Uso de los grafos trinomiales para el análisis de los problemas de probabilidad condicional y sus resoluciones[1].

M. Pedro **Huerta** Palau
Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València
España
Manuel.p.huerta@uv.es

Resumen

En este taller se propone una herramienta para el análisis de los problemas de probabilidad condicional y de sus procesos de resolución, el grafo trinomial. El taller consta de cuatro fases: introducción al lenguaje del grafo, traducción de un problema al grafo y realización de lecturas analíticas, del grafo a la formulación de problemas y finalmente análisis de resoluciones mediante grafos.

Palabras clave: Resolución de problemas, probabilidad condicional, didáctica de la probabilidad, formación de profesores de matemáticas.

Introducción: Interés del taller

Una familia particular de problemas de probabilidad, aquellos que implican a dos sucesos básicos A y B, sus complementarios, $\overline{A}$, $\overline{B}$ y sus intersecciones, del tipo $A \cap B$ o $A \cap \overline{B}$, a sus probabilidades y a las relaciones entre esas probabilidades, han sido identificadas como familia de problemas ternarios de probabilidad condicional (Cerdán y Huerta, 2007), familia a la que pertenecen los dos ejemplos, dispares si se quiere, que mencionamos a continuación.

P. 1 *Se sabe que* $p(B \mid A) = 0.9$, $p(A \mid B) = 0.2$ *y* $p(A) = 0.1$. *Calcula* $p(A \cap B)$ *y* $p(B)$

P. 2 *Un test específico para la tuberculosis se usa par diagnosticar si una persona está enferma de tuberculosis o no. La sensitividad y especificidad del test es muy alta, con valores 0.97 y 0.98, respectivamente. En una cierta ciudad hay una proporción muy alta de falsos positivos, más específicamente, 0.9 de los que el test les resultó positivos, no son de hecho tuberculosos. Calcular el Valor Predictivo del Negativo.*

Dichos problemas son problemas escolares que forman parte de la mayoría de los currículum de matemáticas alrededor del mundo, tanto en educación secundaria como terciaria. Su estudio es pertinente, entonces, por sí mismo, pero también por el auge creciente que la enseñanza de la probabilidad está experimentando en los últimos años. En este sentido, el taller que ofrecemos puede ser de interés para los investigadores en resolución de problemas y educación probabilística, profesores de matemáticas en activo y profesores de matemáticas en formación, como veremos a continuación.

Como forma de modelizar dichos problemas, para un mejor estudio de su estructura matemática, de su complejidad, y de otros aspectos que iremos identificando a lo largo del taller, Cerdan y Huerta (2007) desarrollan un metalenguaje, heredado del uso que Cerdán (2008) les da para los problemas aritméticos-algebraicos, que permite expresar los problemas en términos de un grafo. Dicho grafo es llamado el grafo trinomial del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional. Un análisis minucioso de los grafos permite decir, mediante lo que llamamos lecturas analíticas, sobre los problemas que representan.

[1] Este trabajo forma parte del Proyecto EDU2008-03140/EDU financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (España).

Estas lecturas analíticas pueden clasificarse, a su vez, en lecturas aritméticas o lecturas algebraicas en función de la tipología del grafo resultante en el que se leen los datos conocidos y desconocidos del problema y sus relaciones. A lo largo del taller, en su primera parte, los participantes se familiarizarán con el metalenguaje de los grafos. Se construirá un esbozo del grafo del mundo de los problemas y se realizarán en él lecturas analíticas de diferentes problemas — Del enunciado del problema a su representación en el grafo del mundo. Mediante la aplicación de un algoritmo, que hemos llamado *algoritmo de destrucción* del grafo, se identificarán lecturas aritméticas y lecturas algebraicas. Se dirá que un problema tiene una lectura aritmética si el grafo se autodestruye solo con considerar los datos conocidos. Se dirá que la lectura es algebraica si para destruir el grafo es necesario, además, considerar una cantidad desconocida como conocida, es decir, sobredimensionar el grafo inicial.

Dado un problema, identificaremos a uno de sus grafos posibles como el grafo del problema. Considerando esto, podemos introducir el criterio de isomorfía para determinar si dos problemas son isomorfos mediante la isomorfía de sus grafos. Además, identificaremos su complejidad e introduciremos una medida para dicha complejidad.

Partiendo de la clasificación de los problemas ternarios de probabilidad condicional en familias y subfamilias de problemas que hace Lonjedo (2007), y que puede verse también en su relación con los grafos en Huerta (2009), estudiaremos los grafos de algunas familias y subfamilias de problemas, determinando cuáles son las propiedades que se despenden de una lectura analítica de dichos problemas.

En la segunda parte, el taller ofrecerá la posibilidad de que los participantes recorran el camino inverso al que hasta ahora les habrá conducido las diferentes tareas realizadas — Del grafo al enunciado del problema. El objeto de esta segunda parte es mostrar a los participantes, la utilidad del grafo para formular problemas: a) para cuestionarios que permitan investigar su resolución, dependientes de los objetivos de investigación propuestos, b) enseñar la resolución de estos problemas sujetos a los objetivos de enseñanza que se consideren. En estos casos, entre otros factores, los contextos en los que se formulen los problemas se convierten en variables de la tarea (en el sentido de Kulm, 1979) que no deben ser desconsideradas en ningún caso (Carles, Huerta y otros, 2009; Huerta y Cerdán, 2010). Se analizarán, en este taller, al menos dos situaciones o contextos, a los que hemos llamado test de diagnóstico y estadístico. No obstante, el contexto matemático estará siempre presente.

Finalizaremos el taller viendo el uso de los grafos en el análisis de las resoluciones de los estudiantes a problemas propuestos en diferentes investigaciones desarrolladas. Determinaremos competencias de los estudiantes que resuelven un problema con éxito e identificaremos errores y dificultades en aquellos estudiantes que no resuelven un problema con éxito.

Objetivos del taller

Durante la realización del taller se pretenden los siguientes objetivos:

1. Que los participantes adquieran competencia en el uso de la herramienta propuesta para el análisis de los problemas de probabilidad condicional: Los grafos trinomiales.
2. Que los participantes alcancen a apreciar el potencial de la herramienta, tanto para la investigación en resolución de problemas como para el diseño de secuencias de enseñanza en los niveles secundarios.
3. Que los participantes conozcan ejemplos de los usos de esta herramienta en investigaciones ya realizadas.

Justificación[2].

Los apartados 1, 2 y 3, de lo que sigue, justifican el objetivo 1 del taller; los apartados 4 y 5 justifican el objetivo 2 y el apartado 6 justifica, finalmente, el objetivo 3. Se describen en los sucesivos apartados los aspectos que se desarrollarán en el taller y que le dan sentido.

1. Las probabilidades y relaciones entre probabilidades

Dados dos sucesos A y B, de la definición de la probabilidad condicionada de A por el suceso B, $p(A \mid B)$, se deduce la siguiente relación multiplicativa y ternaria (pues tres probabilidades están implicadas en ella): $p(B) \times p(A \mid B) = p(A \cap B)$ (1)

Las relaciones de complementariedad y de la probabilidad total también son relaciones ternarias, pero esta vez aditivas: $1 = p(A) + p(\overline{A})$ (2), $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$ (3)

Para dos sucesos básicos A y B, su complementarios $\overline{A}$ y $\overline{B}$, las 4 intersecciones entre ellos $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, las 8 probabilidades absolutas —cuatro marginales y cuatro de la intersección— y las 8 probabilidades condicionadas entre los sucesos básicos y sus complementarios, existen 18 relaciones ternarias que las ligan: 10 de las cuáles son aditivas (6 de tipo 2 y 4 de tipo 3) y 8 son multiplicativas del tipo 1.

2. Los problemas de probabilidad condicional. Los problemas ternarios.

Un problema de probabilidad lo identificamos como un problema de probabilidad condicional si en el texto del problema se menciona al menos una probabilidad condicional, ya sea en la parte informativa del problema o en la parte interrogativa o en las dos. Los dos enunciados de la introducción los identificamos como problemas de probabilidad condicional. Un problema de probabilidad condicional se identificará como ternario si se cumplen determinadas condiciones (pueden verse en Cerdán y Huerta, 2007). Dichas condiciones discriminan los problemas de varias etapas de los de una sola etapa. Los ejemplos mencionados en la introducción son problemas ternarios.

Un problema ternario de probabilidad condicional puede ser formulado dando, exactamente, tres probabilidades como cantidades conocidas y una probabilidad como cantidad desconocida por la que se pregunta en el problema. Dichas cantidades han de ser tomadas de manera conveniente del conjunto de 16 probabilidades mencionadas más arriba. Un problema puede ser sobredimensionado o subdimensionado en tanto que se proporcionen más o menos cantidades conocidas para resolver la pregunta del problema que las estrictamente precisas para los problemas ternarios.

3. La herramienta: Los grafos trinomiales, un metalenguaje para los problemas.

El grafo trinomial. Siendo un metalenguaje es preciso introducir los signos para la representación y sus significados:

- Signos para la probabilidades: cuadrados pequeños. En el grafo llamados vértices.
- Signos para las relaciones ternarias aditivas: líneas curvas de trazo discontinuo conectando tres vértices. En el grafo aristas trinomiales aditivas. Aristas ordenadas.
- Signos para las relaciones ternarias multiplicativas: líneas curvas de trazo continuo conectando tres vértices. En el grafo aristas trinomiales multiplicativas. Aristas ordenadas.

---

[2] El lector interesado en profundizar en los aspectos teóricos que aquí se proponen puede consultarlos en Huerta (2009).

Arquitectura del grafo: Disposición en el plano de vértices y aristas. Simetrías. Reconocimiento de las relaciones de proporcionalidad.

El mundo de los problemas ternarios queda representado mediante lo que llamamos Grafo trinomial del mundo de problemas de probabilidad condicional (Figura 1), una red de vértices y aristas que representan probabilidades y relaciones entre probabilidades de las identificadas en los apartados anteriores.

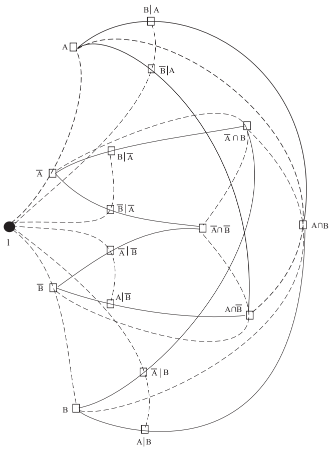

Figura 1. Grafo trinomial del mundo de problemas ternarios de probabilidad condicional.

4. La herramienta en uso para el análisis de los problemas. Del problema al grafo

Representadas en el grafo las cantidades conocidas y desconocidas de un problema, necesitamos un modo de trabajar en él. Definimos para ello lo que llamamos algoritmo de destrucción del grafo. El resultado de aplicarlo permite realizar lecturas analíticas de un problema en el grafo. Derivadas de ellas se identifica cuando la lectura es aritmética o algebraica y sus consecuencias.

Por otro lado, el número de relaciones implicadas en la destrucción del grafo permite definir la complejidad del problema y asociar a cada problema un grado de complejidad.

5. La herramienta en uso para la formulación de los problemas.

Para la formulación de problemas en contextos matemáticos, a partir del grafo del mundo, deberemos proceder a la elección de las cantidades conocidas y desconocidas del problema dependientes de la complejidad del problema. Pero, para su formulación en contextos no matemáticos es necesario realizar análisis previos de los contextos no matemáticos, como lo hacen Carles y Huerta (2007). Es entonces cuando se procede a la formulación de los problemas en los contextos analizados.

Como caso particular analizaremos la construcción de cuestionarios de problemas (Carles, Huerta y otros, 2009; Huerta y Cerdán, 2010) considerando las distintas variables de la tarea (Kulm, 1979) que pueden tenerse en cuenta.

6. La herramienta en uso para el análisis de las resoluciones de los estudiantes: competencias, errores y dificultades.

El paso de una resolución escrita al grafo permite obtener lo que llamamos el grafo de una resolución. En él se pueden determinar competencias en la resolución de problemas identificando rutas de resolución competente de un problema. Además, errores como: errores de interpretación de las cantidades conocidas o desconocidas, errores en el uso de las relaciones entre cantidades, etc. Del mismo modo puede analizarse la competencia en las resoluciones de problemas con lecturas algebraicas poniendo el énfasis en la elección de la incógnita, las incógnitas auxiliares y las ecuaciones. Los errores en las resoluciones de problemas con lecturas algebraicas se identifican, esta vez, con realización de lecturas aritméticas, errores en la determinación de las incógnitas auxiliares, error de ecuación, etc.

Propuesta de actividades, temporalización y metodología. Guía de trabajo.

Etapas y tiempos previstos

La tabla siguiente (Tabla 1) describe los objetivos, la propuesta de actividades prevista, los puntos de la propuesta en la que se fundamentan y, finalmente, el tiempo inicialmente previsto para el desarrollo de las actividades. Siendo conscientes de que el tiempo depende de los participantes, el cómputo total del tiempo previsto para el desarrollo del taller oscila entre las 2 horas 30 min. y las 3 horas.

Tabla 1

Distribución en etapas, objetivos, actividades y tiempos previstos en el taller

Etapa	Objetivo	Actividad	Apartados donde se justifica	Tiempo previsto
1	1	Resolución de los problemas ternarios P y Q	1-2	15-20 min.
1	1	Signos para la representación.	1-2	5 min.
1	1	Construcción del grafo del mundo de los problemas.	3	10 min.
2	2	Dados lo problemas P y Q, realizar las lecturas analíticas en el grafo. Lecturas aritméticas y algebraicas	4	20 min.
2	2	El grafo del mundo de problemas en contextos no matemáticos: El test de diagnóstico y las situaciones conjuntistas.	5	20 min.
3	2	Elaboración de cuestionarios. Variables de la tarea. Dificultades de los problemas.	5	20 min.
3	2-3	Grafos de resoluciones. Competencias, errores y dificultades.	6	50 min.
1-2-3	3	Debate final entre los asistentes. Conclusiones		20 min.

Metodología

Metodológicamente hablando, pueden verse dos momentos diferenciados. No obstante, la participación activa de los asistente se considera indispensable para el buen funcionamiento del taller. Básicamente, el papel del ponente consiste en proponer tareas a los asistentes y provocar el debate y la discusión, así como la puesta en común de los resultados compartidos.

Comenzaremos el taller proponiendo a los asistentes la resolución, anónima, de un conjunto de problemas ternarios (2 por asistente). Las resoluciones de dichos problemas serán usados en la etapa 3 del taller que se desarrollará con posterioridad.

En un primer momento, sobre todo en la etapa 1, la participación del asistente será menor. El taller requiere que en ese tiempo se presenten los fundamentos teóricos de la propuesta.

En la etapa 2, se presentarán a los participantes los problemas que se propusieron al principio. Éstos deberán realizar las lecturas analíticas pertinentes de los problemas propuestos en los grafos correspondientes y clasificar los problemas según los datos y sus lecturas.

En la etapa 3, para los problemas propuestos al inicio, con lecturas aritméticas y algebraicas, los participantes, a partir de las resoluciones escritas de otros participantes en el taller, elaborarán los respectivos grafos de las resoluciones. A partir de los grafos los participantes obtendrán conclusiones sobre competencias, errores, dificultades y cualquier otro aspecto que sea observable. Dichas conclusiones serán objeto de debate entre todos, debate que se ampliará a los contenidos del taller, con lo que se cerrará el mismo.

Información general.

Información general	
Título del taller: Uso de los grafos trinomiales para el análisis de los problemas de probabilidad condicional y sus resoluciones.	
Nombre de los autores: M. Pedro Huerta	
Institución: Universitat de València	
País: España	
Número de horas más conveniente:	3
Nivel educativo al que va dirigido el taller	General
Número máximo de personas	30
Equipos audiovisuales o informáticos que requeriría	Proyector multimedia, conexión a Internet
Mesas de trabajo	Medianas, para 4 participantes
Distribución espacial de mesas de trabajo	En filas

Referencias.

Carles, M., y Huerta, M. P. (2007). Conditional probability problems and contexts. The diagnostic test context. En D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 5,* 702-710.

Carles, M., Huerta, M. P., Cerdán, F., Lonjedo, Mª A., y Edo, P. (2009). Influencia de la estructura y el contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N_0. Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII*, 173-185. Santander: SEIEM.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de València, Valencia, España.

Cerdán, F., y Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, 19 (1), 27-62.

Huerta, M. P. (2009). On Conditional Probability Problem Solving Research —Structures and Context, en M. Borovcnik & R. Kapadia (2009), Special issue on "Research and Developments in Probability Education". *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4 (3), 163-194, www.iejme.com

Huerta, M. P., y Cerdán, F. (2010). El cálculo de probabilidades y la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*, 353-364. Lleida: SEIEM.

Kulm, G. (1979). The classification of Problem-Solving Research Variables. En G.A. Golding & C. E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*, 1-22. ERIC/SMEAC: Columbus, Ohio.

Lonjedo, M. A. (2007). *Análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal y de sus procesos de resolución*. Tesis Doctoral no publicada, Universitat de València, Valencia, España.