoria da Aprendizagem significativa de David Ausubel, foi planejada uma introdução a apresentação de equações polinomiais, feita em slide, para uma turma do segundo semestre do curso de Licenciatura de Matemática em uma Universidade Federal do estado de Alagoas.

Segundo Moreira (2009, pag.34),

Em termos de ensino e aprendizagem, diz-se que o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo, ou seja, relacionável de maneira não-arbitrária e não-literal à estrutura cognitiva do aluno e este deve buscar, deliberadamente, relacionar o novo material com aquilo que já sabe.

Como introdução de uma aula de matemática que iria tratar do tópico sobre equações polinomiais do terceiro grau, foi feito uma retrospectiva histórica a cerca da descoberta e da demonstração da fórmula que dá as soluções deste tipo de equação. Esta é uma história interessante e que fascina quem a ouvi.

A intenção foi chamar a atenção dos alunos para as dificuldades que os matemáticos antigos tinham em relação à resolução de problemas que hoje se tornam fácil devido ao uso de variáveis e de uma linguagem matemática simbólica, bem como despertar nos alunos a curiosidade pela história da matemática e motivá-los a demonstrar interesse pelo tópico que seria estudado mais a diante – Equações Polinomiais.

Após esta introdução foi apresentado à fórmula, bem sua demonstração, para a resolução de uma equação do terceiro grau. Foi frisado para os alunos que além dos métodos utilizados em nossos dias para resolver equações deste tipo, podemos fazer uso também da fórmula deduzida há quase 500 anos atrás.

Na sessão que se segue o leitor encontrará os aspectos históricos por traz da equação do terceiro grau. Logo em seguida, será apresentada a álgebra destas equações. Finalizaremos as com as considerações finais onde será descrito o resultado das reações desta turma diante do que lhes foi apresentado.

ASPECTOS HISTÓRICOS – EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

Sabe-se que por volta do ano 1700 a.C., os matemáticos babilônicos já conheciam regras para resolver equações do segundo grau. Estas equações resumiam-se em problemas tais como o de encontrar dois números conhecendo a soma e o produto destes números. Em geral, resolver uma equação do segundo grau resume-se nisso. Os gregos aperfeiçoaram esse

conhecimento demonstrando tais regras e conseguiram obter raízes irracionais por meio de processos geométricos, mesmo numa época em que não tinham conhecimento de números irracionais.

Durante quase três mil anos, buscou-se encontrar um método para solucionar problemas que envolviam equações de 3º grau. Este fato intriga até hoje muitos pesquisadores matemáticos: Por que esperar tanto tempo, quase três mil anos, para encontrar a solução de equações do terceiro grau?

Em 1494, Frei Luca Pacioli (Figura 1) renomado professor de matemática e amigo de Leonardo da Vinci, tendo ensinado em muitas Universidades da Itália, escreveu um livro intitulado “La Summa de Aritmética, Geometria, Proportioni et Proportionalità” contendo noções de cálculo aritmético, radicais, problemas envolvendo equações do primeiro e do segundo grau, geometria e contabilidade.



Figura 1. Frei Luca Pacioli (1445 – 1517)

Naquele tempo as equações não eram escritas utilizando variáveis. A variável que hoje chamamos de x era chamada de coisa, x^2 de censo, x^3 de cubo, x^4 de censo censo e assim por diante. Assim, a Álgebra de hoje era chamada de “a arte da coisa” ou “a coisa maior”. Estas notações foram utilizadas até 1572, ano em que se deu o surgimento da Álgebra de Raphael Bombelli.

Depois de ensinar em forma de veros a regra para resolver equações do segundo grau, Pacioli afirmava que não podia existir uma regra geral para a resolução de problemas do tipo “cubo e coisa igual a número”, algebricamente falando, $x^3 + px = q$.

Mas, cabe a Scipione Del Ferro (Figura 2) (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha e de quem pouco se conhece, a glória de resolver esse problema de três mil anos, problema que desafiou a argúcia dos matemáticos por muito tempo. Por volta de 1505, Ferro consegue deduzir um método para encontrar as soluções da equação dos tipos

$$x^3 + px = q \text{ e } x^3 = px + q.$$

O interessante é que ele não divulga sua solução e nem faz nenhum comunicado sobre.



Figura 2. Scipione Del Ferro (1465-1526)

Naquele tempo eram comuns duelos intelectuais, onde os duelistas usavam como armas listas contendo problemas matemáticos que julgava ser impossível seu adversário resolvê-los. Alguns contratos de professores eram temporários e muitas vezes sua permanência dependia do seu desempenho nessas disputas. Talvez seja por isso que Ferro manteve em segredo sua grande descoberta, revelando-a apenas a dois de seus discípulos, Annibale Della Nave e Antonio Maria Fiore.

De posse dessa poderosa arma, em 1535 Fiore desafia Nicoló Tartaglia para uma disputa matemática. Tartaglia era professor em Veneza e já tinha derrotado outros desafiantes. Teve uma vida muito difícil. Nasceu muito pobre, aos seis anos ficou órfão de pai e aos sete anos foi atingido por um soldado no rosto. Devido ao susto e aos golpes, passou a gaguejar e por esse motivo recebeu de seus amigos o apelido de Tartaglia, que significa gago. Devido à gagueira, não conseguiu aprender a ler e escrever com a ajuda de um professor se tornando assim autodidata até se tornar por conta própria um professor estimado e procurado.

Fiore propôs uma lista contendo 30 problemas que, de uma forma ou de outra, envolvesse equações do terceiro grau e Tartaglia fez a sua lista, também contendo 30 problemas, mas de natureza bem mais variada.

Oito dias antes do encontro, depois de longas tentativas, Tartaglia conseguiu descobrir um método para resolver equações do tipo

$$x^3 + px + q = 0 \text{ e } x^3 + px^2 + q = 0,$$

a qual Fiore não conhecia. Assim, em 1535, Tartaglia de uma só vez resolveu as 30 questões propostas por Fiore e ganhou a competição.

O resultado desse duelo teve grande repercussão e logo chegou a Milão, onde vivia Girolamo Cardano (ou Cardan) que ficou muito curioso para saber quem e como foi conseguido algo que Pacioli julgava ser impossível. Cardano (Figura 3) era filho ilegítimo de um advogado cuja competência em matemática era tal que foi consultado por Leonardo da Vinci sobre as questões de geometria. Cardano tornou-se assistente de seu pai, mas começou a pensar em uma carreira acadêmica depois de aprender matemática. Ele estudou medicina, mas por ser muito sincero e crítico não era bem quisto. Assim, voltou-se para o jogo afim de ganhar a vida tirando vantagem sobre seus adversários devido o conhecimento que tinha sobre

probabilidade. Jogo tornou-se um vício que era para durar muitos anos e roubar Cardano de tempo precioso, dinheiro e reputação.



Figura 3. Girolamo Cardano (1501-1576)

Cardano usou todos os meios para atrair Tartaglia a sua casa e lá, sob a promessa de que iria guardar segredo, obteve dele, em 1539, a regra para resolver a equação $x^3 + px = q$. Esta regra foi dada em forma de versos enigmáticos e sem uma indicação de prova.

Depois da visita de Tartaglia, com muito esforço e com a ajuda de seu discípulo Ludovico Ferrari, Cardano conseguiu a prova para a regra da resolução da equação $x^3 + px = q$. Naquela época, não era costume concentrar os termos da equação no primeiro membro deixando apenas o zero depois da igualdade e nem se percebia que uma equação sem o termo x^2 é o mesmo que ter esse termo com o coeficiente zero. Assim, Cardano descobriu que a substituição $x = y - a/3$ elimina o termo x^2 da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Ao todo, foram deduzidas fórmulas para resolver 13 tipos de equações do terceiro grau. Hoje, essas fórmulas se reduziram em uma única.

Em 1542, Cardano e Ferrari (1522-1565) visitaram Bolonha e obteve de Della Nave permissão para examinar os manuscritos de Del Ferro e encontraram a solução da equação $x^3 + px = q$. Considerando-se desobrigado do juramento feito a Tartaglia, Cardano publicou a fórmula em seu livro “Ars Magna” (Figura 4), em 1545.



Figura 4. Capa do livro Ars Magna (1545)

Enfurecido, Tartaglia publica (1546) o livro “Quesiti et Inventioni Diverse” (Figura 5). Neste livro ele apresenta soluções de vários problemas e ataca Cardano pela quebra do solene juramento. Esta publicação foi respondida por um panfleto de Ferrari em defesa do seu mestre, o que provocou uma réplica de Tartaglia iniciando-se assim uma polêmica que durou um ano.



Figura 5. Capa do livro Quesiti et Inventioni Diverse (1546)

A disputa terminou quando o Ferrari, de posse da solução da equação do quarto grau, propôs questões que Tartaglia não conseguiu resolver. Assim, com a morte do esquecido Tartaglia, Cardano teve por muito tempo seu nome associado à fórmula.

A ÁLGEBRA

De posse do conhecimento de como se deu a descoberta da solução de uma equação do terceiro grau, será apresentada agora a fórmula para se encontrar umas das raízes deste tipo de equação bem como a sua demonstração pelo método aperfeiçoado por Cardano.

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, encontrando uma das raízes, digamos x_1 , para obter as outras duas raízes, basta dividir a equação do terceiro grau dada por $(x - x_1)$. Com isso, obteremos uma equação do segundo grau que para resolvê-la podemos utilizar a fórmula de “Bhaskara¹”.

Uma equação do terceiro grau na variável x , é dada por

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com $a \neq 0$, que equivale a

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Assim só iremos considerar equações em que o coeficiente de x^3 seja igual a 1.

Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, a substituição $x = y - \frac{a}{3}$ (método utilizado por Cardano para eliminar o termo x^2) a transforma em

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0,$$

equivalente a:

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0.$$

Note que a equação acima é desprovida de termo do segundo grau. Portanto é suficiente estudar as equações do terceiro grau do tipo

$$x^3 + px + q = 0.$$

Como toda equação desta forma possui pelo menos uma raiz real, nós procuraremos esta raiz na forma $x = u + v$. Substituindo, obtemos

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0,$$

isto é,

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Usando esta última equação e impondo a condição para que:

¹ O nome Bhaskara se encontra entre aspas, pois ao analisarmos a história notamos que não foi Bhaskara que a deduziu, ele apenas a aperfeiçoou. É apenas no Brasil que a fórmula de resolução da uma equação do segundo grau recebe o nome de Fórmula de Bhaskara.

$$p = -3uv \quad \text{e} \quad q = -(u^3 + v^3).$$

Obteremos valores de u e v para os quais $x = u + v$ deverá ser uma raiz da equação. Estas últimas condições implicam que:

$$u^3 v^3 = \frac{-p^3}{27} \quad \text{e} \quad u^3 + v^3 = -q.$$

Ora, o problema de achar u^3 e v^3 conhecendo a sua soma e o seu produto é, como sabemos de fácil solução: u^3 e v^3 são as raízes da equação do segundo grau

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Utilizando a fórmula clássica para resolver esta equação, obtemos

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e, conseqüentemente,

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Assim, $x = u + v$, dada pela fórmula acima, é raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Na fórmula acima, destaquemos o radicando

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Se $D \geq 0$ a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas;

Se $D = 0$ têm-se três raízes reais, sendo uma repetida;

Se $D \leq 0$ então as três raízes da equação $x^3 + px + q = 0$ são reais e distintas.

Vejamos alguns exemplos retirados do livro de Álgebra de Leonard Euler, escrito em 1770, o qual serviu de modelo para os compêndios utilizados por sucessivas gerações de estudantes.

Exemplo 1: $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Aqui, $D = \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2$. Mas este número é maior que 0. Logo, a fórmula nos dá a raiz $x = 2 + 1 = 3$.

Dividindo $x^3 - 6x - 9$ por $x - 3$, obtemos $x^2 + 3x + 3$, daí as duas raízes restantes são as da equação $x^2 + 3x + 3 = 0$, isto é, $\frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{-3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exemplo 2: $x^3 - 3x - 2 = 0$.

Neste caso, $D = 0$ e a fórmula nos dá a raiz $x = 2$. Como $(x^3 - 3x - 2)/(x - 2) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, as outras raízes são -1 e -1, ou seja uma raiz dupla.

Note que chegaríamos às raízes simplesmente examinando os divisores de 2, pois a equação não tem raízes irracionais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Notou-se que ao ouvir a história, a turma ficou muito animada. Faziam muitas perguntas e os alunos ficaram maravilhados com o fato de que muitas descobertas foram feitas na área da matemática apesar da carência de literatura nesta área e também da tecnologia que temos hoje.

Muitos não conheciam esta fórmula descoberta por Tartaglia e aperfeiçoada por Cardano. Alguns até já ouviram rumores dos fatos históricos, mas nunca lhes foi apresentado a fórmula e nem nunca haviam se interessado a pesquisar.

Findada a apresentação, em outra aula, foi dada aos alunos uma lista contendo algumas equações do terceiro grau, equações completas e incompletas, para que em grupo de quatro pessoas fossem resolvidas utilizando o método de Cardano. Após o prazo estipulado, cada equipe foi ao quadro negro apresentar a solução de um dos itens propostos na lista, explicando e comentado o que da história a cerca desta equação mais lhe chamou a atenção e se o método utilizado por Cardano pode ser aplicado ou até ensinado em sala de aula.

Conclui-se com isso que fazer uso da história da matemática como metodologia de ensino contribui para uma aprendizagem significativa do indivíduo, não importando em qual nível escolar ele esteja. Mas cabe o professor usar de bom senso para não tornar suas aulas de matemática em uma aula de história matemática monótona e sem uma aplicação dos objetos estudados na vida prática de seus alunos.

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

- Augusto, Í., Henrique, I. & Willian, J.(2009). Equações de Terceiro Grau - Aspecto Histórico e Algébrico.
- Barbosa, A. C. M., & Vaiano, A. Z.(2004). O uso da história da matemática e outras metodologias de ensino em sala de aula. *Minicurso apresentado no VII Encontro Nacional de Educação Matemática*.
- Equação cúbica.(2010) Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Equa%C3%A7%C3%A3o_c%C3%Babica.
- Moreira, M. A.(2009). Subsídios teóricos para o professor-pesquisador do ensino de ciências. *Porto Alegre*.
- Niccolò Tartaglia.(2010). Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Tartaglia.

- Pinedo, C. Q., & Pinedo, K.S. (2004). A história da matemática como elemento educador e motivador. *Faculdade de Pato Branco, Congresso de Educação*.
- Santos, J.C.M.(2010). As formas de Cardano além das cúbicas. *Trabalho de conclusão de curso*.
- Silva, J. C.(2000). A História da Matemática e o Ensino da Matemática. *Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra, Portugal*.
- Sousa, M.C.(2007). Quando a História da Matemática passa a ser Metodologia de Ensino. *Departamento de Metodologia de Ensino. UFSCar – São Carlos/SP*.
- Yamazaki, S. C.(2008). Teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. *Material preparado para a disciplina de estágio supervisionado em Ensino de Física. Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul*.