XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

Una modelación del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas a través de sistemas dinámicos. Un ensayo

Mauro García Pupo
Universidad Antonio Nariño
Colombia
direccion.maestria.edumat@uan.edu.co

Rafael Gutiérrez Salamanca
Universidad Antonio Nariño
Colombia
director.sistemas.complejos@uan.edu.co

Juan E. Nápoles Valdés
Universidad Nacional del Nordeste
Argentina
jnapoles@exa.unne.edu.ar

RESUMEN

Se presentan resultados preliminares de un ensayo de modelamiento matemático a través de un sistema dinámico, con el objetivo de observar y estudiar ciertos comportamientos cualitativos a que da lugar la riqueza y complejidad el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

Palabras claves: sistemas dinámicos, proceso enseñanza aprendizaje, matemáticas, caos.

Introducción

Uno de los aspectos que mejor caracterizan el proceso de enseñanza aprendizaje lo constituye su dimensión subjetiva. Cuando este proceso se realiza con una disciplina, como la de las **matemáticas**, le incorpora además la naturaleza subjetiva de ésta. Entonces se podría decir que el **proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas** es un proceso subjetivo de una disciplina subjetiva. Esto puede parecer como un juego de palabras, pero realmente, un proceso de esta índole es posible modelarlo con un **sistema dinámico**. Sin embargo, la matemática en sus diversas disciplinas y aplicaciones, es el lenguaje necesario para construir un conocimiento objetivo, de valor universal y permanente, fundamentalmente por medio de representaciones consistentes de lógica inductiva y deductiva.

Es muy numerosa la literatura dedicada al modelamiento, a través de los sistemas complejos, de los procesos cognitivos que surgen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de cualquier disciplina escolar. Resultan interesantes los resultados del modelamiento de los mecanismos básicos descritos en las teorías de Piaget, Vygotsky y otros (Paul van Geert, 1998 y otros trabajos precedentes). Es por ello que este trabajo pretende presentar los primeros ensayos de una dimensión de sistemas de esta naturaleza que puede permitir incidir en un proceso tan subjetivo como lo es la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Sistemas dinámicos y caos

Los sistemas dinámicos son un entorno formal para estudiar el caos, donde caos debe ser entendido, dentro de este contexto, como un determinismo tan rico y complejo que nos parece impredecible, estocástico, caótico en el sentido popular de la palabra. La complejidad y riqueza del caos es de interés tanto para la matemática desde un punto de vista formal, como para la física y las ciencias en general desde un punto de vista de la matemática aplicada, por su capacidad en permanente desarrollo para simular y construir modelos de sistemas complejos.

Los sistemas dinámicos son el lenguaje formal, consistente y objetivo que permiten estudiar y aprovechar la paradójica capacidad del caos dinámico para describir comportamientos muy complejos con modelos relativamente muy sencillos. El estudio y las aplicaciones del caos son entonces un área interdisciplinar del conocimiento moderno cuyo rápido progreso depende en buena medida de las capacidades y accesibilidad para manejar grandes cantidades de información a grandes velocidades que ofrece la ciencia y tecnología de la información y las comunicaciones (CTIC). La CTIC moderna involucra grandes progresos conceptuales fundamentales y grandes desarrollos tecnológicos eficientes y prácticos. Su coevolución y sinergias con otras áreas interdisciplinares y convergentes del conocimiento, están permitiendo desarrollar comprensión y aplicaciones de gran poder en prácticamente todas las áreas del conocimiento. Históricamente, la CTIC permitió superar la inaccesibilidad y la limitada fortaleza de los teoremas matemáticos formales iniciales de los sistemas dinámicos por medio de las grandes capacidades que le dio al análisis numérico, llevando a abundantes, nuevas y diversas capacidades modernas de análisis de información que aumentan y evolucionan permanentemente.

La teoría del caos puede ir en contra de la definición de complejidad, como otra teoría moderna de rápido desarrollo conocida también como la teoría de la organización, la que estudia procesos como autoorganización y propiedades emergentes a partir de de un gran número de partes o constituyentes. El caos como comportamiento emergente y complejo, es posible a partir de muy pocas variables independientes, pero con interacciones complejas, no lineales. Para resolver tal paradoja, se debe entender que el caos dinámico surge de la complejidad de las interacciones de pocos elementos en lugar de interacciones simples de muchos elementos. Las dos formas de complejidad son fuentes de riqueza suficiente para permitir la emergencia de nuevas cualidades inexistentes en los constituyentes, y seguramente, diversas combinaciones son necesarias para un verdadero estudio de la complejidad y riqueza de la gran diversidad de fenómenos naturales, sociales y humanos. Entonces, una de las mayores cualidades del caos dinámico, es la de poder explicar fenómenos muy complejos sin necesidad de recurrir a factores externos que pueden sacrificar la objetividad.

En este trabajo se concentrará fundamentalmente en la fenomenología del caos en sistemas dinámicos aplicados al proceso de enseñanza de la matemática; es decir, es de interés la aplicación del caos dinámico con todas sus capacidades para modelar y simular aspectos que pueden ser relevantes en la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Sin embargo, la formalidad y rigurosidad matemática de los sistemas dinámicos son la base del conocimiento objetivo al que eventualmente se pretende contribuir con estos esfuerzos.

El comportamiento caótico, en los términos dinámicos expuestos, no es muy frecuente en los fenómenos naturales, sociales y humanos, o por lo menos no ha sido encontrado de forma evidente con frecuencia; muy posiblemente, por una cantidad de fenómenos que lo acompañan tanto de origen intrínseco como asociados a la observación, los que lo hacen inaccesible a un análisis simple. Sin embargo, en su gran mayoría los procesos fundamentales pueden ser descritos naturalmente por sistemas dinámicos, y dentro de ellos los aspectos más complejos como la retroalimentación, la emergencia, etc., pueden ser muy bien representadas o descritas formalmente por medio de no linealidades, las que se constituyen en la semilla de todo comportamiento caótico.

Por lo tanto, la pretensión no es encontrar caos explícitamente en este proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, sino de aplicar una herramienta muy poderosa y relativamente simple que puede ser muy útil para describir aspectos muy importantes de la riqueza y complejidad de dicho proceso.

Un sistema dinámico puede ser definido como una prescripción matemáticamente determinista para describir el desarrollo, cambio o evolución del estado de un sistema. El desarrollo, cambio o evolución de un sistema implica la variación continua o discreta de un parámetro del cual depende el cambio o variación de las variables que describen los estados del sistema. Cuando el parámetro es el tiempo y este varía de forma continua, hablamos entonces de un sistema dinámico al describir la dinámica del sistema: cómo se comporta el sistema al pasar de un estado a otro con el tiempo.

Hasta este punto, un sistema dinámico es abstracto, las variables que describen los estados del sistema y los estados mismos no tienen ninguna interpretación más allá de la consistencia formal matemática que corresponda a una representación particular. Lo único que tiene una interpretación bien definida es el tiempo, el cual es un parámetro físico que fluye de forma continua según la percepción clásica de la naturaleza y es perfectamente objetivo, medible, verificable y consistente con la experiencia que se tiene; con los procedimientos apropiados dentro de unos rangos de valores en los que se incluyen una gran diversidad de fenómenos. Con una visión clásica de la naturaleza se quiere dar a entender básicamente que tanto el tiempo se considera continuo (aunque las observaciones siempre sean discretas), y que en principio los fenómenos ocurren u ocupan un periodo de tiempo muy pequeño dentro del tiempo que es prácticamente infinito. Por lo tanto, es simple, elegante, útil y poderoso formalizar y concretar un sistema dinámico de *N* variables, representándolo por medio de un sistema autónomo de *N* ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Dicho **sistema dinámico** se puede escribir sintéticamente en forma vectorial:

$$\dot{x}_i = f_i\left(x_j\right) \; con \; i, j = 1,2, \dots, N$$

Autónomo significa que el tiempo no aparece de forma explícita, simplemente como el parámetro cuya variación permite los cambios de las variables y por lo tanto los cambios continuos de estado del sistema. Esto también significa que las escalas de tiempo no son directamente relevantes en una aplicación, lo relevante fenomenológicamente son las unidades en que se mide cada variable y de éstas surgen las escalas de tiempo relevantes de la dinámica del sistema.

Un sistema dinámico es determinista porque al conocer el estado inicial del sistema en el tiempo $t = 0$, en principio podemos resolver el sistema de ecuaciones y de esta forma conocer el estado del sistema a cualquier tiempo futuro t.

La órbita o trayectoria de un sistema dinámico es la curva que describe el sistema en el espacio de fase de las N variables como funciones del tiempo, es decir, la función vectorial $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2 \dots f_N)$ solución del sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Como se presentó anteriormente, un sistema dinámico puede ser complejo por el número N. Si éste es grande es evidentemente complejo pero su complejidad puede ser intratable perdiendo toda utilidad en la mayoría de los casos. La fuente de complejidad más importante depende de la forma vectorial $\boldsymbol{f}$ al incluir términos no lineales entre las N variables, para un N pequeño. La función vectorial $\boldsymbol{f}$ determina el número de no linealidades y el peso de sus contribuciones a la dinámica del sistema. Un sistema dinámico es muy sensible a las no linealidades permitiendo que pequeñas variaciones puedan significar cambios sustanciales de la solución del sistema. Es decir, por medio de pequeñas variaciones de los parámetros un sistema dinámico puede pasar muy fácilmente de puntos de equilibrio, a ciclos, a trayectorias divergentes, y particularmente, a soluciones caóticas de un gran potencial descriptivo para modelar fenómenos complejos. Adicionalmente la teoría del caos demuestra que con $N = 3$ es suficiente número de variables o grados de libertad para que la complejidad surja de las interacciones de estas tres variables. Esto significa una herramienta útil y potencialmente poderosa para describir aspectos fundamentales de la complejidad del proceso de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, precisamente porque con unas pocas variables fundamentales podría describir fenómenos muy ricos y complejos.

Hipótesis de trabajo

La hipótesis de trabajo parte, para construir un círculo virtuoso de hipótesis y observaciones, de intuiciones y experiencias en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática que irá enriqueciéndose y aprovechando la capacidad y utilidad de los sistemas dinámicos como recurso relativamente simple y formal de describir sistemas complejos como se espera sea el proceso bajo estudio.

Bajo esta perspectiva, se toma un sistema dinámico de tres dimensiones $N = 3$, por ser el sistema más simple y suficiente para tener una gran diversidad de posibles soluciones incluyendo el caos dinámico. Entonces se definen inicialmente las siguientes variables:

Las variables que interesa medir y caracterizar como consecuencia del proceso representado por el sistema dinámico son:

Aprendizaje: x_1, y las dos variables fundamentales que deben interactuar en este proceso:

Entorno: x_2,

Condiciones propias: x_3

Entorno y condiciones propias

El entorno incluye el profesor, el colegio, el programa, etc. Las condiciones propias son los talentos, intereses, motivaciones, etc. De estas definiciones preliminares se ve claramente la interdependencia de las tres variables, las que pueden representarse por no linealidades del sistema dinámico presentado formalmente en la ecuación anterior. El problema entonces se reduce a encontrar la forma de la función vectorial ***f***, o más precisamente de sus tres componentes $\boldsymbol{f_i}$, con $i = 1, 2, 3$.

Adicionalmente se parte de una **hipótesis fenomenológica y metodológica** como una primera aproximación, la que consiste en expandir las funciones $\boldsymbol{f_i}$, para generalizar las no linealidades hasta segundo orden, lo que deja una riqueza más que suficiente para representar prácticamente todas las soluciones hasta ahora conocidas de sistemas dinámicos no lineales:

$$\dot{x}_i = a_i + b_{ij}\, x_j + c_{ij}\, x_i\, x_j \quad con\ i,j = 1{,}2{,}3$$

Donde cada uno de los parámetros tienen una interpretación fenomenológica del proceso y pueden tener valores en el intervalo (-∞,∞). Sin embargo, lo importante son los valores relativos entre estos parámetros para hacer más o menos importante un factor dentro del sistema dinámico y de esta forma cambiar radicalmente la naturaleza de las soluciones.

a_i - es la **variación natural con el tiempo** y puede ser 0

$b_{ij}\, x_i$ - **su variación depende de su estado**

$c_{ii}\, x_i^2$ - **puede depender no linealmente de su estado (**para $i{=}j$ (en itálicas) **)**

$c_{12}x_1\, x_2$ - **el aprendizaje depende del estado del entorno**

$c_{13}x_1\, x_3$ - **el aprendizaje depende de las condiciones propias**

$c_{23}x_2\, x_3$ - **el entorno es modificado por las condiciones propias**

Ensayos: Se harán con el objetivo de mirar resultados y posibles interpretaciones de los cálculos

Un primer ensayo:

Se suponen condiciones extremas muy idealizadas en que en las cuales tanto el entorno x_2 como las condiciones propias x_3 se consideran constantes. Es decir: $\dot{x}_2 = 0$ y $\dot{x}_3 = 0$.

$$\dot{x}_1 = a_1 + b_{11}\, x_1 + b_{12}\, x_2 + b_{13}\, x_3 + c_{11}\, x_1^2 + c_{22}\, x_2^2 + c_{33}\, x_3^2 + c_{12}x_1\, x_2 + c_{13}x_1 x_3 + c_{23}x_2\, x_3$$

De forma adicional se considera también que $b_{1j} = 0$, así como c_{22} ,c_{33} , c_{23} y c_{33} lo cual significa considerar que el aprendizaje no depende de la variación del valor actual, ni del entorno, ni de las condiciones propias.

Es evidente, que con estas condiciones “tan idealizadas” se generaría un modelo alejado de la realidad, por lo que es necesario quitar algunas de estas condiciones para aprovechar mejor el potencial cuya solución demandaría un sistema dinámico más completo. En este caso se redujo a la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$\dot{x}_1 = a_1 + b_{11}\, x_1 + c_{11}\, x_1^2$$

Al separar las variables de la ecuación diferencial anterior para integrarla, se puede escribir:

$$-\frac{1}{\sqrt{c_{11}}}\int_0^x \frac{\sqrt{c_{11}}\, dx_1}{\left(\frac{\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\, c_{11}}}{2\sqrt{c_{11}}}\right)^2 - \left(\frac{2c_{11}\, x_1 + b_1}{2\sqrt{c_{11}}}\right)^2} = \int_0^t dt$$

Cuya solución será:

$$\frac{1}{\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}}}\,ln\left|\frac{\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}} - (2c_{11}\,x_1 + b_{11})}{\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}} + (2c_{11}\,x_1 + b_{11})}\right| = \mathrm{t}$$

Al expresarlo en forma exponencial:

$$\left|\frac{\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}} - (2c_{11}\,x_1 + b_{11})}{\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}} + (2c_{11}\,x_1 + b_{11})}\right|^{\frac{1}{\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}}}} = e^{-t}$$

Ahora para despejar x_1 elevamos ambos miembros a $\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}}$ se obtiene la expresión siguiente:

$$\left|\frac{\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}} - (2c_{11}\,x_1 + b_{11})}{\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}} + (2c_{11}\,x_1 + b_{11})}\right| = e^{-t\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}}}$$

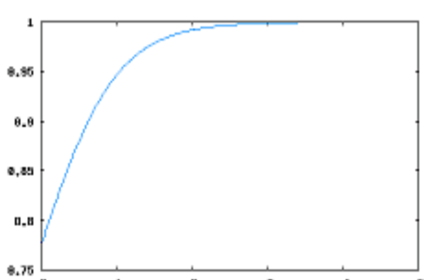
Se efectúan las operaciones y se agrupan para despejar la x_1 y se obtiene finalmente:

$$x_1 = \frac{\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}} - b_1 - \left(\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}} + b_1\right)e^{-t\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}}}}{2c_{11} + 2c_{11}\,e^{-t\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}}}}$$

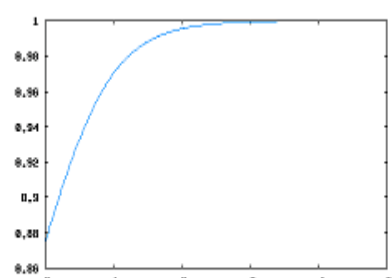
Es necesario mirar los comportamientos a través de una serie de gráficos que se mostraran más adelante, para posibles interpretaciones:

Para ello se hacen los cambios siguientes: Si se asume que $\sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}} = 2$ y hacemos $A = \sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}} - b_{11}$ y $B = \sqrt{b_{11}^2 - 4a_1\,c_{11}} + b_{11}$ y $2c_{11} = C$ la expresión anterior se reduce a: $x_1 = \frac{A - Be^{-2t}}{C + Ce^{-2t}}$

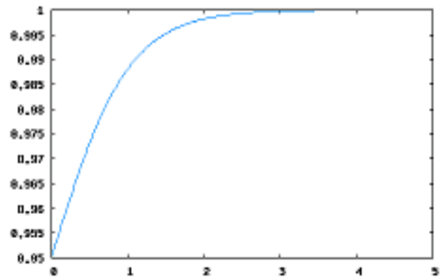
Al otorgarles valores a A = 1; **1.1**; 1.3; **1.5; 1.8**; 1.99; 1.999 y **2**, con los valores fijos de B = - 2, C = 2 y se obtienen ocho resultados, que por dejar claro la tendencia solo se graficarán los cuatro marcados en negritas:



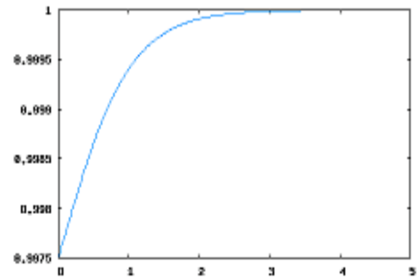
Para A = 1.1, B = -2 y C = 2



Para A = 1.5, B -2 y C= 2



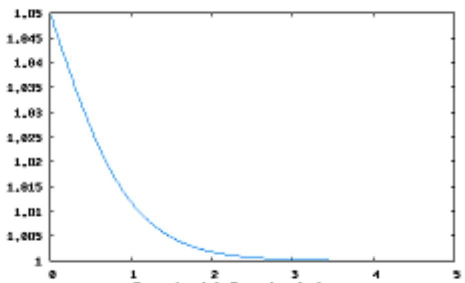
Para A = 1.8, B = - 2 y C = 2



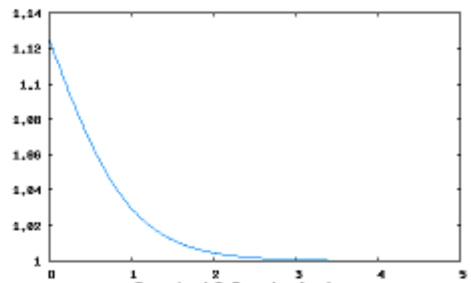
Para A = 2, B = - 2 y C = 2

Lo que muestra un comportamiento creciente y asintótico en x = 1.

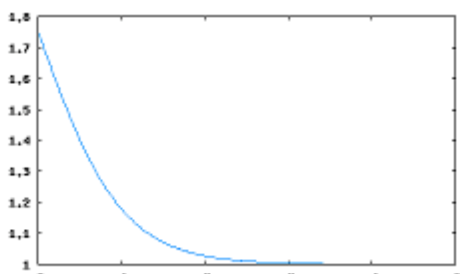
Al otorgarles valores a A = 2.1; **2.2**; 2.3; **2.5;** 3**;** 4; **5**; 1.999 y **6**, con los valores fijos de B = - 2, C = 2 y se obtienen ocho resultados, que por dejar claro la tendencia solo se graficarán los cuatro marcados en negritas:



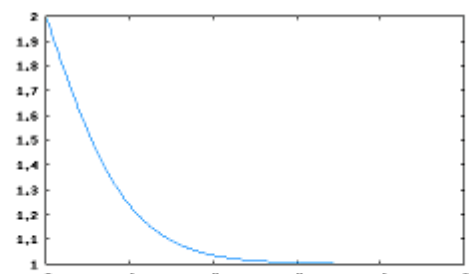
Para A = 2.2, B = - 2 y C- 2



Para A = 2.5, B = - 2 y C = 2

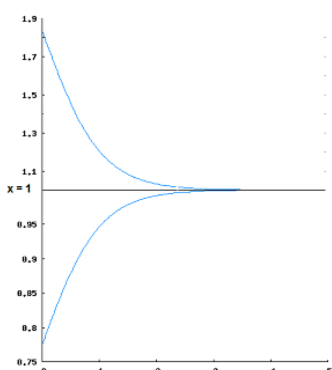


Para A = 5, B = - 2 y C = 2

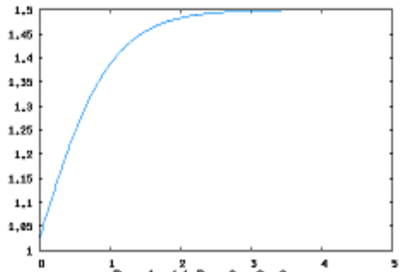


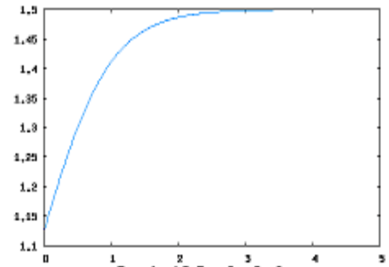
Para A = 6, B = - 2 y C = 2

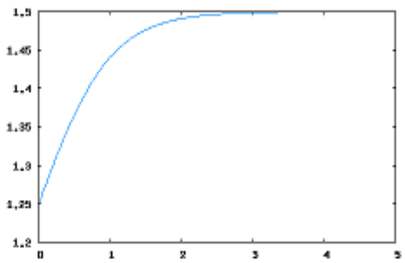
Como se puede observar decrecen al valor 1 de forma asintótica. Ambos comportamientos asintóticos a la recta x= 1 se localizan en la franja limitada por el intervalo (α_1, β_1) con $\alpha_1 > 0$ y $\beta_1 < \infty$ tal como se observa la superposición que se presenta en el siguiente gráfico:

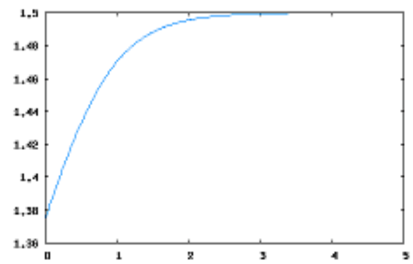


Es necesario observar si este comportamiento asintótico es una regularidad. Ahora al otorgarles valores A = **1.1**; 1.3; **1.5**; 1.8; **1.99**; 2; **2.5** y 3, con los valores de B = - 3, C = 2 y se obtienen ocho resultados, que por dejar claro la tendencia solo se graficarán los cuatro marcados en negritas:


Para A = 1.1, B = -3 y C = 2

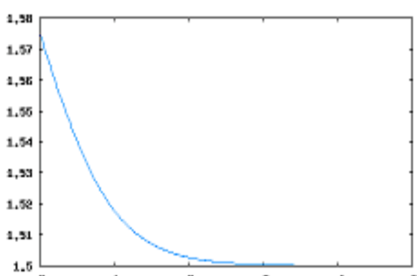

Para A = 1.5, B = -3 y C = 2

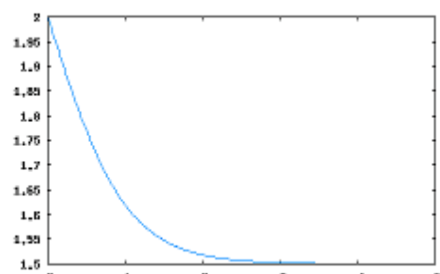

Para A = 1.99, B = -3 y C = 2

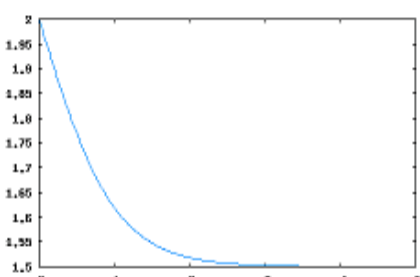

Para A = 2.5, B = -3, y C = 2

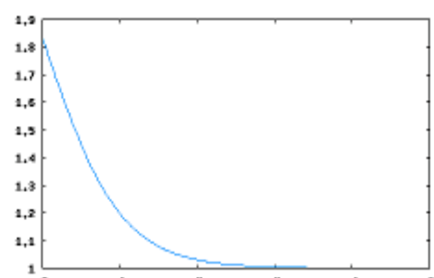
Lo que muestra de nuevo un comportamiento creciente y asintótico en x = 1.5.

Al otorgar ahora los valores A = **3.3**; 3.6; 4; 4.8; **5**; **6**; **7** y **8**, con los valores de B = - 3, C = 2 y se obtienen ocho resultados, que por dejar claro la tendencia solo se graficarán los cuatro marcados en negritas:

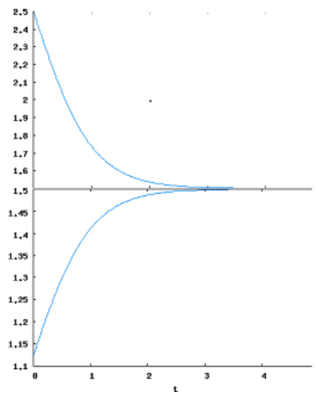

Para A = 3.3, B = -3 y C = 2


Para A = 5, B = -3 y C = 2

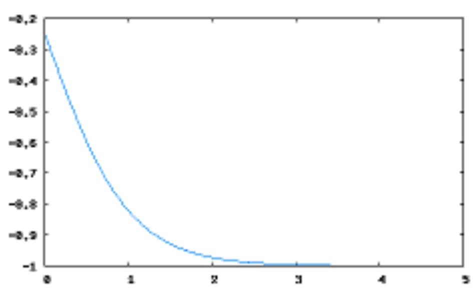

Para A = 5, B = -3 y C = 2


Para A = 8, B = 3, C = 2 y D2 = 2

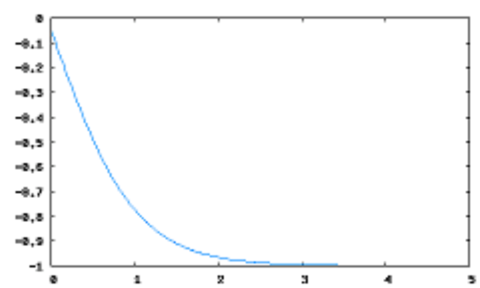
Como se puede observar decrecen al valor 1.5 de forma asintótica. Ambos comportamientos asintóticos a la recta x= 1.5 se localizan en la franja limitada por el intervalo (α_2, β_2) con $\alpha_2 > 0$ y $\beta_2 < \infty$ tal como se observa la superposición que se presenta en el siguiente gráfico:



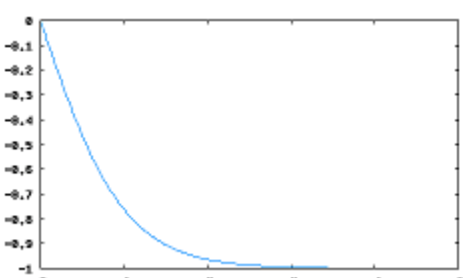
Al otorgar ahora los valores A = **1**; 1.1; 1.3; 1.5; 1.6; **1.8**; **1.99** y **2**, con los valores de B = 2, C = 2 y se obtienen ocho resultados, que por dejar claro la tendencia solo se graficarán los cuatro marcados en negritas:



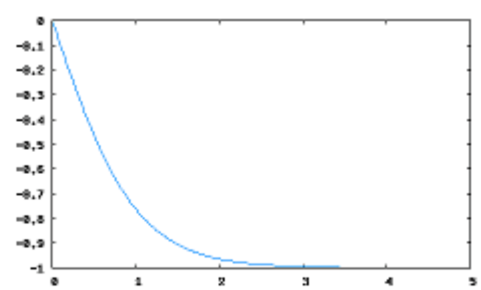
Para A = 1, B = 2 y C = 2



Para A = 1.8, B = 2 y C = 2



Para A = 1.99, B = 2 y C = 2



Para A = 2, B = 2 y C = 2

Parcialmente se puede concluir que: como se puede observar decrecen al valor - 1de forma asintótica. Es decir, se tienen las rectas x=1, x= 1.5 y x= - 1 como asíntotas horizontales que para ciertos parámetros tienen un comportamiento creciente hacia ella y con otros decreciente, excepto en los últimos valores. Entonces se puede formular una pregunta. ¿Qué interpretación tiene este tipo de singularidad que se presenta como un comportamiento asintótico múltiple? Para este mismo ensayo: ¿Qué valores tiene el $inf\{\propto\}$ y $sup\{\beta\}$?

Sin embargo, un segundo ensayo donde se relacionen los coeficientes de las variables a_1 , b_{11} y c_{11} se pudieran encontrar mejores interpretaciones.

Ahora, si se fijan los valores de $a_1 = 2$ y para $c_{11} = 3$, se obtienen los valores de A, B, D2, a partir de $b_{11} = 5$ (para que la variación con el tiempo sea menos de la mitad que la del estado) y a continuación se muestran cuatro de sus comportamientos gráficos: a partir de la función

$$x_1 = \frac{A - Be^{-D2t}}{C + Ce^{-D2t}}$$

1. Para $b_{11} = 5$, $a_1 = 2$ y $c_{11} = 3$ implica que $\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} = 1$ y el factor de la exponencial $-(\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} + b_1) = -(1 + 5) = -6$ por tanto función toma la expresión $x_1 = \frac{-4 - 6e^{-t}}{3+3e^{-t}}$ (Ver figura 1)

2. Para $b_1 = 6$, $a_1 = 2$ y $c_1 = 3$ implica que $\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} = \sqrt{12} = 3.46$ y el factor de la exponencial $(\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} + b_1) = -(3.46 + 6) = -9.46$ por tanto los valores de la expresión $x_1 = \frac{-2.54 - 9.46e^{-3.46t}}{3 + 3e^{-3.46t}}$ (Ver figura 2)

3. Para $b_1 = 7$, $a_1 = 2$ y $c_1 = 3$ implica que $\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} = 5$ y el factor de la exponencial $-(\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} + b_1) = -(5+7) = -12$ por tanto los valores de la expresión $x_1 = \frac{-2 - 12e^{-5t}}{3 + 3e^{-5t}}$

(Ver figura 3)

4. Para $b_1 = 9$, $a_1 = 2$ y $c_1 = 3$ implica que $\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} = \sqrt{57} = 7.54$ y el factor de la exponencial $-(\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} + b_1) = -(7.54 + 9) = -16.54$ por tanto los valores de la expresión $x_1 = \frac{-1.46 - 16.54e^{-7.54t}}{3 + 3e^{-7.54t}}$ (Ver figura 4)

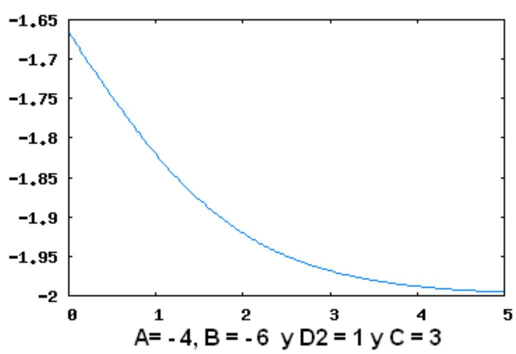


Figura 1

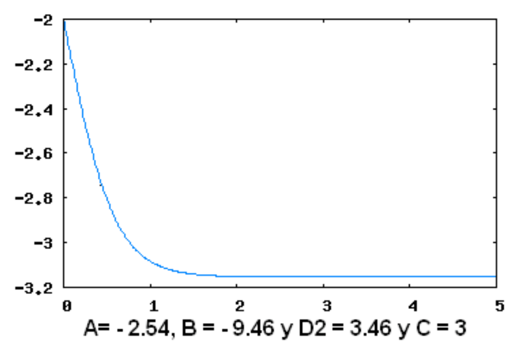


Figura 2

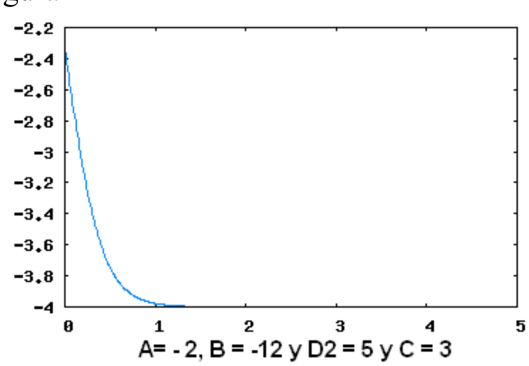


Figura 3

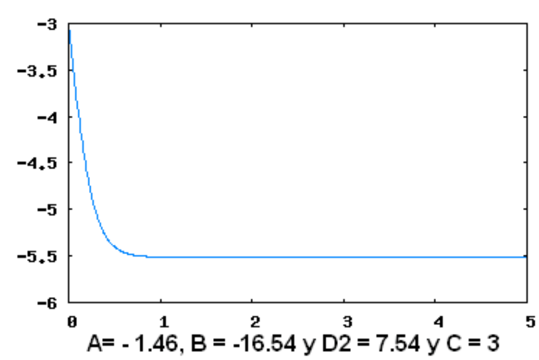


Figura 4

Ahora, si se cambia los valores de $a_1 = 2$ para $a_1 = 3$ y mantenemos $c_1 = 3$ (para mantener que la variación del estado es más del doble que la del tiempo), se obtienen los valores de A, B, D2, a partir de $b_1 = 6$ y a continuación se muestran cuatro de sus comportamientos gráficos:

5. Para $b_1 = 6.5$, $a_1 = 3$ y $c_1 = 3$ implica que $\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} = \sqrt{6.25} = 2.5$ y el factor de la exponencial $(\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} + b_1) = -(2.5 + 6.5) = -9$ por tanto los valores de la expresión $x_1 = \frac{-4 - 9e^{-2.5t}}{3 + 3e^{-2.5t}}$ (Ver figura 5)

6. Para $b_1 = 8$, $a_1 = 3$ y $c_1 = 3$ implica que $\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} = \sqrt{28} = 5.3$ y el factor de la exponencial $-(\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} + b_1) = -(5.3 + 8) = -13.3$ por tanto los valores de la expresión $x_1 = \frac{-2.7 - 13.3e^{-5.3t}}{3 + 3e^{-5.3t}}$ (Ver figura 6)

7. Para $b_1 = 9$, $a_1 = 3$ y $c_1 = 3$ implica que $\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} = \sqrt{45} = 6.7$ y el factor de la exponencial $-(\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} + b_1) = -(6.7 + 9) = -15.7$ por tanto los valores de la expresión $x_1 = \frac{-2.3 - 15.7e^{-6.7t}}{3 + 3e^{-6.7t}}$ (Ver figura 11)

8. Para $b_1 = 10$, $a_1 = 3$ y $c_1 = 3$ implica que $\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} = \sqrt{64} = 8$ y el factor de la exponencial $-(\sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} + b_1) = -(8 + 10) = -18$ por tanto los valores de la expresión $x_1 = \frac{-2 - 18e^{-8t}}{3 + 3e^{-8t}}$ (Ver figura 12)

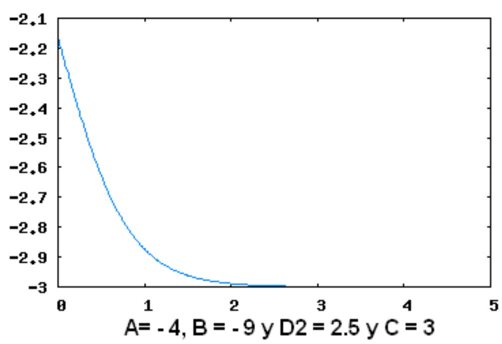


Figura 5

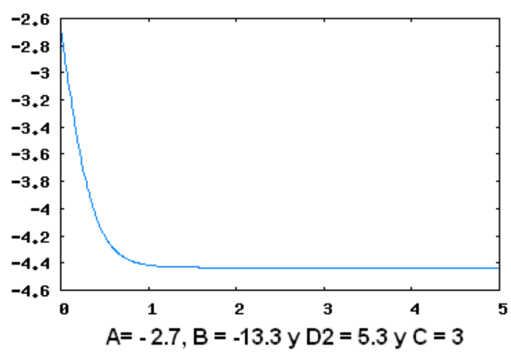


Figura 6

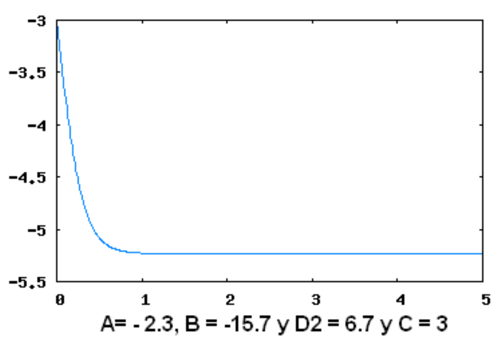


Figura 7

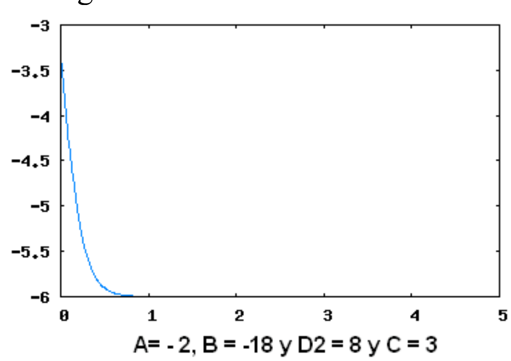


Figura 8

Conclusiones

Con estos últimos ocho casos se obtiene un comportamiento decrecientemente negativo. ¿Es que con esas condiciones impuestas da lugar a un aprendizaje negativo? Las respuestas a estas preguntas aún no se tienen. Es totalmente prematuro, con este ensayo, poder encontrar regularidades que permitan responder o diagnosticar aspectos que puedan ser relevantes y útiles en el complejo proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Solo se quiso presentar estos avances que recientemente se han obtenido en un trabajo interdisciplinario entre grupos de Educación Matemática y Sistemas Complejos de estas universidades. Es de suponer que las soluciones al sistema modelado no necesariamente sean tan estables como se han presentado. Se tiene la certeza, es más constituye una conjetura, que al continuar observando el comportamiento del sistema para otros valores del coeficiente D2, así como otras interpretaciones que puedan proporcionar a los coeficientes originales del sistema $\dot{x}_1 = a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_1^2$ objeto de este estudio, con valores correlacionados; así como, de otras aproximaciones, como las del modelo de la ecuación diferencial de Lotka-Volterra[1] en el que la interacción de dos sujetos en contradicción puedan modelarse con cierta analogía al modelo presa-depredador y muestren singularidades no solo interesantes, sino útiles en la Educación Matemática. A medida que se vayan relajando condiciones hacia un sistema dinámico más completo, las soluciones van a ser más diversas y las interpretaciones más interesantes y útiles para contribuir a la comprensión de ciertos aspectos dinámicos del aprendizaje de la matemática; por lo menos, a nivel de hipótesis que puedan ser verificadas de forma empírica.

Referencias y bibliografia

Broer, H. y Takens, F. (2010) Dynamical Systems and Chaos. *Springer.*

Ott, E. (1997) Chaos in Dynamical Systems. *Cambridge University Press.*

Van Geert, P. (1998) A Dynamic Systems Model of Basic Developmental Mechanisms: Piaget, Vygotsky, and Beyond. *Psychological Review*, Vol. 105, Nº 4, 634-677.

Wiens, E. G. Ecuaciones Lotka–Volterra.http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_Lotka-Volterra

[1] Wiens, E. G. Ecuaciones Lotka–Volterra. http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaciones_Lotka%E2%80%93Volterra